ISSN 2079-0023 (print)
ISSN 2410-2857 (online)

УДК 519.681

Л. Г. РАСКИН, В. В. КАРПЕНКО

РАСЧЕТ РАЦИОНАЛЬНОГО ЧИСЛА КАНАЛОВ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ МНОЖЕСТВА ТЕРРИТОРИАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЁННЫХ КЛИЕНТОВ

Розглянута система масового обслуговування з марковським вхідним потоком та немарковським процесом обслуговування. Для опису цієї системи запропонований асиметричний трьох параметричний розподіл. Введено критерій ефективності системи з використанням марковської апроксимації реального закону розподілу тривалості обслуговування. Ця апроксимація основана на розподілу Ерланга другого порядку. Запропонована формула для розрахунку середньої тривалості очікування початку обслуговування. За цією формулою можна визначити раціональне число каналів обслуговування у системі, що розглядається.
Ключові слова: система масового обслуговування, марковський вхідний потік, немарковський процес обслуговування, раціональна кількість каналів обслуговування, розподіл Ерланга другого порядку, асиметричний трьох параметричний розподіл, марковська модель обслуговування, розрахунок тривалості очікування початку обслуговування.

Рассмотрена система массового обслуживания с марковским входным потоком и немарковским процессом обслуживания. Для описания этой системы предложено асимметричное трехпараметрическое распределение. Введен критерий эффективности системы с использованием марковской аппроксимации реального закона распределения продолжительности обслуживания. Эта аппроксимация основана на распределении Эрланга второго порядка. Предложена формула для расчёта средней продолжительности ожидания начала обслуживания, позволяющая определить рациональное число каналов обслуживания в рассматриваемой системеобработки данных, полученных в результате социологического опроса населения о его отношении к тем или иным партиям.
Ключевые слова: система массового обслуживания, марковский входной поток, немарковский процесс обслуживания, рациональное число каналов обслуживания, распределение Эрланга второго порядка, асимметричное трехпараметрическое распределение, марковская модель обслуживания, расчёт продолжительности ожидания начала обслуживания.

We consider the queuing system with Markov and non-Markov input flow maintenance process. For a description of the system prompted the asymmetrical three-parameter distribution. The equations to calculate the average queue length and average waiting period before the start of the service. Introduced by the criterion of effectiveness of the system using Markov approximation of the real law of distribution service duration. This approximation is based on Erlang distribution of the second order. Markov model of service offered with the use of Erlang approximation. The formula for the calculation of the average duration of waiting the start of service, allowing defining a rational number of service channels in the system.
Keywords: queuing system, Markov input flow, non–Markov process of service, rational number of service channels, Erlang distribution of the second order, asymmetrical three–parameter distribution, Markov model of service, waiting for the calculation of the duration of the service.

Введение. Развитая теория массового обслуживания позволяет решить большое число разнообразных задач оценки и повышения эффективности систем обслуживания, если заданы основные характеристики самой системы (число каналов, дисциплина обслуживания, закон распределения продолжительности обслуживания) и среды, в которой она функционирует (характеристики структуры входящего потока заявок, закон распределения интервала между заявками) [1–3]. Среди этих задач особое место занимают задачи исследования систем обслуживания в распределенной среде формирования заявок. Относящаяся к этому типу система обслуживания территориально распределённых клиентов обладает принципиальной особенностью, состоящей в том, что случайные продолжительности обслуживания каждого из них имеют разные законы распределения, параметры которых зависят от точки расположения клиента относительно центра обслуживания. Вместе с этим совокупности таких случайных величин для всего множества клиентов (особенно в ситуации, когда порядок числа клиентов – тысячи) можно интерпретировать как генеральную совокупность, статистические характеристики которой определяются по множеству реальных наблюдений. При этом процесс анализа рассматриваемой системы укладывается в стандартную схему, типичную для систем массового обслуживания [1–3]. Таким образом, получаем n-канальную систему массового обслуживания с заданным входящим потоком заявок. Заявка, поступившая на вход в момент, когда хотя бы один из каналов свободен, начинает обслуживаться немедленно. Если в этот момент все каналы заняты, то заявка становится в очередь, в которой ожидает освобождения какого–либо из каналов.

