УДК 681.5.013

Ю. И. ДОРОФЕЕВ, А. А. НИКУЛЬЧЕНКО

ДЕСКРИПТОРНЫЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО ГАРАНТИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ В СЕТЯХ ПОСТАВОК С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Пропонується підхід до вирішення задачі синтезу гарантуючого управління запасами в мережах поставок з невизначеними транспортними запізненнями в умовах дії «невідомого, але обмеженого» попиту. На основі дескрипторного перетворення дискретної моделі вузла мережі поставок побудовано функціонал Ляпунова-Красовського, який залежить від максимальної величини запізнення. Доведено, що незростання значення функціоналу вздовж будь-якої траєкторії замкнутої локальної підсистеми гарантує її асимптотичну стійкість. Отримано умову існування регулятора, що реалізує локальний закон управління у вигляді лінійного зворотного зв'язку за станом. На основі методу інваріантних еліпсоїдів за допомогою техніки лінійних матричних нерівностей задачу синтезу регулятора, який мінімізує верхнє граничне значення квадратичного критерію якості, зведено до задачі напіввизначеного програмування. Розглянуто чисельний приклад.

Ключові слова: управління запасами, гарантуюче управління, метод інваріантних еліпсоїдів, функціонал Ляпунова-Красовського, лінійна матрична нерівність, задача напіввизначеного програмування.

Предлагается подход к решению задачи синтеза гарантирующего управления запасами в сетях поставок с неопределенными транспортными запаздываниями в условиях действия «неизвестного, но ограниченного» спроса. На основе дескрипторного преобразования дискретной модели узла сети поставок построен функционал Ляпунова-Красовского, зависящий от максимальной величины запаздывания. Доказано, что невозрастание значения функционала вдоль любой траектории замкнутой локальной подсистемы гарантирует ее асимптотическую устойчивость. Получено условие существования регулятора, реализующего локальный закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию. На основе метода инвариантных эллипсоидов с помощью техники линейных матричных неравенств задача синтеза регулятора, который минимизирует верхнее граничное значение квадратичного критерия качества, сведена к задаче полуопределенного программирования. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: управление запасами, гарантирующее управление, метод инвариантных эллипсоидов, функционал Ляпунова-Красовского, линейное матричное неравенство, задача полуопределенного программирования.

The approach for solving the decentralized guaranteed cost inventory control synthesis problem in supply chains with uncertain transport delays under the conditions of the "unknown but bounded" demand is proposed. The value of delays in each period is assumed to be unknown, but bounded by some maximum value. Using the descriptor transformation of the discrete model of the supply network node, the Lyapunov-Krasovskii functional that depends on the maximum value of the delay is constructed. It is proved that none increasing of this functional along any trajectory of the closed local subsystem guarantees asymptotic stability of such subsystem. The condition of existence for controller that implements a local control law in the form of linear feedback with respect to deviation between on hand and safety stock levels is obtained. The problem of the controller synthesis, which minimizes the upper boundary value of the quadratic quality criterion, is reduced to the problem of semidefinite programming on the basis of the invariant ellipsoids method using the technique of linear matrix inequalities. The vector Lyapunov functions method and the comparison method are used to analyze the stability of a decentralized inventory control system in supply chain. A numerical example is provided.

Keywords: inventory control, guaranteed cost control, invariant ellipsoids method, Lyapunov-Krasovskii functional, linear matrix inequality, semidefinite programming.

Введение. Характерной особенностью систем производства-хранения-распределения ресурсов является наличие запаздывания между моментом формирования заказа на пополнение запасов и поступлением ресурсов на склад. Запаздывания возникают вследствие затрат времени на переработку сырья и полуфабрикатов в узлах сети, на транспортировку ресурсов между узлами, наличия человеческого фактора. Поскольку наличие запаздывания по управлению является причиной потери устойчивости либо ухудшения качества работы системы, значительное внимание уделяется проблемам анализа устойчивости и синтеза регуляторов для систем с временными задержками (см. [1] и ссылки в ней).

