

**В. П. СЕВЕРИН**, д-р, техн. наук, професор НТУ «ХПІ»,  
**Л.В.САДОВЕНКО**, студентка НТУ «ХПІ»

### РОЗРОБКА МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕННЯ ПРЯМИХ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

В статті представлені методи обчислення прямих показників якості систем автоматичного керування. Розглядається побудова перехідних процесів та обчислення показників якості, досліджується ефективність методів обчислення прямих показників.

В статье представлены методы вычисления прямых показателей качества систем автоматического управления. Рассматривается построение переходных процессов и вычисление показателей качества, исследуется эффективность методов вычисления прямых показателей.

Methods of quality indexes calculation of the automatic control systems are presented in the article. The building of transients and quality indexes calculation are discussed, methods of direct indexes calculation are examined.

**Вступ.** Однією з основних проблем створення систем автоматичного керування (САК) є проблема обчислення їх показників якості [1, 2]. Особливостями даної проблеми є велика кількість конструктивних параметрів систем, складність формалізації і визначення показників якості, суперечність вимог, що пред'являються до них, високий порядок моделей систем.

Більшість інженерних вимог до якості реальних систем формуються у вигляді прямих показників якості (ППЯ), таких як перегулювання, час регулювання, коливальність процесу. Ці показники є найважливішими критеріями, що визначають безпеку, надійність і швидкодію систем.

Мета статті полягає в розробці методів обчислення ППЯ систем керування за методами інтегрування систем диференціальних рівнянь (СДР).

Основні етапи обчислення ППЯ включають в себе розробку алгоритмів побудови перехідних процесів, розробку методів обчислення показників, дослідження ефективності і оцінку достовірності методів.

**Чисельні методи побудови перехідних процесів.** У загальному випадку ППЯ перехідних процесів в САК можуть бути визначені тільки шляхом чисельного інтегрування відповідної СДР [3-8]. В теорії автоматичного керування набули поширення матричні методи, що засновані на обчисленні матричної експоненти і застосовуються для інтегрування жорстких СДР.

Лінійна та нелінійна моделі САК у просторі станів мають вигляд:

$$dX/dt = AX + BU, \quad dX/dt = f(X, U), \quad X_0 = 0, \quad y = CX, \quad (1)$$

де  $X = X(t)$  — вектор стану;  $U$  — вхідна дія;  $y = y(t)$  — керована координата;  $A, B, C$  — матриці параметрів САК. Процеси в моделях (1) на

інтервалі часу  $[0, T_f]$  з  $L$  кроками інтегрування довжини  $h = T_f/L$  будуються за формулами:

$$t_k = kh, \quad X_k = X(t_k), \quad y_k = y(t_k), \quad k = \overline{0, L}, \quad \varphi = e^{Ah}, \quad \Phi = \int_0^h e^{A\tau} d\tau, \quad g = \Phi B,$$

$$X_k = \varphi X_{k-1} + g, \quad X_k = X_{k-1} + \Phi f(X_{k-1}, U), \quad y_k = CX_k, \quad k = \overline{1, L}, \quad (2)$$

де перша формула в (2) представляє матричний метод для лінійної моделі при  $U = 1(t)$ , а друга — системний метод першого ступеня Ю.В. Ракитського для нелінійної моделі. За  $y_\infty = y(\infty)$  для відхилення  $z(t) = y(t) - y_\infty$  знаходяться значення  $z_k = y_k - y_\infty$ ,  $k = \overline{0, L}$ , їх прирости  $u_{ik} = z_{k-2} - z_{k-1}$ ,  $u_{rk} = z_k - z_{k-1}$ ,  $k = \overline{2, L}$  і, якщо  $u_{ik}u_{rk} > 0$ , обчислюється значення екстремуму  $e_i$ :

$$d_{uk} = (u_{ik} - u_{rk})/2, \quad s_{uk} = u_{ik} + u_{rk}, \quad r_{uk} = d_{uk}/s_{uk}, \quad e_i = z_{k-1} - d_{uk}r_{uk}/2, \quad (3)$$

де  $i = \overline{1, n_e}$ ,  $n_e$  — число екстремумів в  $[0, T_f]$ . За значеннями екстремумів перехідного процесу обчислюються прямі показники якості: перегулювання  $\sigma$ , розмах коливань  $\zeta$ , показник загасання коливань  $\lambda$ . Нехай  $[v] = \max\{v, 0\}$  — функція зрізки. Для слідкуючої системи з  $y_\infty = 1$

$$\sigma = \begin{cases} 0, & n_e = 0, \\ \lfloor \max e_i \rfloor, & n_e > 0, \end{cases} \quad \zeta = \begin{cases} 0, & n_e = 0, 1, \\ \max |e_{2i-1} - e_{2i}|, & n_e > 1, \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} 0, & n_e = 0, 1, \\ \max \{|e_i|/|e_{i-1}|\}, & n_e > 1. \end{cases}$$

Для системи стабілізації з  $y_\infty = 0$ , процес в якій обов'язково має хоча б один екстремум  $e_1$ ,  $\sigma = \max |e_i|$ , а під час обчислення  $\zeta$  і  $\lambda$  не враховується  $e_1$ .

