

УДК 519.2

Д. В. ДМИТРИШИН, А. М. СТОКОЛОС, И. М. СКРЫННИК, Е. Д. ФРАНЖЕВА

ОБОБЩЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Розглядається проблема стабілізації нестійких періодичних орбіт дискретних нелінійних систем. Пропонується нове узагальнення зворотного зв'язку з запізненням, що вирішує задачу стабілізації. Зворотний зв'язок представляється у вигляді опуклої комбінації нелінійного зворотного зв'язку та напівлінійного зворотного зв'язку, введеного О. Morgul. При цьому в статті метод О. Morgul був перенесений зі скалярного випадку у векторний. Показано, що додаткове введення в рівняння напівлінійного зв'язку дозволяє суттєво змінити довжину передісторії, що використовується в управлінні, та підвищити швидкість збіжності збурених рішень до періодичних. Як додаток запропонованої схеми стабілізації наведений можливий алгоритм знаходження рішень систем алгебраїчних рівнянь. Наведені результати чисельного моделювання.

Ключові слова: нелінійні динамічні системи, хаос, цикли, зворотній зв'язок з запізненням.

Рассматривается проблема стабилизации неустойчивых периодических орбит дискретных нелинейных систем. Предлагается новое обобщение запаздывающей обратной связи, решающей задачу стабилизации. Обратная связь представляется в виде выпуклой комбинации нелинейной обратной связи и полулинейной обратной связи, введенной О. Morgul. При этом в статье метод О. Morgul был перенесен со скалярного случая на векторный. Показано, что дополнительное введение в уравнение полулинейной обратной связи позволяет существенно уменьшить длину используемой в управлении предистории и повысить скорость сходимости возмущенных решений к периодическим. Как приложение предложенной схемы стабилизации приведен возможный вычислительный алгоритм нахождения решений систем алгебраических уравнений. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, хаос, циклы, запаздывающая обратная связь.

In article considered a problem of stabilization of unstable periodic orbits of nonlinear discrete systems. It is proposed new generalization of delayed feedback, which solves stabilization problem. The feedback represented as a convex combination of nonlinear feedback and semilinear feedback, which O. Morgul introduced. Herein in article O. Morgul method was moved from scalar case to vector ones. It is shown that additional insertion of semilinear feedback in the equation lets substantially decrease prehistory length, which used in the control, and increase the rate of convergence of the perturbed solutions to periodic. As an addition of the suggested scheme of stabilization there is given possible computational algorithm of finding solutions of systems of algebraic equation. There are shown results of the numeric modeling.

Keywords: nonlinear dynamic systems, chaos, cycles, delayed feedback.

Введение. Под управлением хаосом понимают малое внешнее воздействие на систему или малое изменение структуры системы с целью преобразования хаотического поведения системы в регулярное (или хаотическое, но с другими свойствами) [1]. Проблема оптимального воздействия на хаотический режим является одной из фундаментальных в нелинейной динамике [2, 3].

Предполагается, что динамическая система имеет хаотический аттрактор, который содержит счётное множество неустойчивых циклов различных периодов. Если с помощью управляющего воздействия локально стабилизировать какой-то цикл, то траектория системы останется в его окрестности, то есть в системе будут наблюдаться регулярные движения. Отсюда, одним из способов управления хаосом является локальная стабилизация определённых орбит из хаотического аттрактора. Для решения задачи стабилизации предлагались различные схемы управления [4], среди которых достаточно популярны управления, основанные на принципе запаздывающей обратной связи (Delayed Feedback Control – DFC) [5]. Такие управления при определенных условиях позволяют локально стабилизировать положения равновесия или циклы, которые, вообще говоря, не известны наперед. Среди схем DFC наиболее простыми для физической реализации являются линейные схемы. Однако они имеют существенные ограничения: их можно применять только для узкой области пространства параметров, входящих в исходную нелинейную систему. Более точно необходимые условия применимости линейной обратной связи сформулированы в разд. 1.1.

Чтобы расширить класс систем, к которым применима схема DFC, необходимо в управление ввести нелинейные элементы. Впервые нелинейный DFC с одним запаздыванием был рассмотрен в [6], где также отмечены преимущества такой модификации, в частности, управление становится робастным. В [7, 8] концепция нелинейного управления с одним запаздыванием из работы [6] была распространена: на векторный случай; на управление с несколькими запаздываниями; на случай произвольного периода T . Показано, что управление позволяет стабилизировать циклы произвольной длины, если только мультипликаторы не вещественные больше единицы. Установлена связь между размером множества локализации мультипликаторов и величиной запаздывания в нелинейной обратной связи.

В [9, 10] была исследована полулинейная схема DFC с линейными и нелинейными элементами. Несмотря на то, что эта схема содержит только одну разность в управлении, тем не менее, удается стабилизировать циклы длиной $T=1,2$ при достаточно общих предположениях о мультипликаторах цикла. Для $T \geq 3$ ситуация меняется критически, и стабилизация циклов возможна только при выполнении жестких ограничений на мультипликаторы. Схема О. Morgul подробно рассмотрена в разделе 1.3. Она будет обобщена на случай нескольких разностей в управлении, и перенесена со скалярного на векторный случай.

Цель представленной работы состоит в усовершенствовании алгоритмов М. Vieira de Souza, А. J. Lichtenberg, О. Morgul, D. Dmitrishin подавления хаоса в нелинейных дискретных системах путем

локальной стабилизации циклов заданной длины.

Соответственно, задача состоит в выборе структуры и параметров системы управления, при которых наперед не известные циклы заданной длины были бы локально асимптотически устойчивыми.

В работе рассматривается запаздывающая обратная связь в виде выпуклой комбинации нелинейного контроля и обобщенного контроля О. Morgul. Выведен характеристический полином замкнутой системы для цикла длины T , его структура получилась достаточно простой. Как частный случай этот полином содержит в себе характеристические полиномы при нелинейном контроле и обобщенном контроле О. Morgul. Приводится решение задачи для стабилизации циклов длины единица, то есть положений равновесия, и подготавливается теоретическая основа для решения задачи в общей постановке для циклов произвольной длины.

Специальная структура характеристического полинома позволяет применять методы комплексного анализа. Именно поэтому основным методом построения управлений и исследования условий их применимости является геометрическая теория функции комплексной переменной. С позиций этой теории проанализирован подход О. Morgul стабилизации циклов и условия его применимости. Проведен анализ влияния параметров управления на качество управления, указано, почему комбинированное управление оказывается лучше, чем нелинейное или полулинейное управления по отдельности. И, наконец, рассмотрены приложения предложенной схемы комбинированного управления к усовершенствованию итерационных методов решения алгебраических уравнений.

1. Обзор и предварительные результаты. Рассматривается нелинейная дискретная система, которая при отсутствии управления имеет вид

$$x_{n+1} = f(x_n), x_n \in R^m, n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $f(x)$ – дифференцируемая векторная функция соответствующей размерности. Предполагается, что система (1) имеет инвариантное выпуклое множество A , то есть, если $\xi \in A$, то и $f(\xi) \in A$. Также предполагается, что в этой системе имеется один или несколько неустойчивых T -циклов (η_1, \dots, η_T) , где все векторы η_1, \dots, η_T различны и принадлежат инвариантному множеству A , то есть $\eta_{j+1} = f(\eta_j)$, $j = 1, \dots, T-1$, $\eta_1 = f(\eta_T)$.

Мультипликаторы рассматриваемых неустойчивых циклов определяются, как собственные значения произведений матриц Якоби $\prod_{j=1}^T f'(\eta_j)$ размерностей $m \times m$. Как правило, циклы (η_1, \dots, η_T) системы (1) априори не известны. Следовательно, не известен и спектр $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ матрицы $\prod_{j=1}^T f'(\eta_j)$.

Требуется описать множество M , при котором возможно локально стабилизировать T -цикл системы (1) одним управлением из допустимого класса управлений для всех мультипликаторов, локализованных в M , $M \subset \bar{C}$ (\bar{C} – расширенная комплексная плоскость), то есть, чтобы система

$$x_{n+1} = f(x_n) + u_n$$

имела бы локально асимптотически устойчивый T -цикл с мультипликаторами из M , и на этом цикле управление u_n обращалось бы в нуль. Другими словами, считаем, что для заданной длины цикла T нам известна оценка множества локализации мультипликаторов M . Другими словами, считаем, что динамическая система характеризуется не столько самой функцией f (или семейством функций), сколько множеством локализации мультипликаторов цикла (или циклов) известной длины.

1.1 Линейное управление. В качестве управления рассмотрим закон, основанный на линейной обратной связи

$$u_n = - \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon_j (x_{n-jT+T} - x_{n-jT}), \quad (2)$$

где коэффициенты усиления должны быть ограниченными: $|\varepsilon_j| < 1$, $j = 1, \dots, N-1$, $T = 1, 2, \dots$

Соответственно система, замкнутая таким управлением, имеет вид

$$x_{n+1} = f(x_n) - \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon_j (x_{n-jT+T} - x_{n-jT}). \quad (3)$$

Отметим, что при синхронизации состояния $x_{k+T} = x_k$, $k = 1, 2, \dots$, управление (2) обращается в нуль, то есть замкнутая система (3) приобретает вид, как в отсутствие управления. Это означает, что T -циклы системы (1) будут T -циклами системы (3).

Рассмотрим случай $T = 1$. Требуется найти необходимые условия в терминах множества локализации мультипликаторов M , при которых положение равновесия системы (3) будет локально асимптотически устойчиво (или же достаточные условия, при которых это положение равновесия будет неустойчиво). В [11] показано, что множество M локализации мультипликаторов системы (1) не может быть сколь угодно большим ни для какого линейного управления вида (2), точнее, его диаметр не может превышать шестнадцати, а диаметр его каждой связной компоненты – четырех, причем не зависимо от размерности системы m , и от числа N в управлении (2).

Этот вывод накладывает существенные ограничения на практическое применение линейного управления. Отметим также еще один недостаток линейного управления (2): инвариантное выпуклое множество A системы (1) не будет инвариантным для системы (3).

1.2 Нелинейное управление. Другой тип обратной связи – нелинейный – имеет вид

$$u_n = -\sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon_j (f(x_{n-jT+T}) - f(x_{n-jT})), \quad (4)$$

а соответствующая замкнутая система –

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^N a_j f(x_{n-jT+T}), \quad (5)$$

где $a_1 = 1 - \varepsilon_1$, $a_j = \varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j$, $j = 2, \dots, N-1$, $a_N = \varepsilon_{N-1}$.

Ясно, что $\sum_{j=1}^N a_j = 1$. Допустимыми будем

считать только те управления вида (4), для которых $0 \leq a_j \leq 1$, $j = 1, \dots, N$.

При синхронизации состояния $x_{k+T} = x_k$, $k = 1, 2, \dots$, управление (4) обращается в нуль, и замкнутая система (5) приобретает вид, как в отсутствии управления, следовательно, T -циклы системы (1) будут T -циклами системы (5). Кроме того, инвариантное выпуклое множество A системы (1) остается инвариантным для системы (5).