В последнее время отмечается повышенный интерес к проблеме анализа устойчивости линейных дискретных систем с неизвестным, но ограниченным запаздыванием, для которых получен ряд условий устойчивости [2, 3]. В то время как для систем без запаздывания методы анализа устойчивости основаны на существовании строго убывающей функции энергии, названной функцией Ляпунова (ФЛ), классическая теория Ляпунова не применима напрямую к системам с запаздыванием. Это связано с тем, что влияние запаздывающих состояний может вызвать нарушение условия монотонного убывания, которому удовлетворяет стандартная ФЛ. Поэтому для анализа устойчивости систем с запаздыванием применяются обобщения методов Ляпунова. В частности, большое значение имеют работы, где рассматриваются функционалы Ляпунова-Красовского (ФЛК), обладающие аналогичными свойствами. Однако долгое время отсутствовали алгоритмы построения указанных функционалов. Только после того, как исследователи стали применять технику линейных матричных неравенств (ЛМН), а также были развиты вычислительные методы, основанные на идеях выпуклой оптимизации, удалось упростить процесс построения ФЛК, что способствовало развитию и применению данного метода.

Известно, что существование полного квадратичного ФЛК (ПКФЛК) для системы с запаздыванием является необходимым и достаточным условием ее асимптотической устойчивости [3]. Поскольку построение ПКФЛК приводит к сложным бесконечномерным ЛМН, многие авторы использовали специальные формы ФЛК, которые позволяют получить ЛМН конечной размерности. Полученные результаты основаны на достаточных условиях устойчивости, вследствие чего они приводят к «консервативным» результатам. Основной причиной консерватизма является применение различных способов преобразования модели, описывающей систему с запаздыванием.

Поиск наиболее удобного преобразования привел к использованию дескрипторного представления системы [5], которое эквивалентно исходной системе и сводит к минимуму консерватизм. Если при построении моделей объектов управления вводятся дополнительные переменные состояний, которые алгебраически связаны с основными переменными, системы называют дескрипторными. Название подчеркивает, что дополнительные переменные имеют описательный смысл. Из-за наличия дополнительных алгебраических связей между переменными состояний дескрипторные модели приобретают свойства, не характерные для традиционного способа описания систем, что предоставляет разработчику дополнительные возможности.

Большинство работ, использующих дескрипторный подход, посвящены анализу и синтезу систем в непрерывном времени. Среди публикаций, в которых дескрипторное преобразование применяется для дискретных систем, следует отметить работу W. Zhang и др. [6].

На основе дескрипторного преобразования модели и построения ФЛК в статье предложен подход к синтезу системы децентрализованного управления запасами в дискретных сетях поставок с неопределенными запаздываниями в условиях неизвестного, но ограниченного внешнего спроса.

Постановка задачи. Рассмотрим дискретную модель производственной системы с задержками поставок, состоящей из n узлов, каждый из которых описывается разностным уравнением с запаздыванием

$$\boldsymbol{x}_i(k+1)=\boldsymbol{x}_i(k)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}_i(k-h_i(k))+\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{w}_i(k),\ i=\overline{1,n}, \quad (1)$$

где $k=0,1,...$ – номер дискретного интервала;

$\boldsymbol{x}_i(k)\in\mathrm{R}^{n_i}$ – вектор состояний i-го узла, компоненты которого описывают уровни запасов ресурсов;

$\boldsymbol{u}_i(k)\in\mathrm{R}^{m_i}$ – вектор управляющих воздействий, компоненты которого описывают размеры заказов на поставку ресурсов;

$\boldsymbol{w}_i(k)\in\mathrm{R}^{n_i}$ – вектор внешних возмущений узла;

$\boldsymbol{B}_i\in\mathrm{R}^{n_i\times m_i}$, $\boldsymbol{G}_i\in\mathrm{R}^{n_i\times n_i}$ – матрицы влияния управлений и возмущений, соответственно;

$h_i(k)$ – целое положительное число, кратное выбранному периоду дискретизации, которое определяет величину задержки пополнения запасов и предполагается неизвестным, но удовлетворяющим неравенству $0\le h_i(k)\le h_i^{\max}$, где $h_i^{\max}$ известно.