Эффективность такой системы при заданном числе каналов определяется законами распределения интервалов между заявками и продолжительности обслуживания. Для рассматриваемой конкретной системы эти законы определены путем аппроксимации гистограмм соответствующих случайных величин, полученных по результатам обработки реальных статистических данных. При этом выявлено, что закон распределения случайного интервала между заявками – пуассоновский с интенсивностью λ, зависящей от времени суток. С другой стороны, закон распределения случайной продолжительности обслуживания τ аппроксимирован трехпараметрическим распределением [3,4]

$$\varphi(\tau) = A\exp\left\{-\frac{(\tau-m)^2}{2\sigma^2}\left(1+\theta sign(\tau-m)\right)\right\}, \qquad (1)$$

где m – оценка математического ожидания случайной величины τ,

σ^2 – оценка дисперсии величины τ,

θ – оценка асимметрии распределения, $\theta < 0$,

A – нормирующий коэффициент, отыскиваемый из соотношения

$$A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\tau-m)^2}{2\sigma^2}\left(1+\theta sign(\tau-m)\right)\right\}d\tau=$$

$$=A\left[\int_{-\infty}^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\tau-m)^2}{2\frac{\sigma^2}{1-\theta}}\right\}d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{m}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\tau-m)^2}{2\frac{\sigma^2}{1+\theta}}\right\}d\tau\right]=$$

$$=A\left[\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\int_{-\infty}^{m}\frac{\sqrt{1-\theta}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\tau-m)^2}{2\frac{\sigma^2}{1-\theta}}\right\}d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1+\theta}}\int_{m}^{\infty}\frac{\sqrt{1+\theta}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\tau-m)^2}{2\frac{\sigma^2}{1+\theta}}\right\}d\tau\right]=$$

$$=A\left[\frac{\sqrt{1-\theta}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{n^2}{2}\right\}dn+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{1+\theta}}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n^2}{2}\right\}dn\right]=1.$$

Отсюда

$$A=\frac{2}{\sqrt{1-\theta}+\sqrt{1+\theta}}.$$

Отметим, что при $\theta=0,$ как и следовало ожидать, получим

$$\varphi(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\tau-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Понятно, что для заданных законов распределения случайных величин, определяющих входящий поток заявок и продолжительность обслуживания, эффективность системы определяется числом каналов.

Цель исследования – разработка метода расчета рационального числа каналов системы обслуживания, в которой процесс, описывающий входящий поток заявок – марковский, а процесс обслуживания определяется соотношением (1), то есть он не марковский.

Литературный обзор. Традиционный математический аппарат теории массового обслуживания построен в предположении, что система обслуживания является марковской, то есть входящий поток заявок – пуассоновский, а продолжительность обслуживания – случайная величина, распределенная экспоненциально [1–3]. В реальности эти предположения не выполняются. В частности, для рассматриваемой системы обслуживания с распределенным спросом не марковским является процесс обслуживания. Для исследования немарковских систем предложен метод вложенных цепей Маркова [5]. Применительно к исследуемой системе этот метод реализуется следующим образом. Вероятности переходов в системе вычисляются как вероятности того, что за время обслуживания ровно одной заявки в систему поступает некоторое случайное число требований с распределением, задаваемым входящим потоком. К сожалению, реализация этой идеи для анализа многоканальной системы обслуживания с ожиданием и произвольными законами распределения для процессов поступления заявок и их обслуживания приводит к конечным результатам только в отдельных частных случаях.

Для простейшей одноканальной системы с пуассоновским входящим потоком в [3] получено соотношение для расчета средней длины очереди

$$m_s=\frac{\alpha^2+\lambda^2 D[T_{об}]}{\varepsilon(1-\alpha)},$$

где $\lambda-$ интенсивность входящего потока,

$\alpha=\lambda T_{об}-$ среднее число заявок, поступающих в систему в течение среднего времени обслуживания $T_{об}$ одной заявки,

$D[T_{об}]-$ дисперсия случайной продолжительности обслуживания.

