объем выборки, что позволит точнее оценить параметры модели, однако это не всегда возможно. Во-вторых, можно уточнить саму модель путем добавления в нее корректирующего компонента. Именно второй подход был выбран автором для уточнения модели динамики образовательного состава населения. Уточнение модели осуществлялось методом динамической фильтрации, при котором адаптация модели осуществляется рекуррентно при получении каждой новой точки ряда. В качестве метода адаптивной фильтрации был выбран фильтр Калмана, предназначенный для рекурсивного дооценивания вектора состояния априори известной динамической системы. При данном методе для уточнения прогноза используется априорная информация о самой модели. Метод динамической фильтрации Калмана позволяет «обучать» и уточнять модель на каждом новом шаге прогнозирования, тем самым повышая точность прогноза.

Таким образом, уточненная с помощью фильтра Калмана модель имеет вид:

$$\hat{\bar{x}}(t+1) = \bar{x}(t+1) + K_{t+1}\tilde{y}_{t+1} = [F(t)A(t) + B(t)]\bar{x}(t) + K_{t+1}\tilde{y}_{t+1}.$$

Здесь K_{t+1} - оптимальный по Калману коэффициент усиления, $\tilde{y}_{t+1}$ - математическая невязка прогнозного значения вектора состояний относительно измерений. После получения данных о реальном значении прогнозируемого вектора состояний модель прогноза уточняется путем расчета невязки прогнозного и действительного значений. Такой подход позволяет модели прогнозирования «обучаться» на каждом новом шаге прогноза, что позволяет повысить точность и достоверность прогноза численности учащихся общеобразовательных учебных заведений.

Заключение. Выбранная и уточненная методом динамической фильтрации модель позволит определить перспективы изменения численности учащихся, а также на основании полученных результатов необходимое в соответствии с предполагаемыми изменениями число учебных заведений, учителей, учебной литературы и т.д., что позволит планировать затраты на сферу общего среднего образования, которые должны быть заложены в районный и областной бюджет.

Список литературы: ***1.*** *Медков В.М.* Демография: Учебное пособие. Серия «Учебники и учебные пособия» - Ростов-на-Дону: Феникс, 2002. ***2.*** *Шелестов Д.К.* Демография: история и современность - М., 1993. ***3.*** *Вишневский А.Г.* Воспроизводство населения и общество: История, современность, взгляд в будущее - М., 1982. ***4.*** *Бахметова Г.Ш.* Современные методы демографического прогнозирования - М., 1999. ***5.*** *Тихомиров Н.П.* Демография. Методы анализа и прогнозирования – М.: - Издательство «Экзамен», 2005. ***6.*** *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачева – М.: - Издательство «Логос», 2006. ***7.*** *Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.* Случайные процессы – М., 1999.

Поступила в редколлегию 08.12.08

УДК 519.681

О.В.СЕРАЯ, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПИ»

ДВУХКРИТЕРИАЛЬНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Запропоновано метод отримання Парето-оптимальної безлічі розв'язань транспортної задачі по критеріях «сумарна вартість – максимальний час перевезень», яка забезпечує вибір компромісного розв'язання.

Предложен метод получения Парето-оптимального множества решений транспортной задачи по критериям «суммарная стоимость – максимальное время перевозок», которое обеспечивает выбор компромиссного решения.

The method of receipt Pareto - optimum great number of decisions of a transport task which provides the choice of compromise decision on criteria a «total cost - maximal time of transportations» is offered.

Введение. В практике планирования и организации транспортировок грузов традиционно используются две разные математические модели: транспортная задача по критерию стоимости (при этом минимизируется суммарная стоимость перевозок) и транспортная задача по критерию времени (при этом минимизируется максимальная из продолжительностей перевозок). Эти задачи альтернативны в том смысле, что их оптимальные планы, как правило не совпадают (кратчайший по времени маршрут не обязательно самый дешевый). Технологии решения этих задач хорошо отработаны [1-3] и конструктивно учитывают специфику и особенности постановок каждой из них. По этой причине они принципиально различны и их объединение в единую вычислительную процедуру очень проблематично. Вместе с тем при решении практических задач транспортной логистики возникает потребность в решении, например, таких задач: а) найти план перевозок, минимизирующий суммарную стоимость перевозок при условии, что наибольшая продолжительность из них не превосходит заданную; б) найти план транспортировок, минимизирующий максимальную из продолжительностей перевозок, при условии, что их суммарная стоимость не превосходит заданную. Разработка метода решения таких задач представляет теоретический и практический интерес.