Составной вектор $\boldsymbol{x}(k)=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x}_1(k),\boldsymbol{x}_2(k),...,\boldsymbol{x}_N(k)\}$ размерности $N=\sum_{i=1}^{n}n_i$, построенный из векторов состояний отдельных узлов, является вектором состояний сети поставок.

Внешние воздействия каждого узла включают функции внешнего спроса и спроса, формируемого узлами сети, для которых данный узел является поставщиком ресурсов

$$\boldsymbol{w}_i(k)=\sum_{j=1,j\ne i}^{N}\boldsymbol{\Pi}_{ij}\,\boldsymbol{u}_j(k)+\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{d}(k), \quad (2)$$

где $\boldsymbol{u}_j(k)\in\mathrm{R}^{m_j}$ – вектор управляющих воздействий j-го узла;

$\boldsymbol{d}(k)\in\mathrm{R}^{q}$ – вектор внешних возмущений, компоненты которого описывают размеры внешнего спроса;

$\boldsymbol{\Pi}_{ij}\in\mathrm{R}^{n_i\times m_j}$, $i,j=\overline{1,n}$ – продуктивные матрицы, которые формируются на основании описания технологического процесса, обеспечиваемого сетью поставок: значение элемента $[\boldsymbol{\Pi}_{ij}]_{pr}$ равно количеству единиц ресурса $p=\overline{1,n_i}$ узла i, необходимого для производства единицы ресурса $r=\overline{1,n_j}$ узлом j;

$\boldsymbol{H}_i\in\mathrm{R}^{n_i\times q}$ – матрица влияния внешних возмущений на вектор состояний узла i.

Блочная матрица $\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_{11}&\cdots&\boldsymbol{\Pi}_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \boldsymbol{\Pi}_{n1}&\cdots&\boldsymbol{\Pi}_{nn}\end{bmatrix}$ размерности $N\times N$ полностью характеризует взаимодействие узлов, определяемое структурой сети поставок и заданным технологическим процессом.

На практике, как правило, отсутствует информация для построения адекватной модели спроса. Одним из подходов к решению задачи управления запасами в условиях неопределенности спроса является использование концепции «неизвестных, но ограниченных» воздействий, в соответствии с которой неопределенность спроса описывается с помощью набора интервалов, в пределах которых компоненты векторной функции $\boldsymbol{d}(k)$ принимают значения произвольным образом. Границы интервалов определяются на основании статистики прошлых продаж. В результате внешние возмущения удовлетворяют ограничениям

$$\boldsymbol{d}(k)\in D=\{\boldsymbol{d}\in\mathrm{R}^{q}:\ 0\le\boldsymbol{d}^{\min}\le\boldsymbol{d}\le\boldsymbol{d}^{\max}\}, \quad (3)$$

где векторы $\boldsymbol{d}^{\min}$ и $\boldsymbol{d}^{\max}$, которые определяют граничные значения спроса, считаются известными.

Управление запасами заключается в определении моментов времени формирования заказов и размеров заказов на восполнение запасов. В работе используется модель периодической проверки, которая предполагает контроль уровня запасов и формирование заказов в каждом периоде.

Традиционным средством управления в условиях неопределенности спроса является создание страховых запасов. Размеры страховых запасов вычисляются с помощью продуктивной модели Леонтьева на основе верхних граничных значений спроса

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{*}=(\boldsymbol{I}_N-\boldsymbol{\Pi})^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{H}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{d}^{\max}. \quad (4)$$

Формула (4) имеет смысл, если матрица $\mathbf{\Pi}$ продуктивна, что имеет место тогда и только тогда, когда матрица, обратная матрице $(\boldsymbol{I}_N - \mathbf{\Pi})$, существует и ее элементы неотрицательны.