Тот же результат с использованием аппарата производящих функций приведен в [6]. Распространить предложенную в [5,6] технологию на случай многоканальной системы с произвольными законами распределения для процессов поступления и обслуживания заявок не удается. С другой стороны, многочисленные попытки аппроксимировать реальное распределение продолжительности обслуживания экспоненциальным не дает удовлетворительных результатов [7–10]. Приведенные соображения инициируют продолжение исследований.

Цель исследования. Постановка задачи. Пусть на вход n-канальной системы поступает пуассоновский поток интенсивности λ, а случайная продолжительность обслуживания описывается распределением (1). Заявка, поступающая в систему, когда хотя бы один из каналов свободен, немедленно обслуживается. Если поступающая заявка приходит в момент, когда все каналы системы заняты, она становится в очередь и ожидает канала обслуживания. Общая продолжительность обслуживания заявки определяется двумя слагаемыми. Первое из них – ожидание начала обслуживания в очереди – $T_{\text{ож}}^{(1)}$. Второе слагаемое $T_{\text{ож}}^{(2)}$ определяется продолжительностью собственно обслуживания заявки освободившимся каналом.

ISSN 2079-0023 (print)
ISSN 2410-2857 (online)

Понятно, что для заданных законов распределения интервала между заявками и продолжительности собственно обслуживания эффективность этой системы зависит только от числа каналов. Выбранному числу каналов n соответствует распределение случайного значения длины очереди и распределение продолжительности интервала от момента поступления заявки до момента окончания её обслуживания. Возможные критерии эффективности системы: 1) средняя продолжительность ожидания; 2) вероятность того, что случайная продолжительность ожидания превысит допустимое значение. Для расчёта численного значения критериев необходимо знать закон распределения длины очереди.

Таким образом, задача исследования – отыскание закона распределения случайного числа заявок, находящихся в очереди, для заданного набора параметров системы.

Отыскание закона распределения случайной длины очереди. Традиционные технологии определения закона распределения числа заявок в очереди наиболее просто реализуются в марковских системах обслуживания [10, 11]. Полученная по результатам статистической обработки реальных данных плотность распределения продолжительности обслуживания (1) не является экспоненциальной. Однако, эта плотность имеет отчетливо выраженную асимметрию, что позволяет аппроксимировать её распределением Эрланга надлежащего порядка [12, 13]. Смысл и целесообразность такой аппроксимации состоит в том, что поток событий, соответствующий закону Эрланга любого порядка, есть просеянный пуассоновский поток. В рассматриваемой конкретной задаче реальное распределение продолжительности обслуживания хорошо описывается законом Эрланга второго порядка

$$\varphi(T_{\text{об}}) = \mu^2 \overline{T}_{\text{об}} e^{-\mu \overline{T}_{\text{об}}}, \qquad (2)$$

где $\overline{T}_{\text{об}}$ – средняя продолжительность обслуживания заявки.

Это обстоятельство позволяет для описания процесса обслуживания построить марковскую схему с пуассоновским потоком освобождения каналов, эквивалентную реальной схеме с эрланговским потоком обслуживания (рис. 1). Представленный на рис. 1 граф состояний и переходов системы отображает: во–первых, пуассоновский процесс перехода с интенсивностью λ в состояния, соответствующие последовательному увеличению числа заявок в системе, и, во–вторых, также пуассоновский процесс перехода с интенсивностью $\mu = \dfrac{2}{\overline{T}_{\text{об}}}$ в состояния, соответствующие последовательному уменьшению числа заявок в системе в ходе их обслуживания. Наличие промежуточных, буферных состояний обеспечивает корректное отображение эрланговского характера процесса обслуживания.