Как показано в [12], для любого множества M локализации мультипликаторов T -циклов системы (1), не содержащей вещественных чисел, больших единицы, существует управление вида (4), при котором в системе (5) эти T -циклы будут локально асимптотически устойчивыми. Таким образом, указанное управление будет обладать свойством робастности.

Приведем решение задачи выбора коэффициентов a_j , $j = 1, \dots, N$, для частных случаев множеств локализации мультипликаторов:

случай I: $M = \{\mu \in R: \mu \in (-\hat{\mu}, 1)\}$, $\hat{\mu} > 1$;

случай II: $M = \{\mu \in C: |\mu + R| < R\}$, $R > 1/2$.

Алгоритм нахождения минимального N и коэффициентов $\{a_1, \dots, a_N\}$ состоит из таких шагов [12]:

a) вычисляются узлы

$$\psi_j = \pi \frac{\sigma + T(2j-1)}{\sigma + T(N-1)},$$

где $j = 1, 2, \dots, \frac{N-2}{2}$, если N четное;

$j = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$, если N нечетное;

при этом в случае I следует полагать $\sigma = 2$, а в случае II полагать $\sigma = 1$;

b) строятся полиномы

$$\eta_N(z) = z(z+1) \prod_{j=1}^{\frac{N-2}{2}} (z - e^{i\psi_j}) (z - e^{-i\psi_j}),$$

если N – четное, и

$$\eta_N(z) = z \prod_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} (z - e^{i\psi_j}) (z - e^{-i\psi_j}),$$

если N – нечетное;

c) вычисляются коэффициенты полинома

$$\eta_N(z) = \sum_{j=1}^N c_j z^j \quad (\text{например, по формулам Виета});$$

d) определяются коэффициенты

$$a_j = \frac{\left(1 - \frac{1+(j-1)T}{2+(N-1)T}\right) c_j}{\sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{1+(j-1)T}{2+(N-1)T}\right) c_k}, \quad j = 1, \dots, N;$$

e) в случае I вычисляются величины

$$J_N^{(T)} = - \left[\frac{T}{2+(N-1)T} \prod_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \text{ctg}^2 \frac{\pi(2+T(2k-1))}{2(2+(N-1)T)} \right]^T;$$

при N – четном;

$$J_N^{(T)} = - \left[\prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \text{ctg}^2 \frac{\pi(2+T(2k-1))}{2(2+(N-1)T)} \right]^T;$$

при N – нечетном;

оптимальное значение N вычисляется, как минимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\mu^* \leq \frac{1}{|J_N^{(T)}|};$$

f) в случае II вычисляются величины

$$\hat{J}_N^{(T)} = - \left[\frac{T}{1+(N-1)T} \prod_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \text{ctg}^2 \frac{\pi(1+T(2k-1))}{2(1+(N-1)T)} \right]^T;$$

при N – четном;

$$\hat{J}_N^{(T)} = - \left[\prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \text{ctg}^2 \frac{\pi(1+T(2k-1))}{2(1+(N-1)T)} \right]^T$$

при N – нечетном; оптимальное значение N вычисляется как минимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $R \leq \frac{1}{2|\hat{J}_N^{(T)}|}$.

Отметим, что для $\sigma \in \{1, 2\}$ и $T = 1, 2$ полиномы

$F_T(z) = z(a_1 + \dots + a_N z^{N-1})^T$ будут однолиственными в центральном единичном круге $D = \{z \in C: |z| < 1\}$. По-видимому, свойство однолиственности полиномов будет верным для $\sigma \in [0, 2]$ и всех T , и для разных σ множество M локализации мультипликаторов T -циклов системы (1) должна лежать в полуплоскости $\{z \in C: \text{Re } z < 1\}$ (рис. 1, а, б).

1.3. Полулинейное управление. О. Morgul [9, 10] для стабилизации цикла длины $T = 3$ предложил обратную связь, включающую линейные и нелинейные элементы.

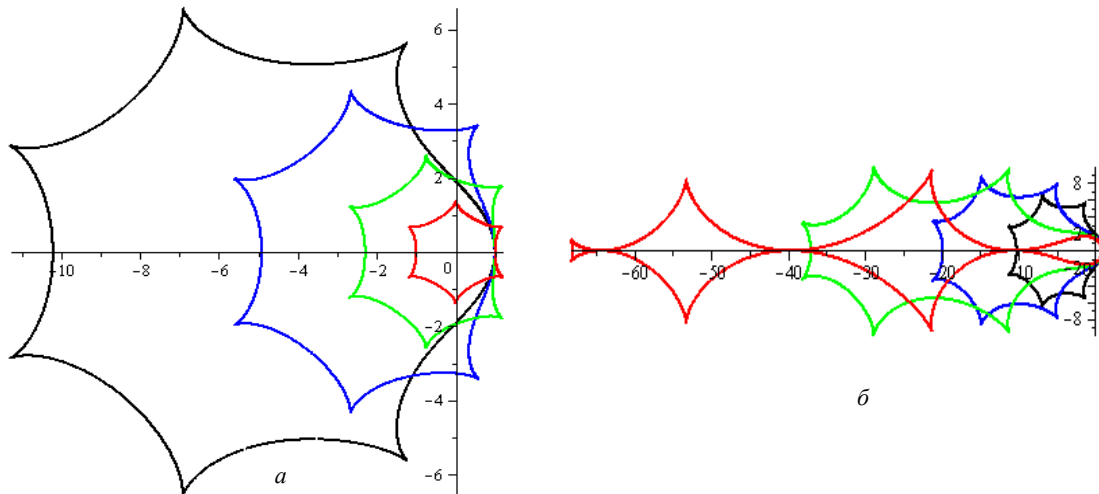


Рис. 1 – Покриття множини M локалізації мультиплікаторів
 a – при $T = 3, N = 7, \sigma \in [0,1]$: $\sigma = 1$ – black, $\sigma = 0.66$ – blue, $\sigma = 0.33$ – green, $\sigma = 0$ – red;
 b – при $T = 3, N = 7, \sigma \in [1,2]$: $\sigma = 1$ – black, $\sigma = 1.33$ – blue, $\sigma = 1.66$ – green, $\sigma = 2$ – red

То есть полулинейную обратную связь вида

$$u_n = -\varepsilon(f(x_n) - x_{n-T+1}), \quad (6)$$

соответственно замкнутая система –

$$x_n = (1 - \varepsilon)f(x_n) - \varepsilon x_{n-T+1}, \quad (7)$$

где $\varepsilon \in [0,1)$. На цикле выполняются условия $f(x_n) = x_{n+1} = x_{n-T+1}$, следовательно, на цикле $u_n \equiv 0$. Отметим, что в [9] рассматривался лишь скалярный случай $f: R \rightarrow R$. Однако схему О. Morgul можно обобщить и на векторный случай, как это сделать будет показано ниже. В такой постановке задачи инвариантное выпуклое множество A системы (1) сохраняется инвариантным и для системы (7). Если же считать, что $\varepsilon \in [0, \infty)$ [9], то выпуклое инвариантное множество может не сохраняться, хотя в этом случае можно стабилизировать положения равновесия с мультипликаторами из полуплоскости $\{z \in C: \operatorname{Re} z > 1\}$. Характеристическое уравнение для T -цикла, в скалярном случае, имеет вид [10]

$$(\lambda - \varepsilon)^T - \mu(1 - \varepsilon)^T \lambda^{T-1} = 0, \quad (8)$$

где μ – мультипликатор цикла. Соответственно, в векторном случае характеристическое уравнение примет вид

$$\prod_{j=1}^m [(\lambda - \varepsilon)^T - \mu_j (1 - \varepsilon)^T \lambda^{T-1}] = 0, \quad (9)$$

где μ_j – мультипликаторы цикла ($j = 1, \dots, m$), вообще говоря, комплексные. Уравнение (9) мы получим как частный случай более общего характеристического уравнения, которое выведем в разделе 2. Если все корни уравнения (9) лежат в открытом центральном единичном круге D , то T -цикл локально асимптотически устойчив [10, 13]. Если мультиплика-

торы $\mu_j, j = 1, \dots, m$, известны точно, то проверить принадлежность корней центральному единичному кругу можно по известным критериям, например, Шура-Кона, Кларка, Джури [14]. Однако циклы не известны, следовательно, не известны и мультипликаторы. В этом случае эффективным оказался геометрический критерий А. Solyanik устойчивости циклов дискретных систем [15]. Сделав замену $\lambda = \frac{1}{z}$, запишем уравнение (9) в виде совокупности уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{z} = \Phi(z), \\ \mu_j \\ j = 1, \dots, m, \end{cases}$$

где $\Phi(z) = (1 - \varepsilon)^T \frac{z}{(1 - \varepsilon z)^T}$. Следующее наблюдение оказывается исключительно полезным в наших условиях.

Лемма 1. Все корни уравнения (9) лежат в центральном единичном круге тогда и только тогда, когда справедливы включения

$$\mu_j \in (\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*, \quad j = 1, \dots, m, \quad (10)$$

где $\bar{D} = \{z \in C: |z| \leq 1\}$ – замкнутый центральный единичный круг, \bar{C} – расширенная комплексная плоскость, звездочкой обозначена операция инверсии: $(z)^* = \frac{1}{\bar{z}}$. Здесь \bar{z} означает число, комплексно сопряженное к z . Заметим, что множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ является инверсией множества исключительных значений образа круга при отображении $\Phi(z)$. Согласно Лемме 1 T -цикл будет локально асимптотически устойчив, если множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ покрывает

множество M локализации мультипликаторов. Условие (10) можно переписать в виде $M \subseteq (\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$, или в равносильной форме $\Phi(D) \subseteq \bar{C} \setminus (\bar{M})^*$. Это означает, что множество $(\bar{M})^*$ должно быть исключительным для образа круга D при отображении $\Phi(z)$.

Пример 1. Пусть $T=1$. В этом случае множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^* = \left\{ w \in C : w = -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon} z, z \in D \right\}$, т. е. это множество – открытый круг с центром в точке $\left(-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, 0\right)$ и радиусом $\frac{1}{|1-\varepsilon|}$ (рис. 2). При $\varepsilon \rightarrow 1-0$ круг переходит в полуплоскость $\{w \in C : w < 1\}$, при $\varepsilon \rightarrow 1+0$ круг переходит в полуплоскость $\{w \in C : w > 1\}$. Следовательно, если множество M лежит в полуплоскости $\{w \in C : w < 1\}$ или $\{w \in C : w > 1\}$, то положение равновесия системы (1) может быть стабилизировано управлением вида (6).

