УДК 519.5:681:513

А.А. ПАВЛОВ, д-р техн. наук, проф. каф. АСОИУ НТУУ «КПИ»,
А.А. ИВАНОВА, аспирантка НТУУ «КПИ»,
А.В. ЧЕХОВСКИЙ, студент НТУУ «КПИ

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

В статті пропонується точний метод відновлення функції прийняття рішення з використанням модифікованого методу аналізу ієрархій. Метод запропоновано для випадку, коли є можливість реалізації обмеженого активного експерименту.

В статье предлагается точный метод восстановления функции принятия решения с использованием модифицированного метода анализа иерархий. Метод предложен для случая, когда есть возможность реализации ограниченного активного эксперимента.

Precise method of decision making function restoration with the use of modified analytic hierarchy process is proposed in the article. The method is proposed for the case, when there is a possibility of the limited active experiment realization.

Рассмотрим следующую задачу принятия решений. Глобальная цель имеет качественное описание и не формализована. Имеется набор альтернатив $A_1 ... A_m$. Нужно найти наилучшую альтернативу с точки зрения глобальной цели. Для подобных задач обычно используется метод анализа иерархий Саати [1-5]. В [6-8] сформулированы и обоснованы модели оптимизации, существенно расширяющие возможности метода анализа иерархий Саати [1-5], что позволило сформулировать и предложить решение задачи построения функции, которая аппроксимирует качественно заданную глобальную цель.

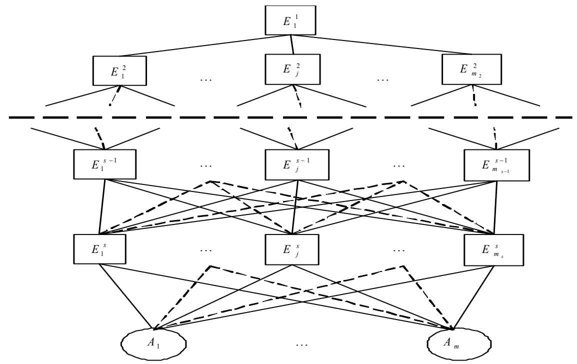
Предложенный в [9] метод решения этой задачи органично объединил в единое целое метод группового учета аргументов [10-11] и метод анализа иерархий Саати.

Показано, что с использованием модифицированного метода анализа иерархий [6-8], а так же нормированных ортогональных полиномов [12-13] можно эффективно восстанавливать функцию принятия решений в случае ограниченного активного эксперимента.

Рассмотрим эту задачу более подробно. Пусть произвольная альтернатива A_i однозначно задается m-мерным вектором $\overline{u}^i$ с действительными неотрицательными коэффициентами, i-я компонента вектора $\overline{u}$ - это значение i-го критерия, характеризующего альтернативу A. Таким образом, неизвестная глобальная функция цели $f(A) = f(\overline{u})$ задана значениями $f(A_l) = f(\overline{u}^l), l = \overline{1, L}$ где $f(\overline{u}^l)$ - это результирующий вес

$E_1^1(A_l)$ альтернативы A_l, полученной с помощью метода анализа иерархий (МАИ) [1-5] либо с помощью модифицированного метода анализа иерархий (ММАИ) [6-8].

Заложенный в МАИ принцип идентичности и декомпозиции предусматривает структурирование проблем в виде иерархии или сети. [1-5]



Пример иерархического представления задачи

В представленной на рисунке задаче имеем m альтернатив $A_1,..., A_m$ и s уровней критериев E_j^i, $i = \overline{1, s}$ $j = \overline{1, m_i}$

Если все матрицы парных сравнений хорошо обусловлены, то можно считать, что $E_1^1(A_l)$ практически точно задает $f(\overline{u}^l)$. Если это не так, то использование ММАИ позволяет получить эффективные [6-8] оценки $E_1^1(A_l)$, которые можно представить как $f(\overline{u}^l) + \delta_l$, где δ_l – погрешность, интерпретируется как реализация случайной величины с неизвестным распределением и ограниченной, но неизвестной дисперсией.

Павлов А.А. и Чеховский А.В. в [12] предложили эффективную процедуру построения многомерной полиномиальной регрессии с использованием нормированных ортогональных полиномов [13].