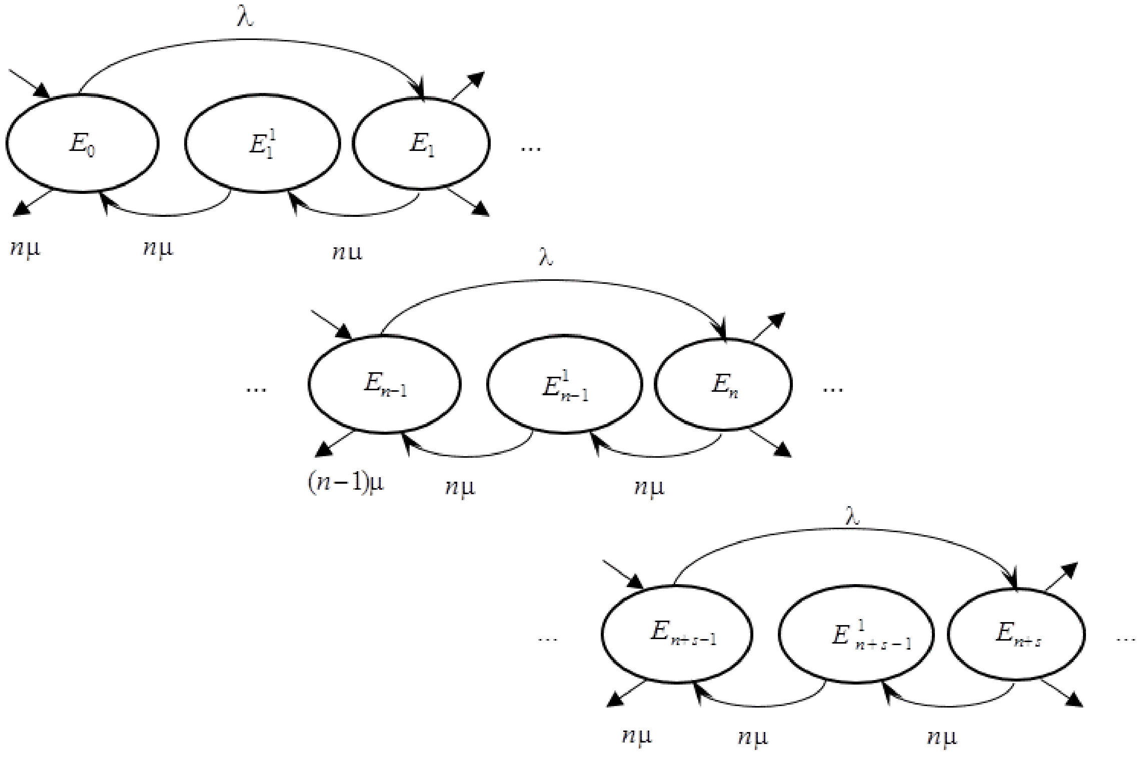

Рис. 1 – Граф состояний и переходов

Для состояний системы введем следующие обозначения:

E_o – основное состояние, соответствующее ситуации, когда все каналы свободны;

…

E_k – основное состояние, соответствующее ситуации, когда заняты k каналов;

…

E_n – основное состояние, соответствующее ситуации, когда заняты n каналов;

…

E_k^1 – промежуточное буферное состояние, соответствующее переходу из состояния E_k в E_{k-1};

…

E_{n+s}^1 – промежуточное буферное состояние, соответствующее переходу из состояния E_{n+1} в E_{n+s-1}.

Составим систему уравнений Колмогорова относительно вероятностей состояния системы:

$$\mu P(E_1^1) - \lambda P(E_0) = 0,$$

$$\mu P(E_1^1) - \mu P(E_1^1) = 0,$$

$$\lambda P(E_0) - \mu P(E_1) + 2\mu P(E_2^1) - \lambda P(E_1) = 0,$$

$$\ldots$$

$$\lambda P(E_{n-1}) - n\mu P(E_n) + n\mu P(E_{n+1}^1) - \lambda P(E_n) = 0,$$

$$\ldots$$

$$\lambda P(E_{n+s-2}) - n\mu P(E_{n+s-1}) + n\mu P(E_{n+s-1}^1) - \lambda P(E_{n+s-1}) = 0,$$

$$n\mu P(E_{n+s}) - n\mu P(E_{n+s}^1) = 0,$$

$$\lambda P(E_{n+s-1}) - n\mu P(E_{n+s}) + n\mu P(E_{n+s+1}^1) - \lambda P(E_{n+s}) = 0.$$