При построении модели сети поставок узлы нумеруются и группируются в соответствии со стадиями переработки сырья и полуфабрикатов, начиная с тех, на которые поступает внешний спрос. При этом любой узел слоя l является поставщиком ресурсов для узлов, принадлежащих слоям с номерами меньше l, либо узлов слоя l с номерами больше данного. Также предполагается, что ориентированный граф, представляющий модель сети поставок, не имеет циклов.

Утверждение 1. Достаточное условие продуктивности матрицы $\mathbf{\Pi}$ состоит в том, что она является нижней треугольной, на главной диагонали матрицы стоят нули, а значения элементов ниже главной диагонали являются неотрицательными.

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим сеть поставок, состоящую из двух последовательно связанных узлов, размерности которых равны 1. Тогда $N = 2$, а матрица $\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ удовлетворяет условиям утверждения. Матрица $(\boldsymbol{I}_N - \mathbf{\Pi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ является унитреугольной, а значения элементов ниже главной диагонали являются неположительными. В результате получим $(\boldsymbol{I}_N - \mathbf{\Pi})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, т.е. матрица $\mathbf{\Pi}$ является продуктивной.

Предположим, что при $N = n$, где n – произвольное натуральное число, значения элементов матрицы $(\boldsymbol{I}_N - \mathbf{\Pi})^{-1}$ являются неотрицательными. Докажем, что при $N = n+1$ элементы матрицы $\begin{bmatrix} (\boldsymbol{I}_N - \mathbf{\Pi}) & \mathbf{0}_{N\times 1} \\ \boldsymbol{V}_{1\times N} & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ также являются неотрицательными,

где $\mathbf{0}_{n\times m}$ – нулевая матрица соответствующей размерности;

$\boldsymbol{V}$ – вектор-строка с неположительными элементами.

В соответствии с формулой Фробениуса для обращения невырожденной блочной матрицы получим $\begin{bmatrix} (\boldsymbol{I}_N - \mathbf{\Pi}) & \mathbf{0}_{N\times 1} \\ \boldsymbol{V}_{1\times N} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{I}_N - \mathbf{\Pi})^{-1} & \mathbf{0}_{N\times 1} \\ -\boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_N - \mathbf{\Pi})^{-1} & 1 \end{bmatrix}$.
Нетрудно убедиться, что значения всех элементов полученной матрицы неотрицательны. Таким образом, согласно методу математической индукции, утверждение 1 справедливо для любого натурального числа N. Утверждение 1 доказано.

Для учета задержек в пополнении запасов размеры страховых запасов пересчитываются с учетом запаздываний

$$\boldsymbol{x}_i^* = h_i^{\max}\,\bar{\boldsymbol{x}}_i^*,\ i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Предполагается, что наличные уровни запасов ресурсов доступны для непосредственного измерения. Тогда закон децентрализованного управления для узла i строится в виде обратной связи по рассогласованию между наличными и страховыми уровнями запасов ресурсов

$$\boldsymbol{u}_i(k) = \boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x}_i(k) - \boldsymbol{x}_i^*), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{K}_i \in \mathrm{R}^{m_i\times n_i}$ – матрица коэффициентов обратной связи.

Уравнение узла, замкнутого обратной связью (6), представим в виде

$$\boldsymbol{x}_i(k+1) = \boldsymbol{x}_i(k) + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i\big(\boldsymbol{x}_i(k - h_i(k)) - \boldsymbol{x}_i^*\big) + \boldsymbol{G}_i\boldsymbol{w}_i(k). \tag{7}$$

Локальный критерий качества в случае бесконечного временного горизонта выбран в виде

$$J_i^\infty(k) = \sum_{t=k}^{\infty}\beta^t\Big((\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{x}_i^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_x(\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{x}_i^*) + \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}_u\boldsymbol{u}_i(t)\Big), \tag{8}$$

где $\boldsymbol{W}_x \in \mathrm{R}^{n_i\times n_i}$, $\boldsymbol{W}_u \in \mathrm{R}^{m_i\times m_i}$ – положительно определенные диагональные весовые матрицы;

$0 < \beta < 1$ – коэффициент дисконтирования.

