

**В. П. СЕВЕРИН**, д-р техн. наук, проф., проф. НТУ «ХП»;  
**О. М. НИКУЛІНА**, канд. техн. наук, доц., доц. НТУ «ХП»;  
**В. С. БУРЯКОВСЬКИЙ**, студент НТУ «ХП»

## АНАЛІЗ ЕЛЕКТРОННИХ ФІЛЬТРІВ БАТТЕРВОРТА ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ

Створено математичні моделі електронних фільтрів Баттерворта різних порядків. На основі матричних методів інтегрування систем диференціальних рівнянь розроблені алгоритми та програми для обчислення перехідних процесів в фільтрах та їх прямих показників якості. Розраховані амплітудно-частотні характеристики, перехідні процеси та прямі показники якості фільтрів Баттерворта різних порядків.

**Ключові слова:** електронні фільтри, фільтр Баттерворта, математична модель, передавальна функція, перехідні процеси, прямі показники якості.

**Вступ.** Фільтр Баттерворта – електронний фільтр низьких частот, який має максимально гладку амплітудно-частотну характеристику на частотах смуги пропускання і котра знижується практично до нуля на частотах смуги подавлення. Розрахунок електронного фільтра із заданими характеристиками є складною оптимізаційною задачею параметричного аналізу та синтезу радіоелектронних схем [1]. Перехідні характеристики електронних фільтрів обчислюються на основі математичних моделей фільтрів, визначених у вигляді передавальних функцій та систем диференціальних рівнянь, для розв’язання яких доцільно використовувати матричні методи інтегрування [1, 2]. За перехідними характеристиками обчислюються прямі показники якості фільтрів [1, 3].

Мета статті полягає в представленні математичних моделей, алгоритмів та результатів аналізу прямих показників якості перехідних процесів для електронних фільтрів Баттерворта.

**Математичні моделі фільтрів Баттерворта.** Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) фільтра низьких частот Баттерворта порядку  $n$  представляється виразом

$$A(\omega) = 1 / \sqrt{1 + \omega^{2n}}, \quad (1)$$

де  $\omega$  – кругова частота.

Всі полюси квадрата модуля цієї АЧХ розташовані на колі одиничного радіусу на кутовій відстані  $\theta = \pi/n$ . Для розрахунку передавальної функції фільтра обирають полюси, що лежать в лівій півплощині:

$$s_k = \exp(j(\pi/2 + \varphi_k)), \quad j = \sqrt{-1}, \quad \varphi_k = (2k - 1)\theta/2, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Передавальна функція фільтру Баттерворта має загальний вигляд:

$$H(s) = 1/D(s), \quad D(s) = \prod_{k=1}^n (s - s_k) = d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_{n-1} s + d_n, \quad (3)$$

де  $d_0 = 1$  і  $d_n = 1$ .

Для непарного та парного  $n$  відповідно отримаємо:

$$D(s) = (s+1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (s^2 + 2s \sin \varphi_k + 1), \quad D(s) = \prod_{k=1}^{n/2} (s^2 + 2s \sin \varphi_k + 1). \quad (4)$$

Обчислимо коефіцієнти  $a_k = d_k / d_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , та перейдемо від передавальної функції (3) до системи диференціальних рівнянь (СДР):

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}u, \quad \mathbf{X}_0 = \mathbf{0}, \quad y = \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad (5)$$

де  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$  і  $\mathbf{X}_0$  – вектори стану і початкових умов;

$\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  – матриці стану і входу;

$u = u(t)$  – вхідний вплив;

$\mathbf{C}$  і  $y = y(t)$  – матриця і змінна виходу.

Матриці СДР (5) мають вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0). \quad (6)$$

**Методи аналізу фільтрів Баттерворта.** Матричні методи інтегрування, що засновані на розрахунку матричної експоненти та її інтегралу, ефективно використовуються для розв'язання як жорстких, так і нежорстких СДР [1, 2].

Матрична експонента визначається рядом, що рівномірно сходиться:

$$\Phi(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2/2! + \mathbf{A}^3/3! + \dots, \quad (7)$$

де  $\mathbf{A}$  – квадратна матриця;

$\mathbf{E}$  – одинична матриця.

Аналогічно представимо ряд для інтегралу матричної експоненти

$$\Phi(\mathbf{A}, h) = \int_0^h e^{\mathbf{A}t} dt = h \left[ \mathbf{E} + \mathbf{A}h/2! + (\mathbf{A}h)^2/3! + (\mathbf{A}h)^3/4! + \dots \right], \quad (8)$$

де  $h$  – крок інтегрування.