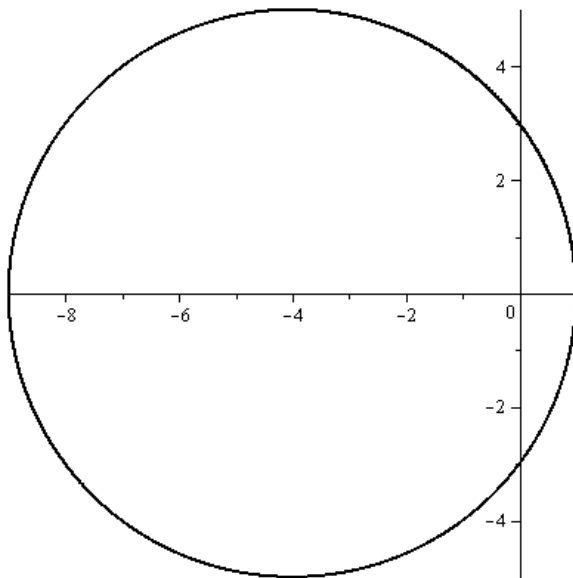


Рис. 2 – Множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ при $T=1, \gamma=0.8$

Пример 2. Пусть $T=2$. Тогда множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^* = \left\{ w \in C : w = \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon z} + \varepsilon z \right) - 1 \right), z \in D \right\}$, то есть это внутренность эллипса с полуосями $\left\{ \frac{1+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}, \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right\}$ и с центром в точке $\left(-\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}, 0\right)$ (рис. 3). Вершины эллипса находятся в точках $\left(-\frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^2}, 0\right)$ и $(1, 0)$. Следовательно, если множество M лежит в полуплоскости $\{w \in C : w < 1\}$, то 2-цикл системы (1) может быть стабилизирован управлением вида (6).

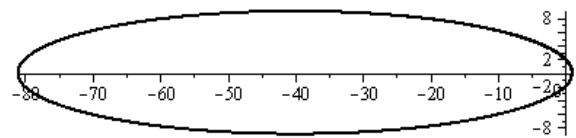


Рис. 3 – Множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ при $T=2, \gamma=0.8$

O. Morgul рассматривал только скалярный случай, а в скалярном случае множество M может состоять только из вещественных чисел. Тогда условие стабилизируемости положения равновесия следующее: $\mu \in \left(-\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, 1\right)$ или $\mu \in \left(1, \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$. Соответственно для 2-цикла условие стабилизируемости будет иметь вид: $\mu \in \left(-\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2, 1\right)$.

В случае $T=1$ функция $\Phi(z) = (1-\varepsilon) \frac{z}{1-\varepsilon z}$ однолистка при всех $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$ во всей комплексной плоскости, за исключением точки $z_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. При $T=2$ и $\varepsilon \neq 0$ функция $\Phi(z) = (1-\varepsilon)^2 \frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}$ однолистка в открытом центральном круге $\left\{ z \in C : |z| < \frac{1}{|\varepsilon|} \right\}$. В этих случаях функции $\Phi(z)$ при $\varepsilon \in [0, 1)$ однолистки в открытом центральном единичном круге D .

Для $T \geq 3$ ситуация становится иной. Функция $\Phi(z) = (1-\varepsilon)^T \frac{z}{(1-\varepsilon z)^T}$ не будет однолистной в круге D при всех $\varepsilon \in [0, 1)$, а только при $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{T-1}\right)$ [16].

Так как $\Phi(-1) = -\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^T$, то при $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{T-1}\right)$ условие стабилизируемости T -цикла в скалярном случае примет вид $\mu \in \left(-\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^T, 1\right)$. Функция $\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^T$ возрастает по ε , следовательно, максимальный размер для множества локализации мультипликатора будет при $\varepsilon = \frac{1}{T-1}$, то есть $\mu \in \left(-\left(\frac{T}{T-2}\right)^T, 1\right)$. При $\varepsilon > \frac{1}{T-1}$ функция $\Phi(z)$ перестает быть однолистной, и интервал для множества локализации мультипликатора будет уменьшаться (рис. 4).

Функция $\left(\frac{T}{T-2}\right)^T$ убывает при $T \geq 3$, асимптотически стремясь к $e^2 \approx 7.389$.

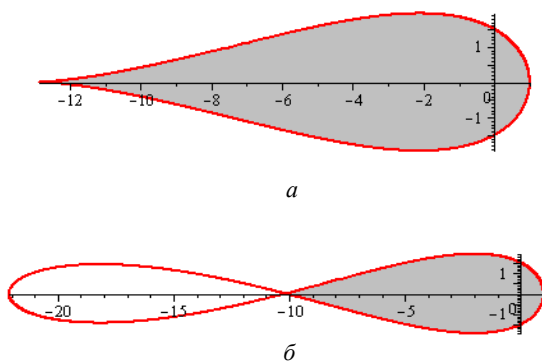


Рис. 4 – Инверсный образ границы круга D (red) и множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))$ (grey) при $T = 5$ ($a - \varepsilon = 0.25$; $b - \varepsilon = 0.3$)

2. Обобщенное полулинейное управление

2.1 Постановка задачи. Естественным обобщением запаздывающей обратной связи является совместное использование рассмотренных в разделе 2 линейной, нелинейной и полулинейной обратных связей. Учтём, что линейная обратная связь малоэффективна, и выберем управление в виде выпуклой комбинации нелинейной и обобщенной полулинейной обратных связей, а именно,

$$u_n = -(1-\gamma) \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon_j^{(1)} (f(x_{n-jT+T}) - f(x_{n-jT})) - \gamma \sum_{j=1}^N \varepsilon_j^{(2)} (f(x_{n-jT+T}) - x_{n-jT+1}), \quad (11)$$

где $\gamma \in [0, 1)$.

Отметим, что на цикле длины T управление (11) исчезает. Мотивировка использования управления вида (11) для $T \geq 3$ полностью очевидна. Полулинейное управление не позволяет стабилизировать циклы системы (1) длины три и более в общем случае. Однако совместное использование полулинейного и нелинейного управлений может позволить уменьшить необходимую длину предьстории, используемую в обратной связи. Для $T = 1, 2$ можно также ожидать качественно новых эффектов при стабилизации положения равновесия за счёт большего числа параметров управления: увеличения скорости сходимости возмущенных решений к периодическим, расширения бассейна притяжения локально устойчивого периодического решения и т. п. Другими словами, комбинированное управление должно улучшить свойства как нелинейного, так и полулинейного управления. Систему (1) замкнём управлением (11), тогда получим

$$x_{n+1} = (1-\gamma) \sum_{j=1}^N a_j f(x_{n-jT+T}) + \gamma \sum_{j=1}^N b_j x_{n-jT+1}, \quad (12)$$

где коэффициенты $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ связаны с параметрами $\varepsilon_1^{(1)}, \dots, \varepsilon_{N-1}^{(1)}, \varepsilon_1^{(2)}, \dots, \varepsilon_N^{(2)}$ линейной биекцией

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{1-\gamma} - \varepsilon_1^{(1)} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \varepsilon_1^{(2)}, \\ a_j = -(\varepsilon_j^{(1)} - \varepsilon_{j-1}^{(1)}) - \frac{\gamma}{1-\gamma} \varepsilon_j^{(2)}, j = 2, \dots, N-1, \\ a_N = \varepsilon_{N-1}^{(1)} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \varepsilon_N^{(2)}, \\ b_j = \varepsilon_j^{(2)}, j = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Мы желаем, чтобы инвариантное выпуклое множество A системы (1) сохранялось бы инвариантным и для системы (12). Следовательно, надо требовать выполнения соотношений: $a_j \in [0, 1], b_j \in [0, 1],$

$j = 1, \dots, N, \sum_{j=1}^N a_j = 1, \sum_{j=1}^N b_j = 1$. Для этого на управление (11) следует наложить дополнительные ограничения, а именно, $\sum_{j=1}^N \varepsilon_j^{(2)} = 1; \frac{1}{1-\gamma} - \varepsilon_1^{(1)} \geq \frac{\gamma}{1-\gamma} \varepsilon_1^{(2)} \geq 0,$

$$\varepsilon_{j-1}^{(1)} - \varepsilon_j^{(1)} \geq \frac{\gamma}{1-\gamma} \varepsilon_j^{(2)} \geq 0, j = 2, \dots, N-1,$$

$$\varepsilon_{N-1}^{(1)} \geq \frac{\gamma}{1-\gamma} \varepsilon_N^{(2)} \geq 0.$$

Требуется подобрать параметры $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$, удовлетворяющие заданным ограничениям, таким образом, чтобы T -цикл системы (12) был локально асимптотически устойчив, а величина N была бы наименьшей.

Если в (12) положить $\gamma = 0$, то получим систему (5), то есть систему (1), замкнутую нелинейной обратной связью. Если же в (12) положить $N = 1$, то $a_1 = b_1 = 1$, следовательно, получим систему (7), то есть, как в случае замыкания полулинейной обратной связью. Таким образом, система (12) содержит в себе, как частные случаи системы (5) и (7).

2.2 Построение характеристического полинома. Исследование устойчивости T -цикла системы (12) начнем с вывода характеристического уравнения для этого цикла. Классический путь – это построение матрицы Якоби специального отображения в окрестности цикла [10], и нахождение характеристического полинома этой матрицы. В итоге этот характеристический полином будет иметь громоздкий вид, а путь его упрощения совсем не очевиден [10].

Этот же полином можно строить, исходя из другого отображения, при этом полином получается в форме очень удобной для дальнейших исследований [17, 18]. В [18] доказана эквивалентность классического метода О. Morgul и альтернативного, который и будет применен ниже.

Решение системы (12) можно представить в виде

$$\begin{cases} x_{Ts} &= \eta_1 + u_s^1, \\ x_{Ts+1} &= \eta_2 + u_s^2, \\ &\dots \\ x_{Ts+T-1} &= \eta_T + u_s^T, \end{cases} \quad (13)$$

$s = 0, 1, \dots$ Подставим решение (13) в (12), считая, что в окрестности цикла нормы векторов u_s^1, \dots, u_s^T малы.

Пусть $n = Ts$. Тогда $x_{n+1} = x_{Ts+1} = \eta_2 + u_s^2$, $x_{n+2} = x_{Ts+2} = \eta_3 + u_s^3, \dots, x_{n+T} = x_{T(s+1)} = \eta_1 + u_{s+1}^1$.