Час регулювання  $t_c$  та його відносне значення  $\tau$  з позначеннями (3) обчислюються за формулами:

$$u_i = \delta_z \text{sign } z_{k-1} - z_{k-1}, \quad v_{0i} = r_{uk} h, \quad s_i = h \sqrt{r_{uk}^2 + 2u_i/s_{uk}}, \quad v_i = \begin{cases} v_{0i} + s_i, & v_i \leq 0, \\ v_{0i} - s_i, & v_i > 0, \end{cases}$$

$$t_i = t_{k-1} + v_i, \quad t_c = \max t_i, \quad \tau = t_c/T_f,$$

де  $t_i$  — момент попадання відхилення  $z(t)$  в заданий інтервал  $[-\delta_z, \delta_z]$  при  $|z_{k-1}| \geq \delta_z \wedge |z_k| < \delta_z$ . За наведеними формулами зіставлені алгоритми обчислення прямих показників якості САК  $\sigma, \zeta, \lambda, t_c, \tau$ .

Дослідження точності обчислення ППЯ. З метою визначення точності і швидкодії методів побудови перехідних процесів для обчислення ППЯ необхідно провести їх порівняння. Важливо досліджувати ефективність різних методів, вплив постійного і змінного кроку, а також порядку моделі САК на точність обчислення показників якості. Оскільки всі показники обчислюються шляхом чисельного інтегрування з подальшою квадратичною інтерполяцією, то досить дослідити точність обчислення одного з показників, наприклад, часу регулювання. Метод обчислення часу регулювання складніший за методи обчислення показників відхилення і коливальності, оскільки він використовує формулу з квадратним коренем, тому його погрішність має бути вище [1].

Для дослідження точності обчислення  $t_c$  використана тестова передавальна функція (ПФ) порядку  $n$ :  $W(s) = \prod_{i=1}^n 1/(T_i s + 1)$ ;  $T_i = 1/(n+1-i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

На рис. 1 представлені логарифмічні залежності машинного часу  $T_c$  у секундах від відносної похибки  $\varepsilon$  обчислення  $t_c$  при  $n = 500$  матричним методом ММ, системними методами першого та другого ступенів SM1 і SM2, модифікаціями метода Мерсона з постійним кроком CS, дискретною й безперервною зміною кроку DVS і CVS. Перехідні процеси тестових систем різних порядків представлені на рис. 2.

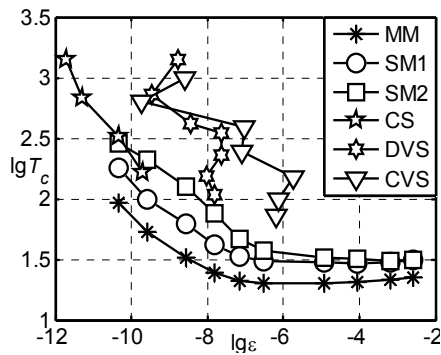


Рис. 1. Порівняння методів

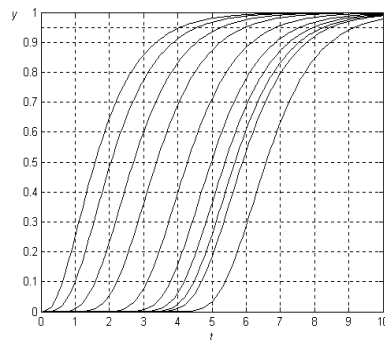


Рис. 2. Перехідні функції тестових систем

З метою дослідження характеру залежності ППЯ від змінних параметрів САК та оцінки достовірності формул та алгоритмів їх обчислення використана діаграма Вишнеградського, яка приведена на рис. 3 для тестової передавальної функції

$$W(s) = 1/(s^3 + x_1 s^2 + x_2 s + 1)$$

з областями аперіодичних А, монотонних М, коливальних К, нестійких Н процесів та точками, перехідні функції для яких показані на рис. 4. На рис. 5–8 представлені графіки ППЯ, побудовані для ПФ при  $T_f = 40$  с,  $\delta_z = 0,05$ .