Очевидно, что эти результаты не могут быть непосредственно использованы в нашем случае. Однако Павловым А.А. и Чеховским А.В. была эффективно решена задача для случая циклически повторяющихся входных воздействий, что позволяет использовать этот метод в нашем случае.

Так как различные альтернативы A_l в общем случае не могут генерироваться произвольными неотрицательными векторами $\overline{u}$, перейдем от представления $f(A) = f(\overline{u})$ к представлению $f(A) = \hat{f}(\overline{x})$, где $\overline{x}$ – n-мерный действительный вектор ($n < m$), $\bar{x} = B\bar{u}$. Компоненты вектора $\bar{x}$ интерпретируются как агрегированные характеристики альтернативы A.

Пусть известно избыточное описание функции $\hat{f}(\bar{x})$:

$$\hat{f}(\bar{x}) = \sum_{\forall (i_1 \ldots i_t) \in K} \sum_{\forall (j_1 \ldots j_t) \in K(i_1 \ldots i_t)} b_{i_1 \ldots i_t}^{j_1 \ldots j_t} (x_{i_1})^{j_1} \cdot (x_{i_2})^{j_2} \ldots (x_{i_t})^{j_t}, \qquad (1)$$

где $\bar{x} = (x_1 \ldots x_n)^{-1}$ - детерминированный вектор входных переменных, x_i – i-я компонента вектора $\bar{x}$; $b_{i_1 \ldots i_t}^{j_1 \ldots j_t}$ - неизвестные коэффициенты, j_l - натуральные числа, j_l, i_l - натуральные индексы из множества $\{1, \ldots, n\}$;

При фиксированных значениях произвольных *n-1* компонент вектора $\bar{x}$ (1) является степенным полиномом от оставшейся переменной, и пусть P – максимальная степень полинома от одной переменной в соответствии с (1). Пусть компоненты вектора $\bar{x}$ (агрегированные характеристики альтернативы A) позволяют генерировать альтернативы по следующему правилу: можно зафиксировать в необходимом количестве [14] значения произвольных *n-1* компонент вектора $\bar{x}$ и оставшуюся компоненту изменять в количестве, не меньше, чем P раз. Таким образом, варьируются L альтернатив A_l, представляемые агрегированными векторами $\bar{x}^l$, $l = \overline{1, L}$. L должно быть не меньше, чем число неизвестных коэффициентов в представлении (1).

Пусть каждая альтернатива представляется экспертом, и значения агрегированных весов $E_1^1(A_l), l = \overline{1, L}$ найдены с помощью ММАИ по плохообусловленным матрицам парных сравнений. Тогда модель (1) представляем в виде

$$\hat{f}(\bar{x}^t) = \sum_{\forall (i_1 \ldots i_t) \in K} \sum_{\forall (j_1 \ldots j_t) \in K(i_1 \ldots i_t)} b_{i_1 \ldots i_t}^{j_1 \ldots j_t} (x_{i_1})^{j_1} \cdot (x_{i_2})^{j_2} \ldots (x_{i_t})^{j_t} + E(t), \qquad (2)$$

$E(t)$ - случайная величина с нулевым математическим ожиданием и ограниченной неизвестной дисперсией (либо известной ее верхней оценкой $\delta(t)$), t – номер эксперта по данным которого построены все матрицы парных сравнений в ММАИ. Модель (2) является избыточной – возможно некоторые из коэффициентов $b_{i_1 \ldots i_t}^{j_1 \ldots j_t}$ равны нулю. Для удобства дальнейшего изложения линию регрессии модели представим иначе:

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{\forall (i_1 \ldots i_t) \in K_l} \sum_{\forall (j_1 \ldots j_t) \in K_l(i_1 \ldots i_t)} b_{i_1 \ldots i_t}^{j_1 \ldots j_t} (x_{i_1})^{j_1} \cdot (x_{i_2})^{j_2} \ldots (x_{i_t})^{j_t}. \qquad (3)$$

Составляющее

$$\sum_{\forall (i_1 \ldots i_t) \in K_1} \sum_{\forall (j_1 \ldots j_t) \in K_1(i_1 \ldots i_t)} b_{i_1 \ldots i_t}^{j_1 \ldots j_t} (x_{i_1})^{j_1} \cdot (x_{i_2})^{j_2} \ldots (x_{i_t})^{j_t} \qquad (4)$$