Выделяя линейную часть и учитывая, что $\eta_1 = f(\eta_2), \dots, \eta_T = f(\eta_1)$, получаем

$$\begin{cases} u_s^2 = (1-\gamma)f'(\eta_1)(a_1 u_s^1 + \dots + a_N u_{s-N+1}^1) + \gamma(b_1 u_{s-1}^2 + \dots + b_N u_{s-N}^2), \\ u_s^T = (1-\gamma)f'(\eta_{T-1})(a_1 u_s^{T-1} + \dots + a_N u_{s-N+1}^{T-1}) + \gamma(b_1 u_{s-1}^T + \dots + b_N u_{s-N}^T), \\ u_{s+1}^1 = (1-\gamma)f'(\eta_T)(a_1 u_s^T + \dots + a_N u_{s-N+1}^T) + \gamma(b_1 u_s^1 + \dots + b_N u_{s-N+1}^1), \end{cases} \quad (14)$$

где $f'(\eta_j)$, $j = 1, \dots, T$, – матрицы Якоби, размерности $m \times m$. Система (14) линейная, поэтому ее решения представляются в виде (15)

$$\begin{pmatrix} -(1-\gamma)q(z)f'(\eta_1) & (1-\gamma p(z))\mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(1-\gamma)q(z)f'(\eta_2) & (1-\gamma p(z))\mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -(1-\gamma)q(z)f'(\eta_{T-1}) & (1-\gamma p(z))\mathbf{I} \\ z^{-1}(1-\gamma p(z))\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -(1-\gamma)q(z)f'(\eta_T) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{0}$ – нулевая матрица, размерности $m \times m$, \mathbf{I} – единичная матрица, размерности $m \times m$, то есть

$$\det \left(z^{-1}(1-\gamma p(z))^T \mathbf{I} - (1-\gamma)q(z)^T \prod_{j=1}^T f'(\eta_j) \right) = 0.$$

Пусть собственные значения произведения матриц Якоби $\prod_{j=1}^T f'(\eta_j)$ равны μ_1, \dots, μ_m . Тогда, заменяя это произведение Жордановой канонической формой, получим окончательный вид характеристического уравнения

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{(1-\gamma p(z))^T}{z(1-\gamma)q(z)^T} - \mu_j \right) = 0. \quad (17)$$

Отсюда, искомым характеристический полином имеет вид

$$\tilde{f}(\lambda) = \prod_{j=1}^m \left([\lambda^N - \gamma \lambda^N p(\lambda^{-1})]^T - (1-\gamma)^T \mu_j \lambda^{T-1} [\lambda^{N-1} q(\lambda^{-1})]^T \right). \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} u_s^1 \\ \dots \\ u_s^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_T \end{pmatrix} \lambda^s, \quad (15)$$

где λ – комплексное число, подлежащее определению. Подставляя (15) в (14), получим

$$\begin{cases} -(1-\gamma)(a_1 \lambda^s + \dots + a_N \lambda^{s-N+1})f'(\eta_1)c_1 + (\lambda^s - \gamma(b_1 \lambda^{s-1} + \dots + b_N \lambda^{s-N}))c_2 = 0, \\ -(1-\gamma)(a_1 \lambda^s + \dots + a_N \lambda^{s-N+1})f'(\eta_{T-1})c_{T-1} + (\lambda^s - \gamma(b_1 \lambda^{s-1} + \dots + b_N \lambda^{s-N}))c_T = 0, \\ -(1-\gamma)(a_1 \lambda^s + \dots + a_N \lambda^{s-N+1})f'(\eta_T)c_T + (\lambda^{s+1} - \gamma(b_1 \lambda^s + \dots + b_N \lambda^{s-N+1}))c_1 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Введём следующие обозначения:

$$z = \frac{1}{\lambda},$$

$$q(z) = a_1 + a_2 z + \dots + a_N z^{N-1},$$

$$p(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_N z^N.$$

Система (16), рассматриваемая относительно векторов c_1, \dots, c_T , будет иметь нетривиальное решение тогда и только тогда, когда равен нулю определитель матрицы

Полином (18) содержит в себе, как частный случай при $N = 1$, полином (9).

2.3 Геометрический критерий локальной асимптотической устойчивости цикла. Следующий шаг исследования устойчивости циклов состоит в анализе расположения нулей характеристического полинома (18) на комплексной плоскости. Или, что эквивалентно, корней уравнения (17). Локальная устойчивость циклов разностных систем эквивалентна устойчивости по Шуру характеристического полинома, соответствующего этому циклу [см., напр., 13]. Этот факт представим в виде Леммы.

Лемма 2. T -цикл системы (12) локально асимптотически устойчив тогда и только тогда, когда все нули полинома (18) лежат в открытом центральном единичном круге D .

Как было отмечено в разделе 1.3, применить известные критерии проверки устойчивости по Шуру полинома (18) не удастся, так как величины μ_1, \dots, μ_m неизвестны. Поэтому для проверки локальной устойчивости циклов системы (12) применим геометрический критерий устойчивости А. Solyanik.

Обозначим $\Phi(z) = (1-\gamma)^T \frac{z(q(z))^T}{(1-\gamma p(z))^T}$.

Лемма 3. Все корни полинома (18) лежат в открытом центральном единичном круге D тогда и только тогда, когда справедливы включения

$$\mu_j \in (\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*, \quad j=1, \dots, m, \quad (19)$$

где \bar{D} – замкнутый центральный единичный круг, \bar{C} – расширенная комплексная плоскость, звездочкой обозначена операция инверсии: $(z)^* = \frac{1}{\bar{z}}$.

Доказательство. Полином (18) устойчив по Шуру тогда и только тогда, когда $\tilde{f}(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \bar{C} \setminus D$. Это равносильно $\frac{1}{\mu_j} \neq \Phi(z)$, $z \in \bar{D}$, $j=1, \dots, m$. Следовательно, необходимыми и достаточными условиями устойчивости полинома (18) по Шуру будут включения: $\frac{1}{\mu_j} \notin \Phi(\bar{D})$, или

$$\frac{1}{\mu_j} \in \bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}), \quad \text{или} \quad \mu_j \in (\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*, \quad j=1, \dots, m.$$

Лемма доказана.

В общем случае мультипликаторы цикла неизвестны, а значит, T -цикл будет локально асимптотически устойчив, если множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ покрывает множество M локализации мультипликаторов. Это означает, что множество $(\bar{M})^*$ должно быть исключительным для образа круга D при отображении $\Phi(z)$. Это свойство будет основным для построения коэффициентов управления $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$.

2.4 Конструкция управлений, стабилизирующих циклы. Следующий шаг: требуется построить функцию $\Phi(z)$, чтобы множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ накрывало множество M локализации мультипликаторов. При этом необходимо оценить размеры множества $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ в зависимости от N и γ . Функция $\Phi(z) = (1-\gamma)^T \frac{z(q(z))^T}{(1-\gamma p(z))^T}$ зависит от полиномов $q(z)$, $p(z)$ и параметра $\gamma \in [0, 1)$, причем $q(1) = 1$, $p(0) = 0$, $p(1) = 1$, следовательно $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 1$.

Для дальнейшего продвижения в постановке задачи, наложим существенное ограничение на функцию $\Phi(z)$, а именно, будем считать, что полином $q(z)$ нам известен, коэффициенты его вычисляются по формулам, указанным в разделе 1.2 (при некотором $\sigma \in [1, 2]$). Это обеспечивает покрытие множеств $M \subseteq \{\mu \in R : \mu \in (-\hat{\mu}, 1)\}$ ($\hat{\mu} > 1$) или $M \subseteq \{\mu \in C : |\mu + R| < R\}$ ($R > 1/2$) для любых допустимых $\hat{\mu}$ и R , по крайней мере, при достаточно большом N и $\gamma = 0$. Мы хотим выбрать полином $p(z)$ и

параметр γ так, чтобы определенный желаемый линейный размер множества $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ был максимальным (или множества $\Phi(D)$ минимальным). Линейные размеры зависят от величины $\Phi(-1) = -(1-\gamma)^T \frac{(q(-1))^T}{(1-\gamma p(-1))^T}$. Так как все b_j , $j=1, \dots, N$, не отрицательны, то $|p(-1)| < 1$. Следовательно, сделать величину $\Phi(-1)$ малой за счет полинома $p(z)$ не удастся. Полиному $p(z)$ предназначена весьма специфическая роль: этот полином следует выбирать так, чтобы параметр γ можно было бы варьировать в наиболее широких пределах.

Формализуем это требование. Рассмотрим семейство функций

$$\left\{ \Phi(z) = (1-\gamma)^T \frac{z(q(z))^T}{(1-\gamma p(z))^T} : \gamma \in [0, \gamma^*] \right\}, \quad (20)$$

где полином $q(z)$ задан указанным выше образом. Требуется найти полином $p(z)$ (с заданной степенью и заданными условиями нормировки) так, чтобы семейство функций (20) было бы однолиственным в круге D , а величина γ^* максимальной.

Если необходимо максимизировать линейный размер множества $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ в направлении отрицательной вещественной оси, то требование однолиственности семейства (20) можно заменить более слабым требованием типичной вещественности. Напомним, что аналитическая в D функция называется типично вещественной по Рогозинскому, если вещественным значениям функции соответствуют вещественные прообразы [19]. Другими словами, типично вещественная в D функция должна отображать открытый верхний полукруг в открытую верхнюю (или нижнюю) полуплоскость.

Приведем решение этой задачи для $T=1$. Функция $\Phi(z) = (1-\gamma) \frac{z}{1-\gamma z}$ однолистка в D при $\gamma \in [0, 1)$. Полином $zq(z)$ также однолистен при $z \in D$. Следовательно, функция $\Phi(z) = (1-\gamma) \frac{zq(z)}{1-\gamma zq(z)}$ однолистка при $\gamma \in [0, 1)$ и $z \in D$, как суперпозиция однолистных функций.

В этом случае множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^* = \left\{ \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{1}{zq(z)} - \gamma \right) : z \in D \right\}$. Это множество получается в результате сдвига множества $\left\{ \frac{1}{zq(z)} : z \in D \right\}$ на величину γ и последующего растяжения в $\frac{1}{1-\gamma}$ раз (рис. 5).

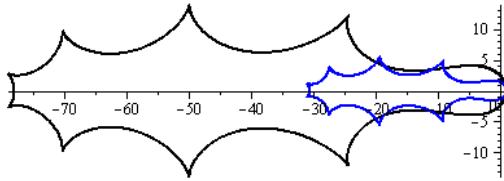


Рис. 5 – Множества $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ при $N=9$, $\sigma=1.8$, $\gamma=0$ – blue, $\gamma=0.6$ – black

Система (12) примет вид

$$x_{n+1} = (1-\gamma) \sum_{j=1}^N a_j f(x_{n-j+1}) + \gamma \sum_{j=1}^N a_j x_{n-j+1}. \quad (21)$$

Роль параметра γ отчетливо видна на рис. 6. Величина N играет двойственную роль по отношению к параметру γ . Увеличивая N , можно уменьшать γ , оставляя линейные размеры множества $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ почти неизменными.

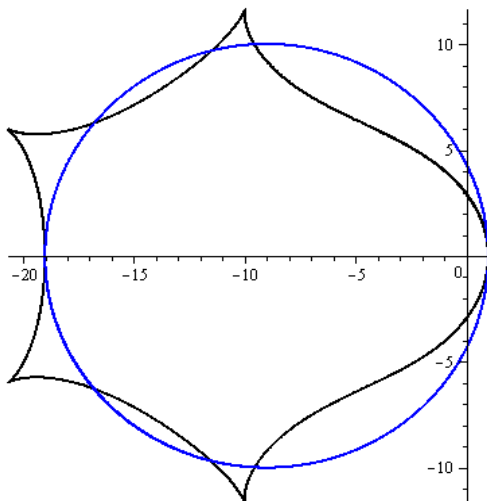


Рис. 6 – Множества $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ для систем (22) (blue) и (23) (black) при $N=5$, $\sigma=1.0$, $\gamma=0.9$, $\gamma_1 \approx 0.7$

Рассмотрим систему (12) при $N=1$:

$$x_{n+1} = (1-\gamma)f(x_n) + \gamma x_n. \quad (22)$$

Граница множества $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ – окружность, проходящая через точку $\left(-\frac{1+\gamma}{1-\gamma}, 0\right)$. Рассмотрим систему (12) с другими параметрами усреднения γ_1 , a_1, \dots, a_N

$$x_{n+1} = (1-\gamma_1) \sum_{j=1}^N a_j f(x_{n-j+1}) + \gamma_1 \sum_{j=1}^N a_j x_{n-j+1}. \quad (23)$$

Для этой системы граница множества $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ проходит через точку $\left(-\frac{q_N^{-1} + \gamma_1}{1-\gamma_1}, 0\right)$, где

$q_N = -\sum_{j=1}^N (-1)^j a_j$, а коэффициенты a_1, \dots, a_N вычисляются по формулам раздела 1.2 при некотором $\sigma \in [1, 2]$. Пусть $q_N^{-1} < \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}$. Это означает, что

линейный размер множества $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ системы (22) больше, чем системы (23).