Для обчислення перехідної функції одночасно використовуються матрична експонента (7) та її інтеграл (8), за котрим розраховується вектор  $\mathbf{g} = \Phi(\mathbf{A}, h)\mathbf{B}$ . Ці параметри знайдемо за наступним алгоритмом.

Алгоритм 1. Параметри для обчислення перехідної функції.

Вхідні параметри:  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$  – матриці стану та входу,  $h$  – крок інтегрування.

Вихідні параметри:  $\Phi$  – матрична експонента,  $\mathbf{g}$  – добуток інтеграла матричної експоненти на матрицю входу.

1. Покласти  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\delta = 10^{-12}$ ,  $N_A = \|\mathbf{A}\|$ . 2. Якщо  $N_A h < \varepsilon$ , то покласти  $l = 0$ ,  $s = h$ , інакше обчислити  $l = \lceil \log_2(N_A h / \varepsilon) \rceil$ ,  $s = h/2^l$ . 3. Покласти  $\mathbf{B} = \mathbf{A}s$ ,  $\mathbf{C} = 0,5\mathbf{B}$ ,  $\Phi = \mathbf{E} + \mathbf{C}$ ,  $i = 2$ . 4. Якщо  $\|\mathbf{C}\| > \delta\|\Phi\|$ , то покласти  $i = i + 1$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{B}/i$ ,  $\Phi = \Phi + \mathbf{C}$ , інакше перейти до п. 6. 5. Перейти до п. 4. 6. Покласти  $\Phi = s\Phi$ ,  $\Phi = \mathbf{E} + \mathbf{A}\Phi$ ,  $\mathbf{g} = \Phi\mathbf{B}$ ,  $i = 1$ . 7. Якщо  $l = 0$ , то перейти до п. 10. 8. Покласти  $\mathbf{g} = (\mathbf{E} + \Phi)\mathbf{g}$ ,  $\Phi = \Phi\Phi$ ,  $i = i + 1$ . 9. Якщо  $i < l$ , то перейти до п. 8. 10. Зупинитись.

Перехідна функція системи (5) має вигляд:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}, \quad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t). \quad (9)$$

Звідси отримаємо рекурентні вирази для дискретних моментів часу:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}_k = \Phi(\mathbf{A}h)\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{g}, \quad k = \overline{1, L}, \quad (10)$$

де  $L$  – кількість кроків інтегрування.

За формулою (10) побудуємо алгоритм.

Алгоритм 2. Розрахунок значень перехідної функції.

Вхідні параметри:  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  та  $\mathbf{C}$  – матриці стану, входу і виходу,  $T_f$  та

$L$  – кінець інтервалу та кількість кроків інтегрування.

Вихідні параметри:  $\mathbf{T}$  та  $\mathbf{Y}$  – масиви моментів часу і значень перехідної функції.

1. Покласти  $h = T_f/L$ ,  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , за алгоритмом 1 обчислити  $(\Phi, \mathbf{g})$ . 2. Покласти  $T_0 = 0$ ,  $Y_0 = 0$ ,  $k = 1$ . 3. Покласти  $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{X} + \mathbf{g}$ . 4. Покласти  $T_k = T_{k-1} + h$ ,  $Y_k = \mathbf{C}\mathbf{X}$ . 5. Якщо  $k < L$ , то покласти  $k = k + 1$  і перейти до п. 3. 6. Зупинитись.

Алгоритми 1 та 2 використовуються в матричних методах розв'язання СДР для розрахунку перехідних процесів в радіоелектронних схемах та їх показників якості. Для цього перейдемо до відхилення перехідної функції від її сталого значення  $z(t) = y(t) - y(\infty)$ . В інтервалі часу  $[0, T_f]$  обчислимо масив екстремумів  $\mathbf{E}$  функції  $z(t)$  розмірності  $m$ . Визначимо максимальне

відхилення  $\sigma = \max\{E_i, 0\}$ . Для  $m > 1$  обчислимо розмах коливань  $\zeta$  та показник загасання коливань  $\lambda$ :

$$\zeta = \max_i |E_{2i-1} - E_{2i}|, \quad i = \overline{1, \lceil m/2 \rceil}; \quad \lambda = \max_i \{|E_i|/|E_{i-1}|\}, \quad i = \overline{2, m}. \quad (11)$$