За допомогою цих графіків дозволяє дослідити залежність показників якості від змінних параметрів ПФ. Співставлення графіків та положення точок на них з областями й точками діаграми Вишнеградського, а також з показниками процесів на рис. 4 підтверджує достовірність обчислень ППЯ.

Аналіз вимог до процесів керування САК дозволяє встановити порядок переваги показників якості:  $\sigma$ ,  $\zeta$ ,  $\lambda$ ,  $\tau$ . З урахуванням переваги показників та їх верхніх граничних значень  $\sigma_m$ ,  $\zeta_m$ ,  $\lambda_m$  запропонована модель оптимізації показників як функцій вектору  $x$  змінних параметрів САК у вигляді мінімізації проєкцій векторних цільових функцій

$$F(x) = (\lfloor \sigma(x) - \sigma_m \rfloor, \lfloor \zeta(x) - \zeta_m \rfloor, \lfloor \lambda(x) - \lambda_m \rfloor, \tau(x))$$

шляхом порівняння її  $k$ -того та  $j$ -того значень операцією «краще»  $\prec$ :

$$F^{(k)} \prec F^{(j)} = \begin{cases} 0, & F_i^{(k)} < F_i^{(j)}, \\ 1, & F_i^{(k)} \geq F_i^{(j)}, \end{cases} \quad i = \begin{cases} m, & \exists m = \min\{r | F_r^{(k)} \neq F_r^{(j)}, r = \overline{1, 4}\}, \\ 4, & F_r^{(k)} = F_r^{(j)}, r = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

Особливістю цієї задачі оптимізації є обмеженість області визначення введених показників якості системи керування умовами її стійкості [1].

Максимальне відхилення  $\sigma$  і показник коливальності  $\zeta$  визначаються на підставі масиву екстремумів перехідної або вагової функцій  $E$  розмірності  $m$ . Розглянуті методи і алгоритми обчислення ППЯ — максимального відхилення, коливальності і часу процесу враховують обмеження спостереження процесів за часом кінцем  $T_f$  інтервалу інтегрування СДР і застосовні тільки для стійких систем. В той же час при чисельній оптимізації цих показників точки оптимізаційного пошуку можуть потрапляти в нестійку область простору варійованих параметрів, коли відхилення керованої величини необмежено зростає. Тому при формуванні прямих критеріїв оптимальності на підставі ППЯ необхідно враховувати також обмеження спостереження процесів за відхиленням:  $z \in [z_{\min}, z_{\max}]$ .

Для обчислення прямих критеріїв якості задамо область зміни відхилення  $z(t)$ , обмежену як за часом, так і за відхиленням:

$$\Omega = \{(t, z) | t \in [0, T_f], z \in [z_{\min}, z_{\max}]\}$$

Позначимо  $z_m = z_{\max}$  і задамо  $z_{\min} = -z_m$ . Спостерігаючи процес в області  $\Omega$  до досягнення її межі по змінних  $t$  або  $z$ , визначимо всі критерії якості процесу. Хай на межі за змінною часу  $t$   $z_f = z(T_f)$  — значення відхилення на кінці інтервалу інтегрування, а на межі за змінною  $z$   $t_m$  — час першого досягнення цієї межі,  $r = t_m/T_f$  — його відносне значення  $r \in (0, 1]$ . Якщо межа області  $\Omega$  за  $z$  не досягається  $|z| < z_m$ , то ці показники обмежені:  $\sigma \in [0, z_m)$ ,  $\zeta \in [0, 2z_m)$ . Інакше при існуванні  $|z| = z_m$  для критерію показників сформуємо штраф, що перевершує верхню грань показника і тим більший, чим менше відносне значення  $r$  часу  $t_m$ .