содержит все слагаемые из (2), в каждое из которых входит компонента x_1, а составляющие

$$\sum_{\forall (i_1 \ldots i_t) \in K_l} \sum_{\forall (j_1 \ldots j_t) \in K_l(i_1 \ldots i_t)} b_{i_1 \ldots i_t}^{j_1 \ldots j_t} (x_{i_1})^{j_1} \cdot (x_{i_2})^{j_2} \ldots (x_{i_t})^{j_t}, \quad l = \overline{2, n} \qquad (5)$$

содержат все слагаемые из (2), в каждое из которых входит компонента x_l, за исключением тех составляющих, которые вошли в (4) и (5) для $\forall (i_1 \ldots i_t) \in K_m \; \forall (j_1 \ldots j_t) \in K_m(i_1 \ldots i_t), m = \overline{1, l-1}$.

Тогда можно использовать модифицированный метод построения коэффициентов модели (2) [13,14], предложенный Павловым А.А., Чеховским А.В. для случая циклически повторяющихся множеств значений входных данных. В этом случае для построения каждой одномерной регрессии [12,14] будет столько повторяющихся множеств входных переменных, сколько экспертов будут последовательно оценивать сгенерированные альтернативы при фиксированных *n-1* компонент вектора $\bar{x}$. При этом предполагается, что эксперты совершают ошибки не зависимо друг от друга и от рассматриваемых альтернатив с постоянной дисперсией для всех экспертов. Дисперсии могут отличатся только для различных наборов зафиксированных *n-1* переменных.

Примечание 1. Пусть все матрицы парных сравнений являются хорошо обусловленными. Тогда неизвестная функция $\hat{f}(\bar{x})$ задается моделью (1). В этом случае наша задача не может рассматриваться как обычная задача интерполяции. Действительно, использование симплекс-метода или метода наименьших квадратов может привести к существенным ошибкам оценок неизвестных коэффициентов. В этом случае построенную функцию принятия решений нельзя использовать для оценки произвольных альтернатив без привлечения эксперта.

Для точного восстановления функции принятия решений по избыточному описанию (1) авторы предлагают использовать следующую модификацию описанного выше метода.

Задача восстановления одномерных регрессий превращается в задачу восстановления степенных полиномов от одной переменной по избыточным эмпирическим данным. Предлагается их восстанавливать применяя формальную процедуру метода наименьших квадратов на нормированных ортогональных полиномах [13], но по имеющимся экспериментальным данным. При этом восстанавливается полином степени не более чем число экспериментов минус один. Модель избыточная, однако, соответствующие нули восстанавливаются точно.

В случае, когда матрица парных сравнений хорошо обусловлена, достаточно информации полученной от одного эксперта.

Матрицы парных сравнений в МАИ строятся только для альтернатив, необходимых для построения каждой одномерной регрессии. В приведенном ниже примере число таких альтернатив не превышает четырех.

Пример.

Пусть имеется набор альтернатив A_i, каждая из которых задается шестимерным вектором $\bar{u}^i$. С помощью линейного преобразования перейдем к представлению альтернативы A_i в виде трехмерного вектора агрегированных компонент.

Пусть эксперты предполагают, что избыточное описание функции принятия решений является полиномом от трех (агрегированных) переменных и имеет следующий вид:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 + a_6x_1^2x_2 + a_7x_1x_3 + a_8x_2^2x_3^2 + a_9x_1x_2x_3\,,$$

где $a_0, a_1, a_2, ..., a_9$ - неизвестные коэффициенты линии регрессии. Истинная функция принятия решений имеет вид:

$$y = 30 + 10x_1 + 50x_2 + 7x_3 + 36x_1x_2 + 19x_2^2 + 4x_1^2x_2 + 66x_1x_3 + 0x_2^2x_3^2 + 0x_1x_2x_3\,.$$

Для каждой одномерной регрессии число оцениваемых проектов равно трем.

В этом примере $K_1 = \{1;1,2;1,3;1,2,3\}$; $K_1(1) = 1$; $K_1(1,2) = \{1,1;2,1\}$; $K_1(1,3) = \{1,1\}$; $K_1(1,2,3) = \{1,1,1\}$. Аналогично определяются все $K_l, K_l(i_1,...i_t), l = \overline{2,3}$.