Цель статьи - разработка технологии отыскания компромиссного решения транспортных задач линейного программирования по критериям – суммарная стоимость и максимальная продолжительность транспортировки.

Постановка задачи. Пусть имеется m центров – поставщиков груза и n центров его потребления. При этом заданы:

a_i - объем груза, который нужно перевезти от i -го поставщика;

b_j - объем груза, который нужно привезти к j -му потребителю;

c_{ij} - стоимость перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю;

t_{ij} - продолжительность соответствующей транспортировки.

Введем набор $X = (x_{ij})$, где

x_{ij} - объем груза, планируемого для перевозки от i-го поставщика к j-му потребителю, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$.

Сформулируем критерии эффективности плана транспортировок X:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} , \tag{1}$$

$$T(X) = \max_{i,j} \{ t_{ij} \cdot \delta(x_{ij}) \}, \tag{2}$$

$$\delta(x_{ij}) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_{ij} = 0, \\ 1, \text{ если } x_{ij} > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Искомый план транспортировок должен удовлетворять ограничениям:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \ i = 1,2,...,m , \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \ j = 1,2,...,n , \tag{5}$$

$$x_{ij} \geq 0 , \ i = 1,2,...,m , \ j = 1,2,...,n . \tag{6}$$

При этом предполагается, что выполняется условие баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

и, кроме того, продолжительность транспортировки от i-го поставщика к j-му потребителю не зависит от объема перевозки x_{ij}, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$.

Поставим задачу разработки метода отыскания плана транспортировок $X = (x_{ij})$, удовлетворяющего ограничениям (4) – (6) и компромиссно минимизирующего критерии (1), (2).

Основные результаты. Рассмотрим следующую итерационную процедуру решения задачи.

Итерация 1. С использованием стандартных методов решается транспортная задача по критерию стоимости:

найти план $X = (x_{ij})$, минимизирующий (1), удовлетворяющий ограничениям (4) – (6) и, кроме того, дополнительному ограничению

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij}^{(1)} , \tag{7}$$

$$h_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 0, \ t_{ij} > t_{\max}^{(1)} = \max_{i,j} \{ t_{ij} \}, \\ M , \ t_{ij} \leq t_{\max}^{(1)}, \end{cases} \tag{8}$$

$$M = max \left\{ \max_i a_i , \max_j b_j \right\} . \tag{9}$$

Условие (7) фактически не накладывает никаких ограничений на искомый план, так как, в соответствии с (8) $h_{ij}^{(1)} \equiv M$, причем M достаточно велико.

Пусть $X^{(1)} = (x_{ij}^{(1)})$ - решение задачи (1), (4) – (9). Рассчитаем

$$t_{max}^{(2)} = \max_{(i,j) \in N^{(1)}} \{ t_{ij} \}, \ \ N^{(1)} = \{ (i,j) : x_{ij}^{(1)} > 0 \}.$$

Понятно, что значение $t_{max}^{(2)}$ определяется самой продолжительной из ненулевых транспортировок, соответствующих плану $X^{(1)}$. Зададим теперь

$$h_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 0, \ t_{ij} > t_{max}^{(2)}, \\ M , \ t_{ij} \leq t_{max}^{(2)}, \end{cases} \tag{10}$$

и введем ограничение

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij}^{(2)} , \ i = 1,2,...,m , \ j = 1,2,...,n . \tag{11}$$

Первая итерация завершена.

Итерация 2. Вновь решается транспортная задача: найти план $X = (x_{ij})$, минимизирующий (1) и удовлетворяющий ограничениям (4) - (6), (11). Понятно, что ограничение (11), заменившее виртуальное ограничение (8), запрещает использовать в новом плане транспортировок те из них, продолжительность реализации которых превосходит $t_{max}^{(2)}$. В результате решения задачи получаем новый план $X^{(2)} = (x_{ij}^{(2)})$, с использованием которого находим

$$t_{max}^{(3)} = \max_{(i,j) \in N^{(2)}} \{ t_{ij} \}, \ \ N^{(2)} = \{ (i,j) : x_{ij}^{(2)} > 0 \} \cup N^{(1)} ,$$

$$h_{ij}^{(3)} = \begin{cases} 0, \ t_{ij} > t_{max}^{(3)}, \\ M, \ t_{ij} \le t_{max}^{(3)}, \end{cases}$$

обеспечивающих формирования нового ограничения

$$0 \le x_{ij} \le h_{ij}^{(3)}, \ i = 1,2,...,m, \ j = 1,2,...,n.$$

Вторая итерация завершена.

