УДК 517.91

***О. Б. АХІЄЗЕР***, канд. техн. наук,
***О. Є. ПІРОТТІ***, канд. техн. наук,
***О. М. ПРОХОРОВА***, канд. фіз.-мат. наук

# МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕСТАЦІОНАРНИХ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА БАЗІ КОРРЕЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ

В статті проаналізована можливість одержання математичних моделей для кореляційних функцій стохастичних процесів, якщо ці функції задовольняють відомим диференціальним рівнянням. Крім того, за допомогою трикутних моделей операторів, що визначають нестаціонарний стохастичний процес, отримані математичні моделі для інфінітезимальних кореляційних функцій, на базі яких можливо одержувати зображення для кореляційних функцій нестаціонарних процесів.

В статье проанализирована возможность получения математических моделей для корреляционных функций стохастических процессов, если эти функции удовлетворяют известным дифференциальным уравнениям. Кроме того, с помощью треугольных моделей операторов, которые определяют нестационарный стохастический процесс, получены математические модели для инфинитезимальных корреляционных функций, на базе которых возможно получать изображение для корреляционных функций нестационарных процессов.

In the article the possibility of receipt of mathematical models is analysed for the correlation functions of stochastic processes, if these functions satisfy the known differential equations. Besides, by the three-cornered models of operators which determine an unstationary stochastic process, mathematical models are received for infinitesimal correlative functions on the base of which it is possible to get image for the correlation functions of unstationary processes.

Розглянемо випадковий процес $x(t)$ як криву в гільбертовом просторі *H*, відтворюючим ядром якого є кореляційна функція $K(t,s)=\langle x(t),x(s)\rangle$ [1]. Оскільки ядро $K(t,s)$ по суті визначає криву $x(t)$ в гильбертовом просторі *H*, то характерні властивості $x(t)$ виявляються у властивостях $K(t,s)$. Вивчимо випадкові процеси $x(t)$ в $H$, породжувані завданням Коші [2]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t) \\ x(0)=z_0 \end{cases} \tag{1}$$

При певних обмеженнях на *A(t)*, які зручно формувати в термінах $K(t,s)$, можна провести аналіз випадкового процесу $x(t)$. У прикладних завданнях часто приходять до рівнянь в приватних похідних для кореляційної функції $K(t,s)$. У зв'язку з цим представляють інтерес класи нестаціонарних еволюційно уявних випадкових процесів, що породжуються рівняннями для



кореляційної функції, при цьому для оператора $A(t)$ виходять нелінійні еволюційні операторні рівняння. Вирішення цих рівнянь в явному вигляді дозволяє отримувати нові спектральні розкладання окремих класів нестаціонарних випадкових кривих.

Якщо кореляційна функція задовольняє рівнянню $\frac{\partial^2 K}{\partial t\partial s}-aK=0$, де $a$ – дійсна постійна величина. Обчислимо виставу для функції $\frac{\partial^2 K}{\partial t\partial s}$ коли випадковий процес має вигляд $x(t)=e^{iAt}x(0)$:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t\partial s}=\left\langle iAe^{itA}x_0, iAe^{isA}x_0\right\rangle \tag{2}$$

Оскільки для всякого обмеженого лінійного оператора $A$ існує єдиний спряжений до оператора $A$ оператор $A^*$, такий, що при будь-яких $x(t)$ і $x(s)$ виконується рівність:

$$\langle Ax(t),x(s)\rangle=\langle x\langle t\rangle, A^*x(s)\rangle, \tag{3}$$

для виразу кореляційної функції $K(t,s)$ маємо:

$$\left\langle \left(A^*A-aI\right)x(t),x(s)\right\rangle=0\,. \tag{4}$$

Оскільки не існує функції, ортогональної всім функціям системи $\{x(s)\}_s$ в просторі, то ця система функцій є повною в даному просторі. Отже, для виконання умови (4) необхідно щоб:

$$A^*A-aI=0\,. \tag{5}$$

Якщо $l_0$ є власним значенням оператора $A$ кратності $v_0$, то $\overline{l_0}$ – власне значення сопряженого оператора $A^*$ тієї ж кратності. Тоді:

$$A\left(A^*x(t)\right)=A\left(\overline{l_0}x(t)\right)=\overline{l_0Ax(t)}=\overline{l_0}\,l_0x(t)=|l_0|^2x(t).$$

Таким чином, спектр оператора $A^*A$ лежить на позитивної піввісі і рівняння (5) може мати рішення лише при $a\ge 0$, причому якщо $a=0$, то оператор $A=0$ (в цьому випадку кореляційна функція $K(t,s)=const$ ).