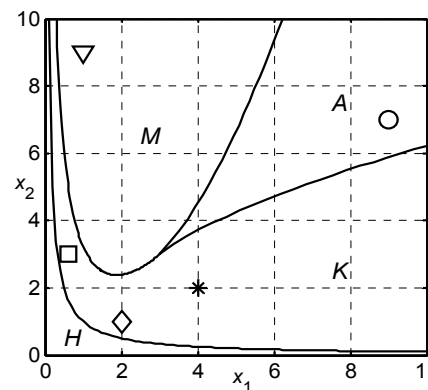


Рис. 3. Діаграма Вишнеградського

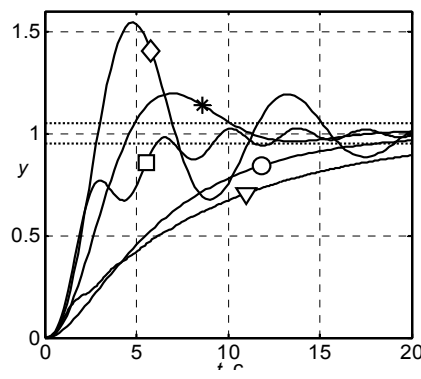


Рис. 4. Перехідні функції

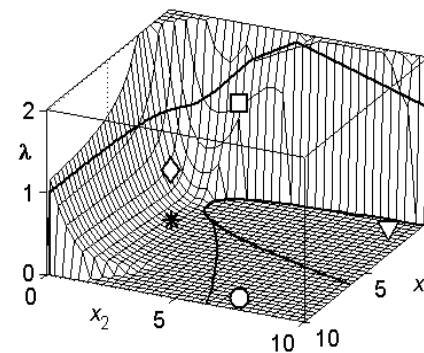


Рис. 7. Загасання коливань

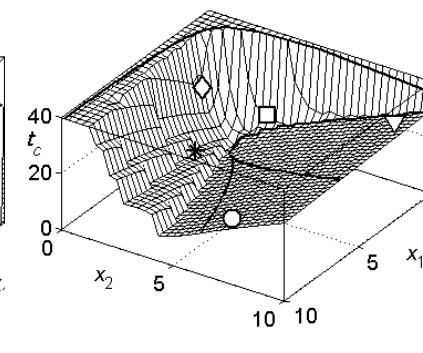


Рис. 8. Час регулювання

**Висновки.** Проведені дослідження дозволяють зробити висновки.

1. Приведені формули обчислення показників відхилення і коливальності за масивами екстремумів перехідної і вагової функцій систем керування.
2. Результати показують перспективність застосування прямих показників якості для систем високого порядку, зокрема для систем автоматичного керування з розподіленими параметрами.
3. Експериментально встановлено, що зміна кроку інтегрування не ефективна, матричний метод оптимальний для за точністю і швидкодією.

**Список джерел інформації:** 1. Северин В. П. Моделі і методи оптимізації показників якості систем автоматичного управління енергоблоку атомної електростанції: Автореф. дис. д-ра техн. наук: 20.09.07 / НТУ «ХП». – 2007. – 35 с. 2. Солодовников В. В., Плотников В. Н., Яковлев А. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с. 3. Ланс Дж. И. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин: Пер. с англ. – М.: Изд. иностр. лит-ры, 1962. – 200 с. 4. Christiansen J. Algorithm 77. Solving a system of simultaneous ordinary differential equations of the first order using a method for automatic step change. // The Computer Journal. – 1973. – V. 16. – N. 2. – 187-188.p. 5. Гринченко Н. П., Штейнвольф Л. И. Применение одношаговых численных методов для исследования переходных процессов в механических системах // Динамика и прочность машин. – Харьков: Вища школа, 1974. – Вып. 20. – С. 11-17.. 6. Королев В. К. Сравнение некоторых методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные системы. – 1975. – Вып. 64. – С. 108-117. 7. Веников В. А., Погосян Т. А. Автоматическое изменение шага интегрирования при расчетах длительных переходных процессов в электроэнергетических системах // Изв. вузов. Энергетика. – 1984. – № 3. – С. 3-7. 8. Зайцев Г. Ф., Бурсов Г. В. Система автоматического управления магнитным подвесом с дифференциальной связью // Электроника и связь. – 2006. – №1. – Часть. 1. – С. 26-39.

Надійшла до редколегії 08.01.09

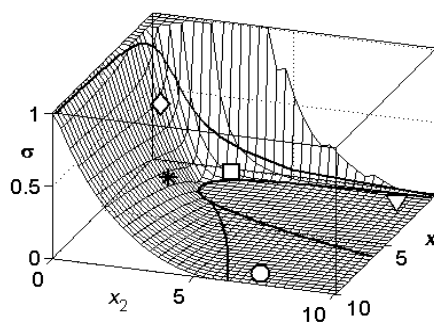


Рис. 5. Перерегулювання

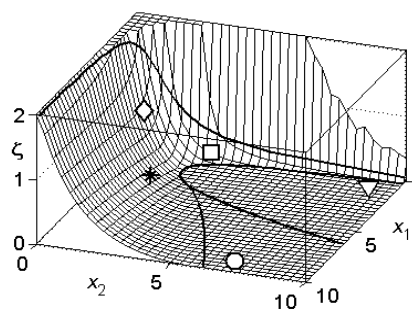


Рис. 6. Розмах коливань