Для монотонної функції покладемо  $\sigma = 0$ . Для такої функції та функції з одним екстремумом  $\zeta = 0$  і  $\lambda = 0$ . Час перехідного процесу  $t_c$  визначається максимальним моментом часу попадання  $z(t)$  в заданий інтервал  $[-\delta_z, \delta_z]$ :

$$t_c = \max\{t \mid |z(t)| = \delta_z, t \in [0, \infty)\}. \quad (12)$$

Визначені показники  $\sigma$ ,  $\zeta$ ,  $\lambda$  та  $t_c$  є найважливішими прямими показниками якості перехідних функцій фільтрів.

**Аналіз фільтрів Баттерворта.** За представленими моделями та алгоритмами розроблені програми аналізу фільтрів Баттерворта, що працюють у двох режимах: для аналізу одного фільтру та для сумісного аналізу кількох фільтрів різних порядків.

Для першого режиму за заданим порядком фільтру Баттерворта  $n$  обчислюються його полюси (2), АЧХ (1), коефіцієнти передавальної функції (3), (4), параметри матриць (6) системи диференціальних рівнянь (5), перехідна функція (9) та прямі показники якості (11), (12). Розміщення полюсів передавальної функції фільтра Баттерворта порядку  $n = 10$  показано на рис. 1. Всі полюси лежать на колі одиничного радіусу в лівій півплощині.

Для другого режиму сумісного аналізу кількох фільтрів Баттерворта за заданими порядками фільтрів обчислюються їх АЧХ (1), коефіцієнти передавальних функцій (3), (4), параметри матриць (6) систем диференціальних рівнянь (5), перехідні функції вигляду (9) та прямі показники якості (11), (12).

Графіки обчислених АЧХ фільтрів Баттерворта для порядків від 2 до 10 представлені на рис. 2. Ці графіки підтверджують, що фільтри Баттерворта дійсно є фільтрами низьких частот, які мають гладкі монотонно спадні амплітудно-частотні характеристики. З ростом порядку фільтру його АЧХ

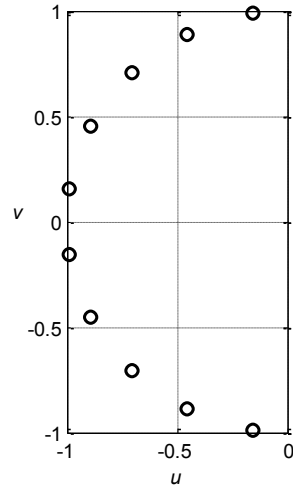


Рис. 1 – Полюси фільтра при  $n = 10$

більш постійна на частотах смуги пропускання і швидше знижується на частотах смуги подавлення практично до нуля.

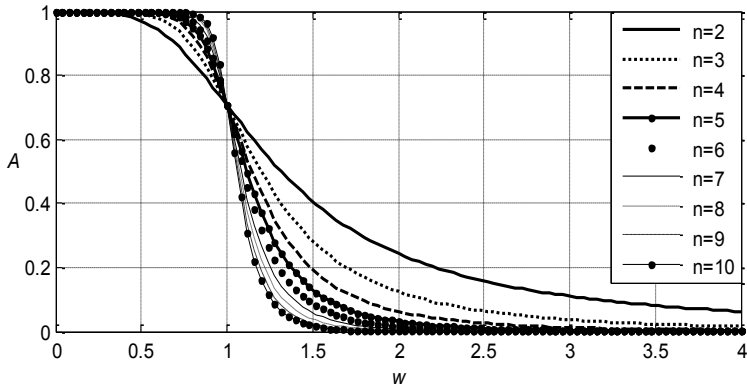


Рис. 2 – Амплітудно-частотні характеристики фільтрів Баттерворта

За алгоритмами 1 та 2 розраховані перехідні функції фільтрів Баттерворта для порядків від 2 до 10, графіки яких представлені на рис. 3. Ці графіки показують, що фільтри Баттерворта мають коливальні перехідні функції. З ростом порядку фільтру його перехідна функція становиться більш коливальною та зміщується вправо, тобто інерційність фільтру підвищується.