Для того, чтобы линейные размеры этих множеств были почти равными, второе множество надо растянуть; коэффициент растяжения определяется параметром γ_1 . Нетрудно установить связь между параметрами γ и γ_1 :

$$\gamma_1 = \frac{1-q_N^{-1}}{2} + \frac{1+q_N^{-1}}{2} \gamma.$$

Пусть, например, $\gamma=0.9$, $N=5$, $\sigma=1.0$. Вычислим $q_N^{-1} \approx 5.0$. Тогда $\gamma_1 \approx 0.7$. На этом примере видно, насколько параметр γ_1 можно сделать меньше по сравнению с γ . Множества $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ для систем (22), (23) изображены на рис. 6.

Приведем еще несколько примеров для $\sigma=1.4$, $\sigma=1.8$, $\sigma=2.0$ и $N=5$ (рис. 7).

Если $\sigma=1.4$, то $q_N^{-1} \approx 7.856$ и $\gamma_1 \approx 0.557$. Если $\sigma=1.8$, то $q_N^{-1} \approx 11.640$ и $\gamma_1 \approx 0.368$. Если $\sigma=2.0$, то $q_N^{-1} \approx 13.928$ и $\gamma_1 \approx 0.254$.

Таким образом, введение запаздывания в обратную связь позволяет уменьшить величину усредняющего параметра γ .

Преимущества такого подхода обсуждаются ниже.

Пусть параметры управления γ, a_1, \dots, a_N выбраны так, что область $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ покрывает множество M , где $\Phi(z) = (1-\gamma) \frac{zq(z)}{1-\gamma zq(z)}$, и

$q(z) = a_1 + a_2 z + \dots + a_N z^{N-1}$. В этом случае положение равновесия будет локально асимптотически устойчивым. Это означает, что для начальных векторов x_1, \dots, x_N , лежащих в достаточно малой окрестности положения равновесия, решение системы (22), определяемое этими начальными векторами, стремится к положению равновесия. Такая окрестность называется бассейном притяжения положения равновесия системы (22) в пространстве начальных векторов. Оценка бассейна притяжения – задача, вообще говоря, очень сложная, и не является предметом рассмотрения данной статьи.

Заметим, что даже, когда будут выполнены все условия притяжения возмущенного решения к положению равновесия, поведение возмущенного решения может оказаться сложным, а стремление его к положению равновесия – очень медленным.

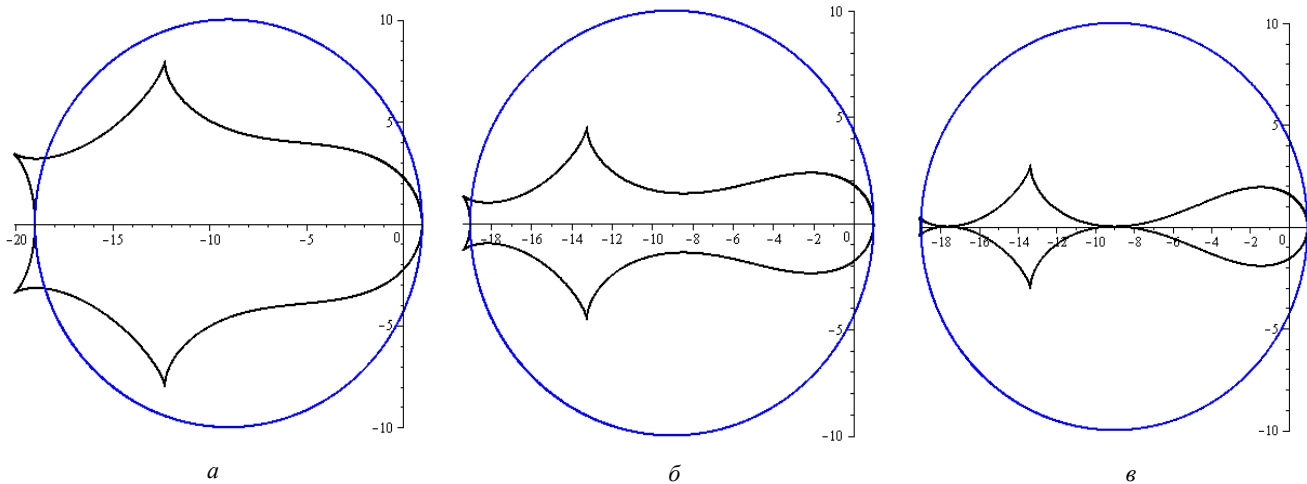


Рис. 7 – Множества $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ для систем (22) (blue) и (23) (black) при а – $N = 5, \sigma = 1.4, \gamma = 0.9, \gamma_1 \approx 0.557$;
б – $N = 5, \sigma = 1.8, \gamma = 0.9, \gamma_1 \approx 0.368$; в – $N = 5, \sigma = 2.0, \gamma = 0.9, \gamma_1 \approx 0.254$.

Это будет в том случае, когда мультипликатор системы окажется вблизи границы множества $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$. Скорость стремления возмущенного решения к положению равновесия определяется максимумом λ^* среди модулей нулей характеристического полинома (18) (при $q(z) = a_1 + a_2z + \dots + a_Nz^{N-1}, p(z) = zq(z), z = \lambda^{-1}$).

Строя отображения $\Phi\left(\frac{1}{\rho}e^{it}\right)$ при $\rho \leq 1$, можно

получить линии уровня $\lambda^* = \rho$. На рис. 8 и 9 изображены эти линии уровня для полинома (9) при $\gamma = 0.9$ и полинома (18) при $\gamma = 0.9, N = 5, \sigma \in \{1.4, 1.8, 2\}$. Более темным цветом изображены линии уровня, соответствующие большему значению ρ .

На рис. 8, 9 более темные области отвечают тем значениям мультипликаторов μ , для которых максимум λ^* среди модулей нулей характеристического полинома ближе к единице.

Рассмотрим подробнее диаграммы, представленные на рис. 8 и 9.

Светлые области определяют эффективное покрытие множества локализации мультипликаторов положения равновесия системы (1).

Если использовать полулинейное управление О. Morgul, то множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$ теоретически можно сделать как угодно большим, устремляя γ к единице, и покрывая сколь угодно большую области локализации мультипликаторов. Однако при этом область эффективного покрытия сдвигается в окрестность точки $\left(-\frac{\gamma}{1-\gamma}, 0\right)$, то есть значительно удаляется от нуля.

Таким образом, если надо покрыть мультипликаторы, один из которых в единичном круге, а другой – на отрицательной вещественной оси и на значи-

тельном расстоянии от нуля, то первый из них окажется в «темной» области, а значит, собственное значение, которое ему соответствует, лежит близко к границе единичного круга.

Это, в свою очередь, означает очень медленное стремление возмущенного решения к положению равновесия.

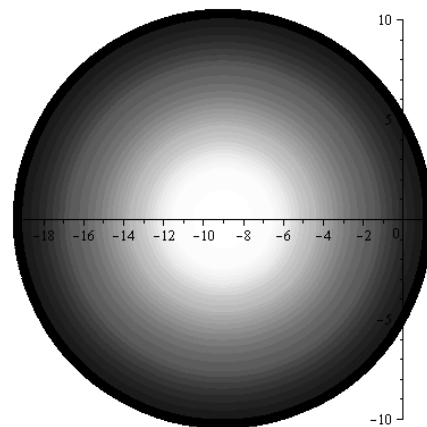


Рис. 8 – Множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$, где $\Phi(z) = (1-\gamma)\frac{z}{1-\gamma z}$, $\gamma = 0.9$

При использовании обобщенного полулинейного управления область эффективного покрытия множества локализации мультипликаторов достаточно близко к нулю и растягивается в сторону отрицательной вещественной полуоси при $\gamma \rightarrow 1$ или $N \rightarrow \infty$. Также из рис. 9 видна роль параметра σ .

Таким образом, использование обобщенного полулинейного управления позволяет ускорить стремление возмущенных решений к положению равновесия по сравнению с управлением О. Morgul. Особенно в случае большого разброса мультипликаторов положения равновесия системы (1).

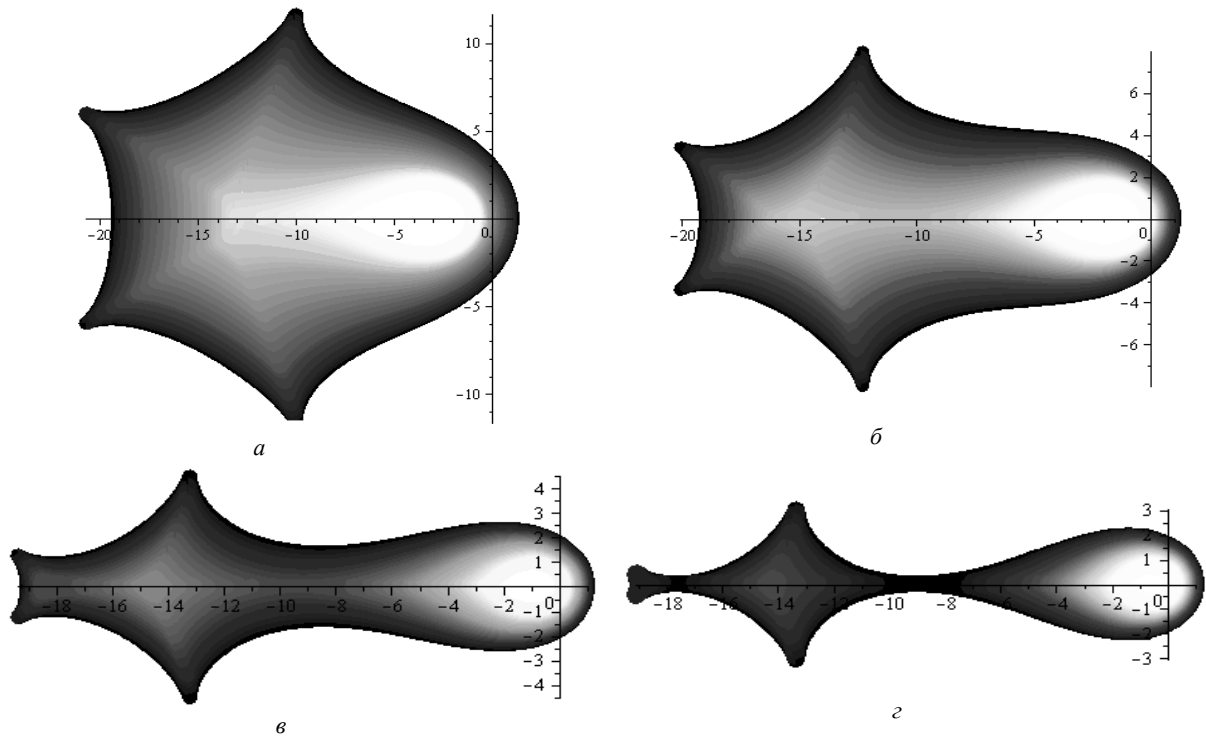


Рис. 9 – Множество $(\bar{C} \setminus \Phi(\bar{D}))^*$, где $\Phi(z) = (1-\gamma) \frac{zq(z)}{1-\gamma zq(z)}$, $N=5$, при а – $\gamma=0.7$, $\sigma=1$; б – $\gamma \approx 0.557$, $\sigma=1.4$;
в – $\gamma \approx 0.368$, $\sigma=1.8$; г – $\gamma \approx 0.254$, $\sigma=2$

3. Приложения к вычислительным методам решения систем уравнений. В этом разделе рассмотрим несколько примеров применения метода стабилизации положения равновесия системы (1) управлением (11) к возможности обобщения известных итерационных процессов решения систем линейных и нелинейных уравнений [20].