Последующие итерации во всем повторяют уже описанные, за исключением правила коррекции соотношений, используемых при формировании дополнительного ограничения. После проведения k итераций, перед очередной $(k+1)$-й итерацией вычисляются

$$t_{max}^{(k+1)} = \max_{(i,j)\in N^{(k)}} \{t_{ij}\}, \quad N^{(k)} = \{(i,j) : x_{ij}^{(k)} > 0\} \cup N^{(k-1)}, \tag{12}$$

$$h_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} 0, \ t_{ij} > t_{max}^{(k+1)}, \\ M, \ t_{ij} \le t_{max}^{(k+1)}, \end{cases} \tag{13}$$

и задается новое ограничение

$$0 \le x_{ij} \le h_{ij}^{(k+1)}, \ i = 1,2,...,m, \ j = 1,2,...,n. \tag{14}$$

Процедура продолжается до тех пор, пока после проведения очередной, например, q-й, итерации число разрешенных элементов плана не станет меньше минимально возможного, равного $m+n-1$.

В результате реализации этой процедуры получим совокупность пар:

$$\left(L\left(X^{(1)}\right), t_{max}^{(1)}\right), \left(L\left(X^{(2)}\right), t_{max}^{(2)}\right), ..., \left(L\left(X^{(q)}\right), t_{max}^{(q)}\right). \tag{15}$$

Легко показать, что эта совокупность точек образует Парето-оптимальное множество, то есть для произвольной точки $\left(L\left(X^{(k)}\right), t_{max}^{(k)}\right)$ из этого множества не существует какой-либо другой минорирующей точки $\left(L\left(X^{(l)}\right), t_{max}^{(l)}\right)$ такой, что одновременно выполняются неравенства

$$L\left(X^{(l)}\right) < L\left(X^{(k)}\right),$$
$$t_{max}^{(l)} < t_{max}^{(k)}. \tag{16}$$

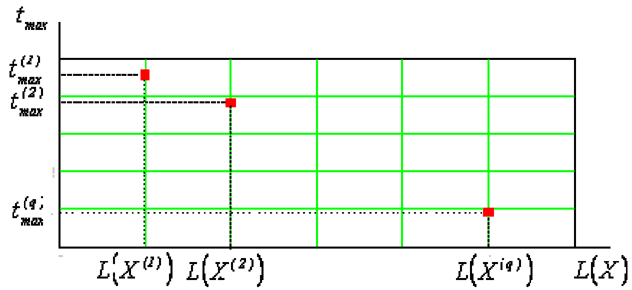
Действительно, описанная выше процедура формирования точек из совокупности (15) такова, что для всех $l < k$

$$L\left(X^{(l)}\right) \le L\left(X^{(k)}\right), \ t_{max}^{(l)} \ge t_{max}^{(k)}. \tag{17}$$

Напротив, для всех $l > k$ имеет место

$$L\left(X^{(l)}\right) \ge L\left(X^{(k)}\right), \ t_{max}^{(l)} \le t_{max}^{(k)}. \tag{18}$$

Таким образом, обязательное выполнение неравенств (17) и (18) для всех $l \ne k$ исключает возможность реализации (16). Графическое отображение Парето-оптимального множества (15) представлено на рисунке.



Парето-оптимальное множество решений задачи.

Понятно, что более полное Парето-оптимальное множество будет получено, если на каждой итерации из матрицы возможных назначений исключать элемент, для которого продолжительность перевозки является максимальной. При этом решение транспортной задачи по критерию стоимости приведет к плану, на котором суммарная стоимость перевозок будет не лучше, а максимальная продолжительность перевозок – не хуже, чем на предыдущей итерации.

Выводы. Таким образом, предложен метод решения двухкритериальной транспортной задачи. Описанная процедура позволяет отыскивать любое из альтернативных решений: а) план перевозок, обеспечивающий минимальную суммарную стоимость перевозок при условии, что продолжительность максимальной из них не превосходит заданную; б) план, минимизирующий максимальную из продолжительностей перевозок при условии, что суммарная их стоимость не превосходит заданную.

Список литературы: ***1.*** *Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа / *Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн.* – М.: Наука, 1969. – 384с. ***2.*** *Вагнер Г.* Основы исследования операций / *Г. Вагнер*. Т.1.: пер. с англ. – М.: МИР, 1972. – 335с. ***3.*** *Раскин Л.Г.* Многоиндексные задачи линейного программирования / *Л.Г. Раскин., О.И. Кириченко.* – М.: Радио и связь, 1982. – 240с.

Поступила в редколлегию 19.01.09