Введемо новий оператор $\hat{A}$:

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{a}} A. \qquad (6)$$

Оператор $\hat{A}$ відображає простір $L^2[0,2p]$ на весь простір $L^2[0,2p]$ цілком, тобто оператор є унітарним. Будь-який унітарний оператор допускає спектральне розкладання [3]

$$\hat{A} = \int_0^{2p} e^{il} dE_l \,, \qquad (7)$$

де $\{x_l\}$ – спектральне сімейство, задане на відрізку $0 \le l \le 2p$ .

Тепер можливо знайти явний вигляд стохастичного процесу в термінах спектрального розкладання оператора $A$ :

$$x(t) = e^{itA} x_0 = e^{it\sqrt{a}\,\hat{A}} x_0 .$$

Скористаємося розкладанням експоненти в ряд Тейлора [3]:

$$e^{it\sqrt{a}\,\hat{A}} x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(it\sqrt{a}\,\hat{A}\right)^n}{n!} x_0 . \qquad (8)$$

Тепер з'ясуємо який вигляд має оператора $\left(\hat{A}\right)^n$. У загальному випадку, хай оператор $U$ – унітарний оператор в просторі $L^2[0,2p]$. Розглянемо розбиття відрізання $[0,2p]$ точками $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 2p$ , що задовольняє умові $|y_k - y_{k-1}| \le e$ . Виберемо в кожному з інтервалів $(y_{k-1}, y_k)$ довільну точку $j_k$. Із визначення спектральної функції виходить, що оператори $E_{y_k} - E_{y_{k-1}}$ для будь-якого інтервалу $(y_k, y_{k-1})$ є оператори проектування [4]. Оскільки інтервали $(y_k, y_{k-1})$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ попарно не перетинаються, то $\left(E_{y_k} - E_{y_{k-1}}\right)\left(E_{y_j} - E_{y_{j-1}}\right) = 0, k \ne j.$

Таким чином, проекційні оператори взаємно ортогональні, тому для будь-якого цілого $r \ge 0$

$$\sum_{k=1}^{n} e^{irjk}\left(E_{y_k} - E_{y_{k-1}}\right) = \left[\sum_{k=1}^{n} e^{ijk}\left(E_{y_k} - E_{y_{k-1}}\right)\right]^r \Rightarrow U^r,$$



$$\sum_{k=1}^{n} e^{-irj_k}\left(E_{y_k} - E_{y_{k-1}}\right) = \left[\sum_{k=1}^{n} e^{-ij_k}\left(E_{y_k} - E_{y_{k-1}}\right)\right]^r \Rightarrow \left(U^+\right)^r = U^{-r},$$

отже $\int_0^{2p} e^{inj} dE_j = U^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Скористаємося отриманою формулою і повернемося до виразу (8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(it\sqrt{a}\,\hat{A}\right)^n}{n!} x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2p} \frac{\left(it\sqrt{a}\,e^{il}\right)}{n!} dE_l x_0 = \int_0^{2p} e^{it\sqrt{a}\,e^{il}} dE_l x_0 .$$

Позначимо

$$j(t, l) = \int_0^{2p} e^{it\sqrt{a}\,e^{il}} dE_l x_0 . \qquad (9)$$

Тоді $K(t,s) = \langle j(t, l), j(s, l)\rangle_{L^2_{[0,2p]}}$ .

У просторі скалярний добуток обчислюється за формулою $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ . Значить,

$$K(t,s) = \int_0^{2p} j(t, l)\overline{j(s, l)}dF(l) = \int_0^{2p} e^{it\sqrt{a}\,e^{il} - is\sqrt{a}\,e^{-il}} dF(l),$$

де $F(l) = \langle E_l x_0, x_0\rangle$.

Враховуючи, що $e^{il} = \cos l + i\sin l$ , $e^{-il} = \cos l - i\sin l$ отримаємо остаточний результат: $K(t,s) = \int_0^{2p} e^{i(t-s)\sqrt{a}\cos l - i(t+s)\sqrt{a}\sin l} dF(l)$.