3.1 Нелинейные уравнения. Рассмотрим вычислительную схему метода простых итераций (или метода Richardson) решения системы алгебраических уравнений, вообще говоря, комплексных

$$F(x) = 0, \quad (24)$$

Для решения системы (24) строится вспомогательная разностная система

$$x_{n+1} = x_n + G(x_n)F(x_n), \quad (25)$$

где $G(x_n)$ – матрица, подлежащая выбору. Положения равновесия системы (25) совпадают с решениями системы (24). В классической схеме простых итераций матрица $G(x_n)$ выбирается из условий принадлежности мультипликаторов положения равновесия системы (25) интервалу $(-1, 1)$. Это условие можно ослабить: матрицу $G(x_n)$ следует выбирать так, чтобы мультипликаторы положения равновесия системы (25) были бы вещественными и меньше единицы. Можно взять, например, $G(x_n) = -[F'(x_n)]^*$, где $F(x)$ – матрица Якоби, а знак

"*" означает Эрмитово транспонирование. Тогда система (25) примет вид

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^* F(x_n). \quad (26)$$

Пусть $F(\xi) = 0$. Если матрица $F'(\xi)$ не вырождена, то матрица $[F'(\xi)]^* F'(\xi)$ положительно определена, то есть все ее собственные значения больше нуля. Следовательно, все собственные значения матрицы $(I - [F'(\xi)]^* F'(\xi))$, где I – единичная матрица, вещественные и меньше единицы. Пусть эти собственные значения лежат в интервала $(-\hat{\mu}, 1)$.

Организуем итерационный процесс для системы (26) по схеме (12):

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^N a_j x_{n-j+1} - (1-\gamma) \sum_{j=1}^N a_j [F'(x_{n-j+1})]^* F(x_{n-j+1}), \quad (27)$$

где $0 < \gamma < 1$, коэффициенты a_1, \dots, a_N вычисляются по формулам раздела 1.2 (при некотором $\sigma \in [1, 2]$).

Обозначим $q_N = -\sum_{j=1}^N (-1)^j a_j$. Тогда γ и N

следует выбирать из условий: $\frac{q_N^{-1} + \gamma}{1 - \gamma} > \hat{\mu}$, $0 < \gamma < 1$.

Например, если $\sigma = 2$, то $a_j = 2 \tan \frac{\pi}{2(N+1)} \left(1 - \frac{j}{N+1}\right) \sin \frac{\pi j}{N+1}$, $j = 1, \dots, N$

$q_N = \tan^2 \frac{\pi}{2(N+1)}$, и должно выполняться нера-

венство $\frac{\cot^2 \frac{\pi}{2(N+1)} + \gamma}{1-\gamma} > \hat{\mu}$. Если $\sigma = 1$, то

$a_j = \frac{2}{N} \left(1 - \frac{j}{N+1}\right)$, $j=1, \dots, N$, $q_N = \frac{1}{N}$, и должно

выполняться неравенство $\frac{N+\gamma}{1-\gamma} > \hat{\mu}$. Итерационный

процесс будет сходиться к положению равновесия, если только начальные векторы лежат в области притяжения этого положения равновесия. Отметим, что схему (27) можно заменить аналогичной, более экономной с вычислительной точки зрения

$$\begin{cases} \hat{x}_n = \sum_{j=1}^N a_j x_{n-j+1}, \\ x_{n+1} = \hat{x}_n - (1-\gamma)[F'(\hat{x}_n)]^* F(\hat{x}_n), \quad n > N. \end{cases}$$

3.2 Обобщенный метод простой итерации решения систем линейных уравнений. Если система (24) линейная, то есть $Ax - b = 0$, то система (26) примет вид $x_{n+1} = (I - A^*A)x_n + A^*b$, соответственно, система управления (27) –

$$\begin{cases} \hat{x}_n = \sum_{j=1}^N a_j x_{n-j+1}, \\ x_{n+1} = (I - (1-\gamma)A^*A)\hat{x}_n + (1-\gamma)A^*b, \quad n > N. \end{cases} \quad (28)$$

В случае, если матрица A симметрическая положительно определенная, итерационная схема упрощается

$$\begin{cases} \hat{x}_n = \sum_{j=1}^N a_j x_{n-j+1}, \\ x_{n+1} = (I - (1-\gamma)A)\hat{x}_n + (1-\gamma)b, \quad n > N. \end{cases} \quad (29)$$

Аналогичная схема пригодна и для обращения матриц

$$\begin{cases} \hat{X}_n = \sum_{j=1}^N a_j X_{n-j+1}, \\ X_{n+1} = (I - (1-\gamma)A^*A)\hat{X}_n + (1-\gamma)A^*, \quad n > N, \end{cases} \quad (30)$$

или для симметрической положительно определенной матрицы A

$$\begin{cases} \hat{X}_n = \sum_{j=1}^N a_j X_{n-j+1}, \\ X_{n+1} = (I - (1-\gamma)A)\hat{X}_n + (1-\gamma)I, \quad n > N, \end{cases} \quad (31)$$

где X_n – матрицы. Теоретически итерационные процессы (28), (29), (30), (31) сходятся при любых начальных значениях в отличие от обычных схем простой итерации. Преимущества этих схем перед другими методами решения линейных уравнений – это отсутствие в вычислительных процессах операций

деления, что позволяет проводить вычисления с плохо обусловленными матрицами. Заметим, что при $\gamma = 0$, $N = 1$ обобщенный метод простой итерации совпадает с классическим методом простой итерации.

3.3 Обобщенный метод Seidel решения систем линейных уравнений.

Предположим, что диагональные элементы матрицы A отличны от нуля. Матрицу A представим в виде $A = L + \hat{D} + U$, где матрица \hat{D} – диагональная матрица, матрицы L и U – нижняя и верхняя треугольные матрицы с нулевыми диагоналями. Классический метод Seidel состоит в задании начального вектора x_0 и последовательного вычисления векторов x_n : $(L + \hat{D})x_{n+1} = -Ux_n + b$, тогда $x_{n+1} = -(L + \hat{D})^{-1}Ux_n + (L + \hat{D})^{-1}b$. Разумеется, при реализации этого метода не требуется строить матрицу $(L + \hat{D})^{-1}$. Метод Seidel сходится, если все собственные значения матрицы $(L + \hat{D})^{-1}U$ лежат в центральном единичном круге комплексной плоскости. Это условие выполняется, например, если матрица A симметрическая положительно определенная. Обобщим метод Seidel. Применим к системе $x_{n+1} = -(L + \hat{D})^{-1}Ux_n + (L + \hat{D})^{-1}b$ вычислительную схему (21). Получим

$$\begin{cases} \hat{x}_n = \sum_{j=1}^N a_j x_{n-j+1}, \\ x_{n+1} = (\gamma I - (1-\gamma)(L + \hat{D})^{-1}U)\hat{x}_n + (1-\gamma)(L + \hat{D})^{-1}b, \quad n > N. \end{cases}$$

После простых преобразований обобщенный метод P.L. Seidel приводится к итерационной схеме

$$\begin{cases} \hat{x}_n = \sum_{j=1}^N a_j x_{n-j+1}, \\ (L + \hat{D})x_{n+1} = (-U + \gamma A)\hat{x}_n + (1-\gamma)b, \quad n > N. \end{cases} \quad (32)$$

При $\gamma = 0$, $N = 1$ обобщенный метод Seidel совпадает с классическим. Если матрица A симметрическая положительно определенная, то в (32) достаточно брать $N = 1$. Изучим вопрос сходимости итерационной схемы (32). Пусть μ_1, \dots, μ_m – собственные значения матрицы $-(L + \hat{D})^{-1}U$. Рассмотрим полином (18) при $p(\lambda^{-1}) = a_1 \lambda^{-1} + \dots + a_N \lambda^{-N}$, $q(\lambda^{-1}) = a_1 + \dots + a_N \lambda^{-N+1}$. Если все нули этого полинома лежат в центральном единичном круге, то итерационная схема (32) сходится. При подходящем выборе N , a_1, \dots, a_N схема (32) сходится, если собственные значения матрицы $-(L + \hat{D})^{-1}U$ лежат, например, в множестве $M \subseteq \{\mu \in C : |\mu| < 1\} \cup \{\mu \in R : \mu \in (-\hat{\mu}, 1)\}$, $\hat{\mu} > 1$, или в $M \subseteq \{\mu \in C : |\mu| < 1\} \cup \{\mu \in C : |\mu + R| < R\}$, $R > 1/2$. Для обращения матрицы $A = L + \hat{D} + U$ применяем схему

$$\begin{cases} \hat{X}_n = \sum_{j=1}^N a_j X_{n-j+1}, \\ (L + \hat{D})X_{n+1} = (-U + \gamma A)\hat{X}_n + (1 - \gamma)I, \quad n > N \end{cases} \quad (33)$$

Отметим, что сложность обобщенных методов по сравнению с классическими возрастает незначительно, на каждой итерации дополнительно необходимо выполнить несколько операций сложения и умножения. Аналогично, можно обобщать и другие стационарные, и даже нестационарные, итерационные методы решения систем алгебраических уравнений.

4. Численное моделирование

Пример 1. Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_i(x, y, z) = 0, \\ i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (34)$$

где $f_1(x, y, z) = -x + x^3 + y^2 + 7z^4 - 1$, $f_2(x, y, z) = x - y + 2z$, $f_3(x, y, z) = (x - y - 8z)^4 - z$. Эта система изучалась в курсе www.youtube.com/watch?v=S5hevRtjMI8, для ее решения применялись методы простой итерации и Newton. Этими методами были найдены решения

$(1, 1, 0)$ и $(-1, -1, 0)$, причем отмечалось, что для сходимости методов начальное приближение (x_0, y_0, z_0) должно быть близко к решению. Особенно это относится к z_0 . Для решения системы (34) применим итерационный процесс (27). Вычислим

$$[F'(x, y, z)]^* = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 1 & 4(x - y - 8z)^3 \\ 2y & -1 & -4(x - y - 8z)^3 \\ 28z^3 & 2 & -32(x - y - 8z)^3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Положим в (27) $N = 3$, $\gamma = 0.91$, $\sigma = 1.4$. Тогда $a_1 \approx 0.46798$, $a_2 \approx 0.37603$, $a_3 \approx 0.15600$. В качестве начальных приближений возьмем три точки: $(x_0, y_0, z_0) = (1.55, 0.74, 0.12)$, $(x_0, y_0, z_0) = (0.84, 0.8, -0.01)$, $(x_0, y_0, z_0) = (-0.91, -1.1, -0.005)$.