Для переменной x_1 последовательно фиксируются 4 пары значений x_2, x_3, и для каждой из них восстанавливается одномерная регрессия от переменной x_1, коэффициенты которой позволяют составить систему из четырёх равенств для нахождения коэффициентов a_1, a_4, a_7, a_9 (коэффициенты при x_1 в первой степени) и одно равенство для нахождения a_6 (коэффициент при x_1 во второй степени).

Для переменной x_2 последовательно фиксируются 2 пары значений x_1, x_3, и для каждой из них восстанавливается одномерная регрессия от переменной x_2. Составляется равенство для нахождения коэффициента a_2, а также система из двух уравнений для нахождения a_5, a_8. Затем для переменной x_3 фиксируется пара значений x_1, x_2, и для неё восстанавливается одномерная регрессия от переменной x_3, что позволяет найти оставшийся коэффициент a_3.

Таким образом, восстановленная функция принятия решений имеет вид:

$$y = 30 + 10x_1 + 50x_2 + 7x_3 + 36x_1x_2 + 19x_2^2 + 4x_1^2x_2 +$$
$$+ 66x_1x_3 - 4.7 \cdot 10^{-16}x_2^2x_3^2 - 2 \cdot 10^{-15}x_1x_2x_3\,.$$

Примечание 2. Построение вектора $\bar{u}^l$ по фиксированному вектору $\bar{x}^l$ может быть следующим: компоненты вектора $\bar{u}^l(u_{1l},...,u_{ml})$ являются переменными следующей задачи линейного программирования

$$\min c^T\bar{u}^l,$$
$$\bar{x}^l = B\bar{u}^l,$$
$$A_l\bar{u}^l \le b,\ u_{il} \ge 0,\ l = \overline{1,m},$$

где A_l - это технологические матрицы ограничений, накладываемых на компоненты вектора $\bar{u}^l$, представляющего альтернативу A_l с фиксированными значениями компонент вектора агрегированных фактов $\bar{x}^l$. Линейный функционал $c^T\bar{u}^l$ – это, например, стоимость альтернативы A_l.

Список литературы: ***1***. *Saaty T.L.* Multicriteria Decision Making. The Analytic Hierarchy Process,. – New York: McGraw Hill International, 1990.- p.437. ***2***. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем: *Пер. с англ. Вачнадзе Р.Г.*: *Под ред. Ушакова И.А.* - М.: Радио и связь, 1991. – 223 с. ***3***. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий: Tomas Saaty. The Analytic Hierarchy Process. –*Пер. с англ. Вачнадзе Р.Г.* - М.: Радио и связь, 1993. – 315 с. ***4***. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. - Киев: Наукова думка. – 2002. - 381 с. ***5***. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений. — М.: Логос, 2000. 296 с. ***6***. *Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.И.* Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов в методе парных сравнений. Системні дослідження та інформаційні технології 2007р. №2. ***7***. *Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.И.* Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов объектов по неоднородным матрицам парных сравнений. Системні дослідження та інформаційні технології 2007р. №3 ***8***. *Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.Н.* Многокритериальный выбор в задаче обработки данных матрицы парных сравнений. Вісник НТУУ „КПІ" Інформатика, управління та обчислювальна техніка, Київ 2007р. №46. ***9***. *Павлов А.А., Иванова А.А., Зигура Р.А.* Метод группового учёта аргументов и анализа иерархий (МГУАиАИ) в задачах принятия решений. Вісник НТУУ „КПІ" Інформатика, управління та обчислювальна техніка, Київ 2007р. №47.-350 с. – С.205-214. ***10***. *Ивахненко А.Г., Мюллер И.А.* Самоорганизация прогнозирующих моделей. – Киев: Техніка, 1985. – 221с. ***11***. *Ивахненко А.Г., Юрачковский Ю.В.* Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. -М.: Радио и связь, 1986. -118с. ***12***. *Павлов А.А., Чеховский А.В.* Сведение задачи построения многомерной регрессии к последовательности одномерных задач // Вісник НТУУ «КПІ» Інформатика, управління та обчислювальна техніка. – 2008 р. - №48. ***13***. *Худсон Д.* Статистика для физиков. Москва, Мир, 1970. ***14***. *Павлов А.А., Чеховский А.В.* Построение многомерной полиномиальной регрессии (активный эксперимент). // Системні дослідження та інформаційні технології, Інститут прикладного системного аналізу НАН України та Міносвіти і науки України, №1 2009 р. (в печати).

Поступила в редколлегию 15.01.09