Покажемо, що випадок, що розглядається вище, відповідає деякому коливальному процесу. Якщо $A$ – самоспряжений оператор, що має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & iw \\ -iw & 0 \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

де $w$ – деяка постійна величина.

Тоді $x(t)=\{f_1(t),\ f_2(t)\}$- двовимірний вектор в просторі $l^2$ . Координати $f_j(t)$, $(j=1,2)$ задовольняють наступній системі рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{dt}=-wf_2 \\ \dfrac{df_2}{dt}=wf_1 \end{cases}, \tag{11}$$

Система (11) може бути представлена у вигляді рівняння $-i\dfrac{dx}{dt}=Ax$ , розв'язком якого є випадковий процес $x(t)$. Якщо ввести координати $f_1=\sqrt{m}\,\dot{x}$, $f_2=\sqrt{k}\,x$ тоді $w=\sqrt{k/m}$ та ми отримуємо простий приклад – рівняння коливань осцилятора: $m\ddot{x}+kx=0$ .

Оскільки, оператора $A$ ввели як самоспряжений оператор, той вираз прийме вигляд

$$A^2-aI=0\,. \tag{12}$$

Підставляючи у вираз (12) виставу для оператора $A$ (10) отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & iw \\ -iw & 0 \end{pmatrix}^2-aI=\begin{pmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix}-aI=\left(w^2-a\right)I=0\,.$$

Отже $a=w^2$. Тоді кореляційна функція даного випадкового процесу задовольняє рівнянню $\dfrac{\partial^2 K(t,s)}{\partial t\partial s}-\dfrac{k}{m}K(t,s)=0$ .

Якщо $K(t,s)$ задовольняє рівнянню

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)K(t,s)=0\,. \tag{13}$$

Для ермітової позитивності функції $K(t,s)$ припустимо, що $A(t)=iA$. Для випадкового процесу $x(t)$ маємо:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}=\left\langle\left(\frac{dA(t)}{dt}+A^2(t)\right)x(t),x(s)\right\rangle,\ \frac{\partial^2 K}{\partial s^2}=\left\langle x(t),\left(\frac{dA(s)}{ds}+A^2(s)\right)x(s)\right\rangle$$

Тоді отримуємо співвідношення



$$\left\langle\left(\frac{dA}{dt}+A^2(t)\right)x(t),x(s)\right\rangle=\left\langle x(t),\left(\frac{dA}{ds}+A^2(s)\right)x(s)\right\rangle. \tag{14}$$

Позначаючи $B(t)=\dfrac{dA(t)}{dt}+A^2(t)$, отримуємо

$$\langle B(t)x(t),x(s)\rangle=\langle x(t),B(s)x(s)\rangle\,.$$

У тому випадку, коли $B(t)$ не залежить від $t$ , з (14) витікає, що $B=B^*$ , а для $A(t)$ одержуємо операторне рівняння Ріккаті: $\dfrac{dA}{dt}+A^2=B$. Для випадкового процесу $x(t)$ отримуємо диференціальне рівняння другого порядку із постійним операторним коефіцієнтом $x''(t)=Bx(t)$.

Якщо скористатися спектральним розкладанням і шукати вирішення рівняння у вигляді

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty} j(t,l)\,dE_l\ ,$$

то для функції $j$ отримуємо скалярне рівняння Ріккаті [4]

$$\frac{dj}{dt}+j^2=l$$

розв'язок якого має вигляд $j(t,l)=\sqrt{l}\,th\sqrt{l}\,t$ і, отже

$$A(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{l}\,th\sqrt{l}\,t\,dE_l\ ,$$

а для випадкового процесу $x(t)$ одержуємо спектральний вигляд

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} ch\sqrt{l}\,t\,dz(l),$$

де $dz(l)=dE_l x_0$, тобто $z(t)$ – стандартна крива в просторі $H$ з ортогональними приростами.

Для кореляційної функції $K(t,s)$ отримуємо:

$$K(t,s)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[ch\sqrt{l}\,(t-s)+ch\sqrt{l}\,(t+s)\right]dF(l),$$

де $\Delta F(l) = \langle z(l+\Delta l) - z(l), z(l+\Delta l) - z(l)\rangle$.