Суммируя первое уравнение со вторым, третье с четвертым и так далее, получим

$$\mu P(E_1) - \lambda P(E_0) = 0,$$

$$\ldots$$

$$\lambda P(E_{n-1}) - n\mu P(E_n) + n\mu P(E_{n+1}) - \lambda P(E_n) = 0,$$

$$\ldots$$

$$\lambda P(E_{n+s-2}) - n\mu P(E_{n+s-1}) + n\mu P(E_{n+s}) - \lambda P(E_{n+s-1}) = 0,$$

$$\lambda P(E_{n+s-1}) - n\mu P(E_{n+s}) + n\mu P(E_{n+s+1}) - \lambda P(E_{n+s}) = 0,$$

$$\ldots$$

$$z_k = \lambda P(E_{k-1}) - k\mu P(E_k), \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

$$\ldots$$

$$z_{n+s} = \lambda P(E_{n+s-1}) - n\mu P(E_{n+s}), \quad s = 1,2,\ldots$$

Тогда $z_1 = 0$, $z_1 - z_2 = 0$, … $z_n - z_{n+1} = 0$, … $z_{n+s-1} - z_{n+s} = 0$, …

Отсюда

$$P(E_k) = \frac{\lambda}{k\mu} P(E_{k-1}), \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

$$\ldots$$

$$P(E_{n+s}) = \frac{\lambda}{n\mu} P(E_{n+s-1}), \quad s = 1,2,\ldots,$$

или

$$P(E_1) = \frac{\lambda}{\mu} P(E_0),$$

$$P(E_2) = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda^2}{2!\mu^k} P(E_0),$$

$$\ldots$$

$$P(E_k) = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} P(E_0),$$

$$\ldots$$

$$P(E_{n+1}) = \frac{\lambda}{n\mu} P(E_n) = \frac{\lambda^{n+1}}{n!\mu^n (n\mu)} P(E_0),$$

$$\ldots$$

$$P(E_{n+s}) = \frac{\lambda^{n+s}}{n!\mu^n (n\mu)^s} P(E_0)$$

Заметим теперь, что из второго, четвертого и т. д. уравнений следует

$$P(E_1) = P(E_1^1),$$

$$P(E_2) = P(E_2^1),$$

$$\ldots$$

$$P(E_{n+s}) = P(E_{n+s}^1), \quad s = 1,2,\ldots$$

Тогда, так как

$$\sum_{k=0}^{n} P(E_k) + \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k^1) = 1,$$

то

$$P(E_0) + P(E_0) 2\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^s\right] = 1.$$

Отсюда

$$P(E_0) = \frac{1}{1 + 2\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^s\right]}.$$

ISSN 2079-0023 (print)
ISSN 2410-2857 (online)

Тогда

$$P_k = \frac{\dfrac{\lambda^k}{k!\mu^k}}{1+2\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\lambda^k}{k!\mu^k}+\dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^s\right]},\ k=0,1,\ldots,n,$$

$$\ldots$$

$$P_{n+s} = \frac{\dfrac{\lambda^{n+s}}{n!\mu^n(n\mu)^s}}{1+2\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\lambda^k}{k!\mu^k}+\dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^s\right]},\quad s=1,2,\ldots$$

Введем $\dfrac{\lambda}{\mu}=\alpha.$ При этом

$$P_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{1+2\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s\right]},\ k=0,1,\ldots,n, \quad (3)$$

$$\ldots$$

$$P_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^{n+s}}{n!k^s}}{1+2\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s\right]},\quad s=1,2,\ldots \quad (4)$$

Суммируя бесконечно убывающую геометрическую прогрессию в знаменателе соотношений (3) и (4), получим

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s=\frac{\dfrac{\alpha}{n}}{1-\dfrac{\alpha}{n}}=\frac{\alpha}{n-\alpha}.$$

Тогда

$$P_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{1+2\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}\right]},\quad k=0,1,\ldots,n,$$

$$P_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}{1+2\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}\right]},\quad s=1,2,\ldots. \quad (5)$$

Найдем среднее число заявок в очереди

$$m_s = M[s] = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{s\alpha^s}{n^s}}{1+2\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}\right]}. \quad (6)$$

Просуммируем арифметико–геометрическую прогрессию в числителе соотношений (5) и (6). Введя $\varphi=\dfrac{\alpha^s}{n^s}$, получим