Далее, для каждой из этих точек положим $(x_i, y_i, z_i) = (x_0, y_0, z_0)$, $i = 1, 2$. Тогда итерационный процесс (27) будет сходиться, причем для каждой начальной точки к различному решению: для первой к $(0.95134, 1.04417, 0.04642)$, для второй к $(1, 1, 0)$, для третьей к $(-1, -1, 0)$.

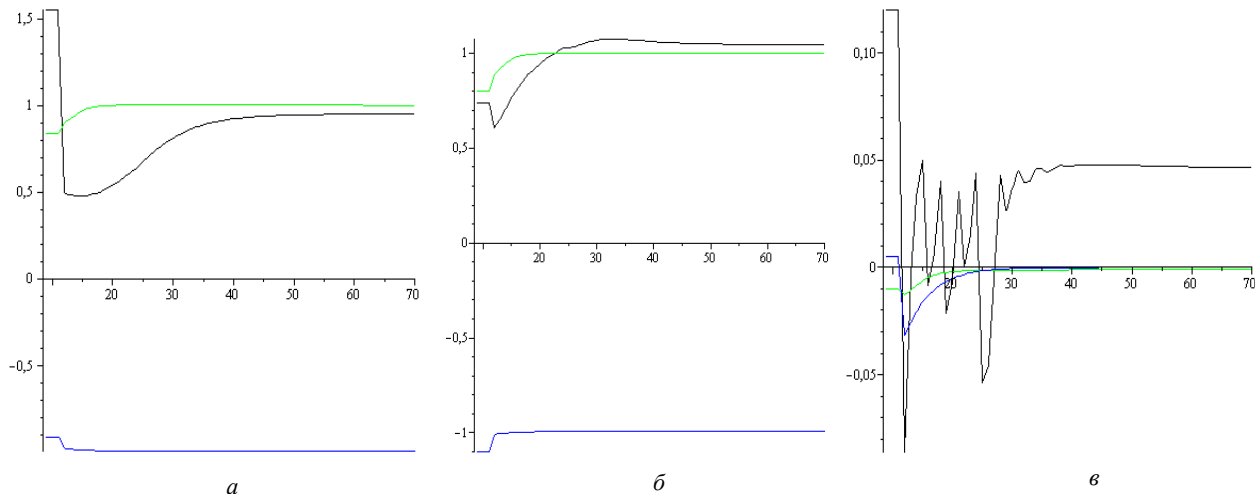


Рис. 10 – Графики $a - (n, x_n)$, $b - (n, y_n)$, $e - (n, z_n)$ итерационного процесса (27) решения системы (34) для разных начальных точек

На рис. 11 представлены графики невязки, где $\varepsilon_n = |f_1(x_n, y_n, z_n)| + |f_2(x_n, y_n, z_n)| + |f_3(x_n, y_n, z_n)|$.

Приведем значения первых итераций и график невязки для итерационного процесса (26) и начального вектора (рис. 12): $(x_0, y_0, z_0) = (1.00001, 0.99999, 0)$; $(x_7, y_7, z_7) = (1.086, 0.91, 0.246)$; $(x_8, y_8, z_8) = (234.865, -233.087, -1867.571)$.

По сравнению с методом простой итерации и методом Newton, предложенный метод оказался более эффективным, позволил найти дополнительно еще одно решение, и бассейн притяжения положений равновесия оказался заметно больше.

Графики (n, x_n) , (n, y_n) , (n, z_n) для разных начальных точек представлены на рис. 10 (для первой – black, для второй – green, для третьей – blue).

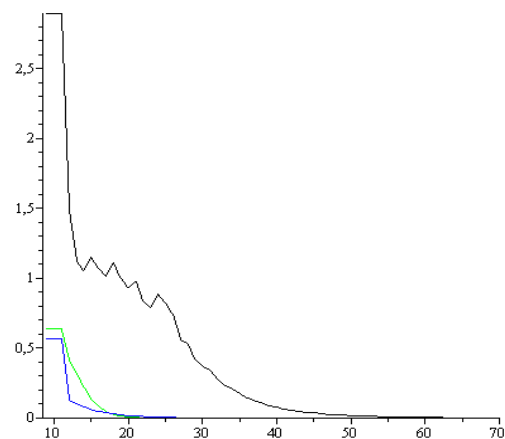


Рис. 11 – Графики невязки (n, ε_n) итерационного процесса (27) решения системы (34) для разных начальных точек

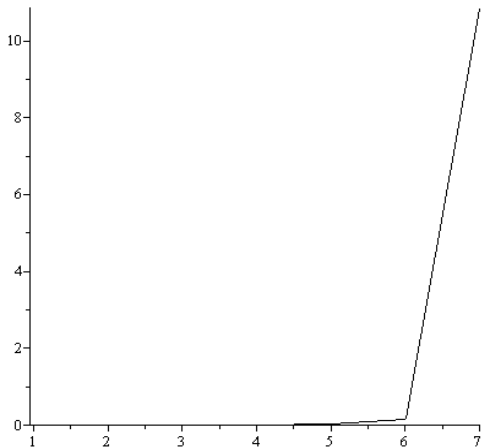


Рис. 12 – График невязки (n, ε_n) итерационного процесса (26) решения системы (34)

Пример 2. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -10 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

и применим итерационный процесс (33) для ее обращения. Так как собственные значения матрицы A равны $\{-11.58, 1.85, 9.73\}$, то метод простых итераций обращения этой матрицы будет расходиться.

Разложим матрицу A

$$A = L + \hat{D} + U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и найдем собственные значения матрицы $-(L + \hat{D})^{-1}U$: $\{0, -0.41, -72.59\}$. Так как эти собственные значения не лежат в центральном единичном круге, то для обращения матрицы (35) метод Seidel не применим. Но эти собственные значения меньше единицы, следовательно, применим обобщенный метод Seidel. В формуле (33) возьмем $N=7$, $\gamma=0.743$, $\sigma=1.8$. Тогда $a_1 \approx 0.14722$, $a_2 \approx 0.21348$, $a_3 \approx 0.22286$, $a_4 \approx 0.19052$, $a_5 \approx 0.13372$, $a_6 \approx 0.07116$. В качестве начальных приближений возьмем матрицы: $X[1]$ – единичная, $X[2], \dots, X[7]$ – нулевые. Тогда

$$X[250] = \begin{pmatrix} 0.490 & 0.154 & 0.067 \\ 0.154 & 0.038 & -0.077 \\ 0.067 & -0.077 & 0.029 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\varepsilon_n = \|X[n]A - I\|_1$, где норма $\varepsilon_n = \|\bullet\|_1$ – сумма абсолютных значений компонент матрицы. Вычислим $\varepsilon_{250} \approx 3 \cdot 10^{-9}$. Сходимость процесса обращения матрицы показана на графике невязки (рис. 13). Из-за плохого начального приближения невязка резко возростала, однако, уже через десять шагов эта невязка стала быстро убывать, что подтверждает практическую эффективность предло-

женной схемы. Отметим, что, как при увеличении γ , так и при уменьшении N , скорость сходимости будет уменьшаться.

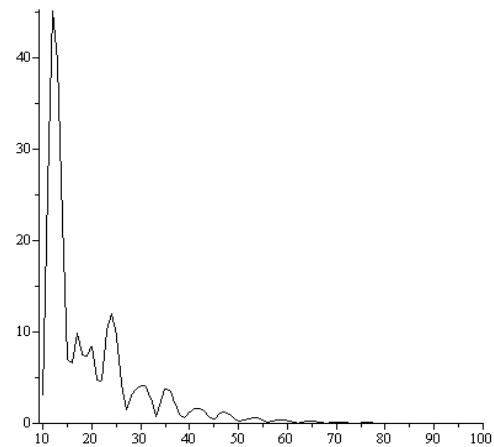


Рис. 13 – График невязки (n, ε_n) итерационного процесса (33) обращения матрицы (35)

Для сравнения приведем расчеты, используя схему О. Morgul, то есть в формуле (33) возьмем $N=1$. Для этого случая наилучшее значение $\gamma=0.974$. Нужная точность достигается на 800 шаге. Приведем графики невязки предыдущей схемы и схемы О. Morgul для первых 80 итераций (рис. 14).

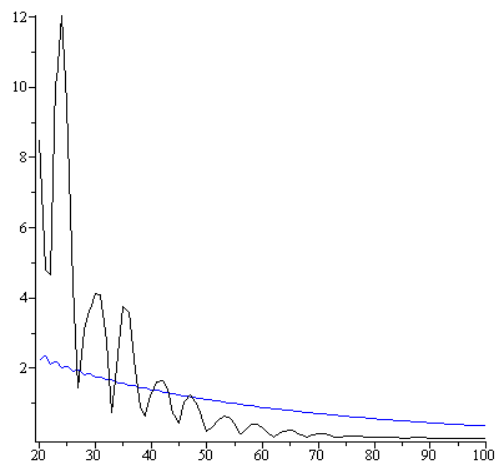


Рис. 14 – Графики невязки (n, ε_n) итерационного процесса (33) обращения матрицы (35) при $N=7$ (black) и $N=1$ (blue)

Видно, что невязка в методе О. Morgul убывает монотонно, но значительно медленнее невязки обобщенного полулинейного контроля.

Выводы. В статье рассмотрена проблема стабилизации неустойчивых и априори неизвестных периодических орбит нелинейных систем с дискретным временем. Предложен новый подход к конструированию запаздывающей обратной связи, решающей задачу стабилизации. Обратная связь представляется в виде выпуклой комбинации нелинейной обратной связи и полулинейной обратной связи, введенной О. Morgul. Тем самым сохраняются преимущества обоих видов обратной связи.

Для построения коэффициентов усиления нелинейной обратной связи и получения условий применимости такого управления были использованы методы геометрического комплексного анализа. В статье этими методами проанализирована возможность применения схемы О. Morgul. Получены необходимые и достаточные условия стабилизации в виде геометрического критерия локальной асимптотической устойчивости. Также метод О. Morgul был перенесен со скалярного случая на векторный.

Важно отметить, что характеристические полиномы для периодических орбит в нелинейном и полунелинейном случаях имеют очень простую структуру, хотя, естественно, различную. Именно это обстоятельство явилось стимулом объединить два упомянутых выше подхода. Полученный характеристический полином также имеет достаточно простую структуру и содержит в себе, как частные случаи, полиномы нелинейного и полунелинейного схем управления.