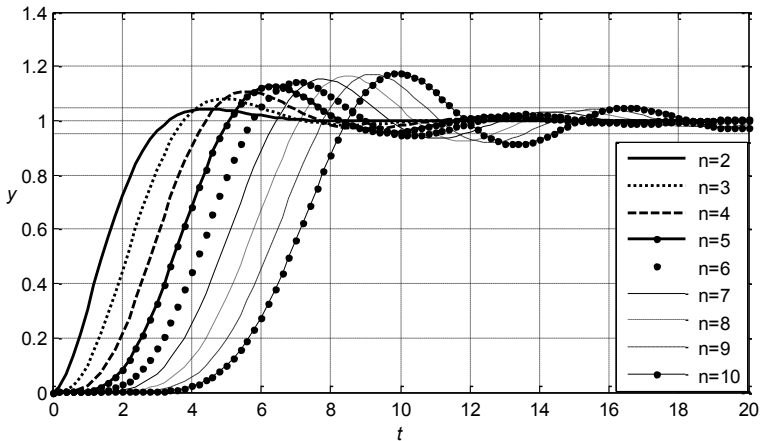


Рис. 3 – Перехідні функції фільтрів Баттерворта

За формулами (11) та (12) обчислені прямі показники якості (ППЯ) для фільтрів різних порядків. Результати розрахунків ППЯ фільтрів Баттерворта для порядків від 2 до 10 представлені в табл. 1. Аналіз цієї таблиці показує,

що з ростом порядку фільтру всі його прямі показники якості суттєво зростають. Вимоги покращення динамічних характеристик електронних фільтрів зумовлюють необхідність постановки та розв'язання задач оптимізації прямих показників якості фільтрів.

Таблиця 1 – Прямі показники якості фільтрів Баттерворта

ППЯ	<i>n</i>								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma$	0,04	0,08	0,11	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18
$\zeta$	0,04	0,10	0,14	0,17	0,20	0,22	0,24	0,25	0,26
$\lambda$	0,04	0,18	0,28	0,36	0,43	0,49	0,53	0,56	0,59
$t_c, c$	2,93	5,97	6,85	7,66	10,77	11,79	12,68	13,52	14,34

**Висновки.** На основі розміщення полюсів передавальної функції фільтрів Баттерворта створені математичні моделі фільтрів різних порядків. Представлені передавальні функції фільтрів Баттерворта непарного та парного порядків. Розроблена математична модель фільтру Баттерворта довільного порядку у вигляді лінійної системи диференціальних рівнянь. Розглянуті формули визначення матричної експоненти та її інтегралу для матричних методів інтегрування лінійних систем диференціальних рівнянь. Розроблено алгоритми обчислення перехідних процесів в фільтрах та їх показників якості. Обчислені амплітудно-частотні характеристики, перехідні функції та прямі показники якості фільтрів Баттерворта різних порядків. Побудовані графіки амплітудно-частотних характеристик і перехідних процесів фільтрів. Представлені значення прямих показників якості фільтрів Баттерворта різних порядків. З ростом порядку фільтра Баттерворта всі його прямі показники якості суттєво зростають, що зумовлює необхідність розв'язання задач оптимізації фільтрів.

**Список літератури:** 1. Домнин И. Ф. Численные методы анализа и синтеза в радиоэлектронике. / И. Ф. Домнин, В. П. Северин, Е. Н. Никулина. – Х.: НТУ «ХПИ», 2014. – 164 с. 2. Ракитский Ю. В. Численные методы решения жестких систем / Ю. В. Ракитский, С. М. Устинов, И. Г. Черноруцкий. – М.: Наука, 1979. – 421 с. 3. Северин В. П. Оптимизация прямых показателей качества систем автоматического управления генетическими алгоритмами / В. П. Северин, Е. Н. Никулина, К. А. Тарасенко // Вісник НТУ «ХП». – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 3(977). – С. 21-26.

**Bibliography (transliterated):** 1. Domnin, I. Ph., V. P. Severin and E. N. Nikulina. *Chislennye metody analiza i sinteza v radioelektronike*. Kharkiv: NTU "KhPI". Print. 2. Rakitskij, J. V., S. M. Ustinov and I. G. Chernorytskij. *Chislennye metody reshenija zhestkih sistem*. Moscow: Nauka, 1979. Print. 3. Severin, V. P., E. N. Nikulina and K. A. Tarasenko. "Optimizacija prjamyh pokazatelej kachestva sistem avtomaticheskogo upravlenija geneticheskimi algoritmami." *Visnyk NTU "KhPI"*. No. 3(977). 2013. 21–26. Print.

Надійшла (received) 14.11.2014