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s\alpha^s}{n^s}=\sum_{s=1}^{\infty}s\varphi^s=\varphi\sum_{s=1}^{\infty}s\varphi^{s-1}=\varphi\sum_{s=1}^{\infty}\frac{d(\varphi^s)}{d\varphi}=$$

$$=\varphi\frac{d}{d\varphi}\sum_{s=1}^{\infty}\varphi^s=\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\varphi}{1-\varphi}\right)=\frac{\varphi}{(1-\varphi)^2}=$$

$$=\frac{\alpha}{n\left(1-\dfrac{\alpha}{n}\right)^2}=\frac{\alpha n}{(n-\alpha)^2}.$$

Тогда

$$m_s = \frac{\dfrac{\alpha^{n+1}}{(n-\alpha)^2(n-1)!}}{1+2\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}\right]}. \quad (7)$$

Теперь рассчитаем среднее время ожидания в очереди. Если заявка поступает в момент, когда хотя бы один канал обслуживания свободен, то время ожидания равно нулю. Если в момент поступления заявки все каналы заняты, но очереди нет, то время ожидания в среднем равно $\dfrac{1}{n\mu}$, то есть среднему времени до освобождения одного из каналов. Если в очереди находятся $(s-1)$ заявка, то средняя продолжительность ожидания до освобождения хотя бы одного канала равна $\dfrac{s}{n\mu}$. Поэтому средняя продолжительность ожидания, с учетом случайного числа заявок очереди, определяется соотношением

$$\overline{T}_{\text{ож}}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s}{n\mu}P_{n+s-1}.$$

В соответствии с (5)

$$P_{n+s}=\frac{\alpha}{n}P_{n+s-1},$$

откуда

$$P_{n+s-1}=\frac{n}{\alpha}P_{n+s}.$$

При этом

$$\overline{T}_{\text{ож}}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s}{n\mu}\frac{n}{\alpha}P_{n+s}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s}{\mu\alpha}P_{n+s}=\frac{1}{\lambda}\sum_{s=1}^{\infty}sP_{n+s}=\frac{ms}{\lambda}.$$

Тогда, с учетом (7), определим среднюю продолжительность ожидания начала обслуживания

$$T_{\text{ож}}^{(1)} = \frac{\dfrac{\alpha^{n+1}}{(n-\alpha)^2(n-1)!}}{\lambda\left[1+2\left[\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}\right]\right]}. \quad (8)$$

Отсюда, задав требуемое значение $\hat{T}_{\text{ож}}^{(1)}$ и решая возникающее при этом уравнение в целых числах, можно определить необходимое число каналов обслуживания.

Более сложным является выбор необходимого числа каналов по второму критерию. Так как среднее время ожидания для случая, когда в очереди находятся s заявок, равно $\frac{s}{n\mu}$, то критическое значение $s_{\text{кр}}$ длины очереди, при котором среднее время ожидания превысит критическое значение $T_{\text{кр}}$, равно $n\mu T_{\text{кр}}$. При этом вероятность того, что длина очереди не превысит критическое значение определяется соотношением

$$P^* = P(s < s_{\text{кр}}) = \sum_{s=1}^{s_{кр}-1} P_{n+s}.$$

$$P^* = P(T < T_{\text{кр}}) = P(s < s_{\text{кр}}) = \sum_{s=1}^{s_{\text{кр}}-1} P_{n+s} =$$

$$= \frac{\alpha^n}{n!} P_0 \sum_{s=1}^{s_{\text{кр}}-1} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s = \frac{\alpha^n}{n!} P_0 \frac{\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{s_{\text{кр}}} - \frac{\alpha}{n}}{1-\frac{\alpha}{n}} =$$

$$= \frac{\frac{\alpha^n}{n!}\left[\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{T_{\text{кр}} n\mu} - \left(\frac{\alpha}{n}\right)\right]}{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left[1+2\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s\right]\right]}. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) относительно n затруднительно. Гораздо легче, задав некоторое начальное значение числа каналов n_0, по формуле (9) вычислить соответствующее значение вероятности P^*. Затем, увеличивая n, продолжить вычисление по этой формуле до тех пор, пока получаемая при этом вероятность не превысит заданную.