Якщо оператор $B(t) \geq 0$, тоді $l \in [0, +\infty)$ та для кореляційної функції $K(t,s)$ маємо

$$K(t,s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[ch\sqrt{l}\,(t-s) + ch\sqrt{l}\,(t+s)\right] dF(l).$$

Якщо оператор $B(t) \leq 0$, тоді $l \in (-\infty, 0]$ та отримуємо представлення для кореляційної функції $K(t,s)$:

$$K(t,s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\cos\sqrt{l}\,(t-s) + \cos\sqrt{l}\,(t+s)\right] d\tilde{F}(l),$$

де $\tilde{F}(l) = -F(l)$.

Розглянемо як приклад оператора, що має наступний вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & iw_1 & iw_1 \\ -iw_1 & 0 & iw_2 \\ -iw_1 & -iw_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

де $w_1, w_2$ – деякі постійні величини; $x(t) = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$ – тривимірний вектор в просторі $l^2$.

Координати, $f_j(t)$, $(j = 1,2,3)$ задовольняють наступній системі рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{dt} = -w_1(f_2(t) - f_3(t)) \\ \dfrac{df_2}{dt} = w_1 f_1(t) - w_2 f_3(t) \\ \dfrac{df_3}{dt} = w_1 f_1(t) + w_2 f_2(t) \end{cases} \tag{16}$$

Тоді

$$Ax(t) = -i\begin{pmatrix} -w_1(f_2(t) - f_3(t)) \\ w_1 f_1(t) - w_2 f_3(t) \\ w_1 f_1(t) + w_2 f_2(t) \end{pmatrix} \tag{17}$$

Через завдання системи (16), маємо матричне представлення виразу (17):



$$-i\frac{dx}{dt} = A \cdot x,$$

вирішенням якої є випадковий процес $x(t) = e^{iAt}x(0)$.

Оскільки, оператор $A(t)$ не залежить від $t$, то для оператора $B(t)$ отримуємо наступну форму:

$$B(t) = \frac{dA}{dt} + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & iw_1 & iw_1 \\ -iw_1 & 0 & iw_2 \\ -iw_1 & -iw_2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2w_1^2 & w_1w_2 & -w_1w_2 \\ w_1w_2 & w_1^2 + w_2^2 & w_1^2 \\ -w_1w_2 & w_1^2 & w_1^2 + w_2^2 \end{pmatrix}.$$

Якщо ввести координати, $f_1(t) = \dot{y}(t)$, $f_2(t) = y(t)$, $f_3(t) = h(t)$, де $h(t)$ – «білий шум», а постійним надати значення, $w_1 = \sqrt{\dfrac{T_2}{2T_1}}$, $w_2 = \sqrt{\dfrac{2}{T_1^2 T_2}}$, де $T_1$, $T_2$ - деякі постійні часу динамічної ланки, тоді диференціювання першого рядка і підстановки в неї другого і третього рядків системи (16) дає рівняння

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} = -w_1\left(\frac{df_2}{dt} + \frac{df_3}{dt}\right) = -2w_1^2 f_1 - w_1 w_2 (f_2 - f_3)$$

або

$$\ddot{y}(t) = -\frac{T_2}{2T_1^2}\dot{y}(t) + \sqrt{\frac{T_2}{2T_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{T_1^2 T_2}} h(t) - \sqrt{\frac{T_2}{2T_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{T_1^2 T_2}} y(t)$$

$$T_1^2 \ddot{y}(t) + T_2 \dot{y}(t) + y(t) = h(t),$$

що задає диференціальне рівняння динамічної ланки обуреного руху.

**Список літератури:** ***1.*** *Бродский В. М.* Об операторных узлах и их характеристических функциях.– М.: ДАН СССР, 1971. № 1. – С. 16–19. ***2.*** *Лившиц М. С., Янцевич А. А.* Теория операторных узлов в гильбертовых.– Харьков: Издательство Харьковского университета, 1971. – 160с. ***3***. *Секельфари – Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 460с. ***4***. *Кратцер А., Франц В,* Трансцендентные функции. – М., ИЛ, 1963, – 466с. ***5***. *Лившиц М. С.* Операторы, колебания, волны. – М., Наука, 1966. – 298с. **6**. *Ахиезер Е. Б., Пиротти Е. Л.* Операторный метод вычисления вероятностных характеристик случайных процессов в транспортных средствах. // Механіка та машинобудування. – Харків: Вид-во Національного технічного ун-ту «ХПІ», 2002. - №1. – С.49-56.

*Надійшла до редколегії 20.06.08*