Геометрический критерий устойчивости в нелинейном и полунелинейном случаях состоял в анализе образов центрального единичного круга при специальном полиномиальном отображении. В комбинированном нелинейно-полунелинейном методе управления вместо полиномиальных отображений приходится изучать дробно-рациональные отображения. В статье приведено решение построения квазиоптимальных дробно-рациональных отображений для случая $T=1$, то есть для стабилизации положений равновесия. Дополнительное введение в управление полунелинейной обратной связи позволяет существенно уменьшить длину используемой в запаздывающей обратной связи предыстории и повысить скорость сходимости возмущенных решений к периодическим.

Как приложение предложенной схемы стабилизации приведен возможный вычислительный алгоритм нахождения решений систем алгебраических уравнений, основанный на модификации известных итерационных схем. В этих схемах используются значения переменных, вычисленные на предыдущих шагах. При этом трудоемкость новых итерационных схем практически не возрастает. Приведенные результаты численного решения систем линейных и нелинейных уравнений подтверждают это суждение и эффективность предложенных схем стабилизации положения равновесия.

Список литературы

1. Jackson E. A. Perspectives of Nonlinear Dynamics. Vol. I, II / E. A. Jackson // Cambridge Univ. Press, Cambridge. – 1989, 1990. – p. 495, 632.
2. Ott E. Controlling chaos / E. Ott, C. Grebodgi, J. A. Yorke // Phys. Rev. Lett. 64. – 1990. – P. 1196–1199.
3. Chen G. From chaos to order: Methodologies, Perspectives and Application / G. Chen, X. Dong // World Scientific series on Nonlinear Science A. – World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.: Singapore. – 1998. – Vol. 24. – P. 598–614.
4. Andrievsky B. R. Control of Chaos: Methods and Applications / B. R. Andrievsky, A. L. Fradkov // I. Methods, Avtomat. i Telemekh. – 2003. – no. 5. – P. 3–45.
5. Pyragas K. Continuous control of chaos by self controlling feedback. Phys. Rev. Lett. A 170. 1992, pp. 421–428.
6. Vieira de S. M., Lichtenberg A. J. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay. Phys. Rev. E 54. 1996, pp. 1200–1207.
7. Dmitrishin D. and Khamitova A. Methods of harmonic analysis in nonlinear dynamics. Comptes Rendus Mathematique. 2013, vol. 351, issues 9–10, pp. 367–370.
8. Dmitrishin D., Skrinnik I., Stokolos A. From chaos to order through mixing. arXiv:1607.05493 [nlin.CD]. 2016, p. 15.
9. Morgul O. On the stability of delayed feedback controllers. Phys. Lett. A., 2003, pp. 278–285.
10. Morgul O. Further stability results for a generalization of delayed feedback control. Nonlinear Dynamics. 2012, pp. 1–8.
11. Dmitrishin D., Khamitova A., Stokolos A. On the generalized linear and non-linear DFC in non-linear dynamics. arXiv:1407.6488 [math.DS], 2014, p. 19.
12. Khalil H. K. Nonlinear Systems, 3rd edn. Prentice-Hall, Upper Saddle River. 2002, 750 p.
13. Elaydi S. N. An Introduction to Difference Equations. New York, Springer-Verlag, 1996, 539 p.
14. Solyanik A. A-Stabilization and the ranges of complex polynomials on the unit disk. arXiv:1701.04784v [math.NA]. 2017, p. 37.
15. Titchmarsh E. The theory of functions. London, Oxford University press, 1939, p. 454.
6. Vieira de S. M. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay / S. M. Vieira de, A. J. Lichtenberg // Phys. Rev. E 54. – 1996. – P. 1200–1207.
7. Dmitrishin D. Methods of harmonic analysis in nonlinear dynamics / D. Dmitrishin, A. Khamitova // Comptes Rendus Mathematique, Volume 351, Issues 9–10. – 2013. – P. 367–370.
8. Dmitrishin D. From chaos to order through mixing / D. Dmitrishin, I. Skrinnik, A. Stokolos // arXiv:1607.05493 [nlin.CD]. – 2016. – p. 15.
9. Morgul O. On the stability of delayed feedback controllers / O. Morgul // Phys. Lett. A. – 2003. – P. 278–285.
10. Morgul O. Further stability results for a generalization of delayed feedback control / O. Morgul // Nonlinear Dynamics. – 2012. – P. 1–8.
11. Dmitrishin D. On the generalized linear and non-linear DFC in nonlinear dynamics / D. Dmitrishin, A. Khamitova, A. Stokolos // arXiv:1407.6488 [math.DS]. – 2014. – p. 19.
12. Khalil H. K. Nonlinear Systems, 3rd edn / H. K. Khalil // Prentice-Hall, Upper Saddle River. – 2002. – 750 p.
13. Elaydi S. N. An Introduction to Difference Equations / S. N. Elaydi // New York : Springer-Verlag, – 1996. – 539 p.
14. Solyanik A. A-Stabilization and the ranges of complex polynomials on the unit disk / A. Solyanik // arXiv:1701.04784v [math.NA]. – 2017 – p. 37.
15. Titchmarsh E. The theory of functions / E. Titchmarsh // London, Oxford University press. – 1939 – p. 454.

References

1. Jackson E. A. Perspectives of Nonlinear Dynamics. Vol. I, II. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989, 1990, p. 495, 632.
2. Ott E., Grebodgi C., Yorke J. A. Controlling chaos. Phys. Rev. Lett. 64. 1990, pp. 1196–1199.
3. Chen G., Dong X. From chaos to order: Methodologies, Perspectives and Application. World Scientific series on Nonlinear Science A, Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998, Vol. 24, pp. 598–614.
4. Andrievsky B. R., Fradkov A. L. Control of Chaos: Methods and Applications. I. Methods, Avtomat. i Telemekh. 2003, no. 5, pp. 3–45.
5. Pyragas K. Continuous control of chaos by self controlling feedback. Phys. Rev. Lett. A 170. 1992, pp. 421–428.
6. Vieira de S. M., Lichtenberg A. J. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay. Phys. Rev. E 54. 1996, pp. 1200–1207.
7. Dmitrishin D. and Khamitova A. Methods of harmonic analysis in nonlinear dynamics. Comptes Rendus Mathematique. 2013, vol. 351, issues 9–10, pp. 367–370.
8. Dmitrishin D., Skrinnik I., Stokolos A. From chaos to order through mixing. arXiv:1607.05493 [nlin.CD]. 2016, p. 15.
9. Morgul O. On the stability of delayed feedback controllers. Phys. Lett. A., 2003, pp. 278–285.
10. Morgul O. Further stability results for a generalization of delayed feedback control. Nonlinear Dynamics. 2012, pp. 1–8.
11. Dmitrishin D., Khamitova A., Stokolos A. On the generalized linear and non-linear DFC in non-linear dynamics. arXiv:1407.6488 [math.DS], 2014, p. 19.
12. Khalil H. K. Nonlinear Systems, 3rd edn. Prentice-Hall, Upper Saddle River. 2002, 750 p.
13. Elaydi S. N. An Introduction to Difference Equations. New York, Springer-Verlag, 1996, 539 p.
14. Solyanik A. A-Stabilization and the ranges of complex polynomials on the unit disk. arXiv:1701.04784v [math.NA]. 2017, p. 37.
15. Titchmarsh E. The theory of functions. London, Oxford University press, 1939, p. 454.

16. Khamitova A. Characteristic polynomials for a cycle of non-linear discrete systems with time delays. *Vestnik S.-Peterburg. un-ta. Ser. 10.: Prikl. matem. Inform. Proc. upr.* [Bulletin of the St. Petersburg State University. Series 10: Applied Mathematics, Computer Science, Control Processes]. St. Petersburg, 2016, no. 4, pp. 104–115.
17. Dmitrishin D., Hagelstein P., Khamitova A., Stokolos A. On the stability of cycles by delayed feedback control. *Linear and Multilinear Algebra* 64. 2016, pp. 1538–1549.
18. Rogosinski W. W. Uber positive harmonische sinusentwicklungen. *Jber.Deutsch. Math. Ver.*, 40. 1931, pp. 33–35.
19. Kelley C. T. Iterative methods for linear and nonlinear equations. *SIAM*, Philadelphia, 1995, p. 172.

Поступила (received) 02.04.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Узагальнення нелінійного контролю для нелінійних дискретних систем / Д. В. Дмитришин, О. М. Стоколос, І. М. Скринник, О. Д. Франжева // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 28 (1250). – С. 3–18. – Бібліогр.: 19 назв. – ISSN 2079-0023.

Обобщение нелинейного управления для нелинейных дискретных систем / Д. В. Дмитришин, А. М. Стоколос, И. М. Скринник, Е. Д. Франжева // Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Системный анализ, управление и информационные технологии. – Харків : НТУ «ХПИ», 2017. – № 28 (1250). – С. 3–18. – Библиогр.: 19 назв. – ISSN 2079-0023.

Generalization of nonlinear control for nonlinear discrete systems / D. V. Dmitrishin, A. M. Stokolos, I. M. Skrinnik, E. D. Franzheva // Bulletin of NTU "KhPI". Series: System analysis, control and information technology. – Kharkov : NTU "KhPI", 2017. – No. 28 (1250). – P. 3–18. – Bibliogr.: 19. – ISSN 2079-0023.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Дмитришин Дмитро Володимирович – доктор технічних наук, професор, Одеський національний політехнічний університет; тел.: (048) 705-83-04; e-mail: dmitrishin@opu.ua.

Дмитришин Дмитрій Владимирович – доктор технических наук, профессор, Одесский национальный политехнический университет; тел.: (048) 705-83-04; e-mail: dmitrishin@opu.ua.

Dmitrishin Dmitriy Vladimirovych – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Odessa National Polytechnic University; tel.: (048) 705-83-04; e-mail: dmitrishin@opu.ua.

Стоколос Олександр Михайлович – професор, Південний університет штату Джорджія; тел.: (912) 478-52-98; e-mail: astokolos@georgiasouthern.edu.

Стоколос Александр Михайлович – профессор, Южный университет штата Джорджия; тел.: (912) 478-52-98; e-mail: astokolos@georgiasouthern.edu.

Stokolos Alexander Mychalovych – Full Professor, Georgia Southern University; tel.: (912) 478-52-98; e-mail: astokolos@georgiasouthern.edu.

Скринник Іван Михайлович – Одеський національний політехнічний університет, аспірант; тел.: (067) 485-36-14; e-mail: skrynnyk@opu.ua.

Скринник Іван Михайлович – Одесский национальный политехнический университет, аспирант; тел.: (067) 485-36-14; e-mail: skrynnyk@opu.ua.

Skrinnik Ivan Mychalovych – Odessa National Polytechnic University, Postgraduate Student; tel.: (067) 485-36-14; e-mail: skrynnyk@opu.ua.

Франжева Олена Дмитрівна – Одеський національний політехнічний університет, магістрант; тел.: (050) 582-71-59; e-mail: franjeva.lena@gmail.com.

Франжева Елена Дмитриевна – Одесский национальный политехнический университет, магистрант; тел.: (050) 582-71-59; e-mail: franjeva.lena@gmail.com.

Franzheva Elena Dmitrievna – Odessa National Polytechnic University, Master Student; tel.: (050) 582-71-59; e-mail: franjeva.lena@gmail.com.