Результаты исследований. Таким образом рассмотрена задача определения рационального числа каналов в системе обслуживания территориально распределенных клиентов. Особенность системы состоит в немарковском характере закона распределения случайной продолжительности обслуживания. Получены соотношения для расчёта средней длины очереди и средней продолжительности ожидания до начала обслуживания. Введен критерий эффективности системы – вероятность того, что продолжительность ожидания начала обслуживания не превысит допустимого значения. Для аналитического описания критерия предложен метод марковской аппроксимации реального закона распределения продолжительности обслуживания.

Выводы.

1. Рассмотрена модель многоканальной системы массового обслуживания без потерь с простейшим потоком заявок и немарковким обслуживанием.
2. Для описания процесса обслуживания предложено асимметричное трехпараметрическое распределение.
3. Построена марковская аппроксимация реального процесса обслуживания, основанная на распределении Эрланга второго порядка.
4. С использованием Эрланговской аппроксимации предложена марковская модель обслуживания.
5. Получена формула для расчёта средней продолжительности ожидания начала обслуживания, позволяющая определить рациональное число каналов обслуживания.

Список литературы

1. *Гнеденко Б. В.* Введение в теорию массового обслуживания / *Б. В. Гнеденко, К. К. Коваленко*. – М. : Наука, 1966. – 432 с.
2. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей / *Е. С. Вентцель* – М. : Высш. шк., 1999. – 576 с.
3. *Раскин Л. Г.* Анализ сложных систем и элементы теории управления / *Л. Г. Раскин*. – М. : Сов. Радио, 1976. – 344 с.
4. *Раскин Л. Г.* Прогнозирование технического состояния систем управления / *Ю. Т. Костенко, Л. Г. Раскин*. – Х. : Основа, 1996. – 303 с.
5. *Кендалл М.* Теория распределений / *М. Кендалл, А. Стюарт*. – М. : Наука, 1966. – 303 с.
6. *Хинчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания / *А. Я. Хинчин*. – М. : Физматгиз, 1968. – 360 с.
7. *Пигнастый О. М.* Статистическая теория производственных систем / *О. М. Пигнастый*. – Харьков. : ХНУ им. Каразина, 2007. – 388 с.
8. *Пигнастый О. М.* Стохастическое описание экономико–производственных систем с массовым выпуском продукции / *В. П. Демуцкий, В. С. Пигнастая, О. М. Пигнастый* // Доповіді Нац. Академії Наук. – 2005. – № 7. – С. 66–71.
9. *Демуцкий В. П.* Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок / *В. П. Демуцкий, В. С. Пигнастая, О. М. Пигнастый*. – Харьков. : ХНУ им. Каразина, 2003. – 272 с.
10. *Риордан Дж.* Вероятностные системы обслуживания / *Дж. Риордан*. – М. : Связь, 1966. – 296 с.
11. *Кофман А.* Массовое обслуживание / *А. Кофман, Р. Крюон*. – М. : Мир, 1965. – 362 с.
12. *Серая О. В.* Многомерные модели логистики в условиях неопределенности / *О. В. Серая.* – Х. : ФОП Стеценко, 2010. – 512 с.
13. *Серая О. В.* Модели и информационные технологии оценки и прогнозирования состояния многомерных динамических объектов в условиях нечетких исходных данных : дис. … канд. техн. наук: 05.13.06 : утв. 17.01.02 / *О. В. Серая*. – Х. : 2001. – 252 с.

References (transliterated)

1. Hnedenko B. V., Kovalenko K. K. *Vvedenye v teoryyu massovoho obsluzhyvanyya* [Introduction to queuing theory]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 432 p.
2. Venttsel E. S. *Teoryya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, Vissh. shk. Publ., 1999, 576 p.
3. Ruskin L. G. *Analiz slozhnyh sistem i jelementy teorii upravlenija* [The analysis of complex systems and controls theory]. Moscow, Sov. Radyo Publ., 1976, 344 p.
4. Kostenko Yu. T., Ruskin L. G. *Prognozirovanie tehnicheskogo sostoyaniya sistem upravleniya* [Technical state management systems forecasting]. Kharkiv, Osnova Publ., 1996, 303 p.
5. Kendall M., Styuart A. *Teoryya raspredelenyy* [Distribution theory]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 303 p.
6. Khynchyn A. Y. *Raboti po matematycheskoy teoryy massovoho obsluzhyvanyya* [Mathematical queuing theory works]. Moscow, Fyzmathyz Publ., 1968, 360 p.

7. Pyhnastiy O. M. *Statystycheskaya teoryya proyzvodstvenikh system* [Statistical theory of production systems]. Kharkov, KhNU im. Karazyna Publ., 2007, 388 p.
8. Demutskyy V. P., Pyhnastaya V. S., Pyhnastiy O. M. *Stokhastycheskoe opysanie ekonomyko–proyzvodstvennikh system s massovim vipuskom produktsyy* [Stochastic description of the economic and production systems to mass production]. Dopovidi Nats. Akademiyi Nauk Publ., 2005, no. 7, pp. 66–71.
9. Demutskyy V. P., Pyhnastaya V. S., Pyhnastiy O. M. *Teoryya predpryyatyya: Ustoychyvost funktsyonyrovanyya massovoho proyzvodstva y prodvyzhenyya produktsyy na rinok* [Enterprise theory: Stability of functioning of mass production and promotion of products on the market]. Kharkov, KhNU im. Karazyna Publ., 2003, 272 p.
10. Ryordan Dzh. *Veroyatnostnie systemi obsluzhyvanyya* [Probabilistic service system]. Moscow, Svyaz Publ., 1966, 296 p.
11. Kofman A., Kryuon R. *Massovoe obsluzhyvanye* [Queuing theory]. Moscow, Myr Publ., 1965, 362 p.
12. Seraya O. V. *Mnohomernie modely lohystyky v uslovyyakh neopredelennosty* [Multivariate logistic models under uncertainty]. Kharkiv, FOP Stetsenko Publ., 2010, 512 p.
13. Seraya O. V. *Modeli i informatsionnyie tehnologii otsenki i prognozirovaniya sostoyaniya mnogomernyih dinamicheskih ob'ektov v usloviyah nechetkih ishodnyih dannyih*. *dis. ... kand. tekhn. nauk* 05.13.06 [Models and information technology assessment and forecasting of multivariate dynamic objects in a fuzzy initial data. Candidate eng. sci. diss. (Ph. D.)]. Kharkiv, 2001, 252 p.

Поступила (received) 09.11.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Розрахунок раціональної кількості каналів системи масового обслуговування множини територіально розподілених клієнтів / Л. Г. Раскин, В. В. Карпенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Х. : НТУ «ХПІ», 2016. – № 37 (1209). – С. 28–34. – Бібліогр.: 13 назв. – ISSN 2079–0023.

Расчет рационального числа каналов системы обслуживания множества территориально распределённых клиентов / Л. Г. Раскин, В. В. Карпенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 37 (1209). – С. 28–34. – Библиогр.: 13 назв. – ISSN 2079–0023.

Calculation of the set of rational numbers of geographically distributed service system channels / L. G. Raskin, V. V. Karpenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: System analysis, control and information technology. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2016. – No. 37 (1209). – P. 28–34. – Bibliogr.: 13. – ISSN 2079–0023.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Раскін Лев Григорович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідуючий кафедрою Комп’ютерного моніторингу та логістики; тел.: (057) 707–66–28; e–mail: chime@bk.ru.

Раскин Лев Григорьевич – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», заведующий кафедрой Компьютерного мониторинга и логистики; тел.: (057) 707–66–28; e–mail: chime@bk.ru.

Ruskin Lev Grigorevich – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", head of Department of Computer Monitoring and logistics; тел.: (057) 707–66–28; e–mail: chime@bk.ru.

Карпенко Вячеслав Васильович – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший викладач кафедри Комп’ютерного моніторингу та логістики; тел.: (093) 643–19–39; e–mail: Karpenko@kml.kh.ua.

Карпенко Вячеслав Васильевич – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», старший преподаватель кафедры Компьютерного мониторинга и логистики; тел.: (093) 643–19–39; e–mail: Karpenko@kml.kh.ua.

Karpenko Vyacheslav Vasilevich – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", senior lecturer Department of Computer Monitoring and logistics; tel.: (093) 643–19–39; e–mail: Karpenko@kml.kh.ua.