Первое слагаемое в выражении (8) определяет размеры штрафов за отклонение текущих уровней запасов ресурсов от страховых, второе – стоимость производства и хранения ресурсов, наличие множителя β^t обеспечивает ограниченность критерия на бесконечном временном интервале.

Для системы (1), (2) с ограничениями (3) необходимо решить задачу синтеза управления (6), которое для любого допустимого спроса $\boldsymbol{d}(k) \in D$ $\forall k \ge 0$ и запаздывания $0 \le h_i(k) \le h_i^{\max}$ обеспечивает:

1) полное и своевременное удовлетворение спроса на ресурсы, то есть выполнение требования неотрицательности значений состояний

$$\boldsymbol{x}_i(k) \in X_i = \{\boldsymbol{x}_i \in \mathrm{R}^{n_i} : 0 \le \boldsymbol{x}_i\},\ i = \overline{1,n}; \tag{9}$$

2) робастную устойчивость замкнутой системы (7);

3) гарантированную стоимость управления, которая означает, что значение критерия качества (8) для замкнутого узла сети не превысит некоторого граничного значения J_i^*.

Дескрипторное преобразование модели. Чтобы упростить запись, в дальнейшем опустим индекс «i». Введем дополнительную переменную

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{x}(k+1) - \boldsymbol{x}(k) \tag{10}$$

и выполним преобразование замкнутой модели (7)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k+1) \\ \mathbf{0}_{n\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{y}(k) \\ -\boldsymbol{y}(k) + \boldsymbol{BK}\big(\boldsymbol{x}(k - h(k)) - \boldsymbol{x}^*\big) + \boldsymbol{Gw}(k) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что выполняется равенство

$$\boldsymbol{x}(k-h(k))=\boldsymbol{x}(k)-\sum_{j=k-h(k)}^{k-1}\boldsymbol{y}(j). \qquad (12)$$

Систему (11) с учетом (12) представим в виде

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(k+1)\\ \boldsymbol{0}_{n\times 1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\\ -\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{BKx}(k)-\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}+\boldsymbol{y}(k)\\ -\boldsymbol{BK}\sum_{j=k-h(k)}^{k-1}\boldsymbol{y}(j)-\boldsymbol{BKx}^*+\boldsymbol{Gw}(k)\end{matrix}\Bigg]. \qquad (13)$$

Построим составной вектор состояний дескрипторной модели $\xi(k)=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*,\,\boldsymbol{y}(k)\}$ и введем обозначения: $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}_{n\times n}\\ \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{BK} & -\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}$, $\overline{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times n}\\ \boldsymbol{BK}\end{bmatrix}$, $\overline{\boldsymbol{G}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times n}\\ \boldsymbol{G}\end{bmatrix}$.

Окончательно получим дескрипторную модель узла, замкнутого управлением (6)

$$\boldsymbol{E}\,\xi(k+1)=\boldsymbol{A}\xi(k)-\overline{\boldsymbol{B}}\sum_{j=k-h(k)}^{k-1}\boldsymbol{y}(j)+\overline{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{w}(k). \qquad (14)$$

Таким образом, если последовательность $\boldsymbol{x}(k),\ k=0,1,...$ является решением системы (7), тогда $\mathrm{col}\{\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*,\,\boldsymbol{y}(k)\},\ k=0,1,...$, где $\boldsymbol{y}(k)$ определяется в соответствии с (10), является решением системы (14) и наоборот.

Синтез гарантирующего управления запасами. Гарантирующими [7] называют управляющие воздействия, при которых гарантируется минимизация верхнего граничного значения показателя качества при любых допустимых возмущениях и любом варианте реализации неопределенности модели, то есть выполняется

$$J^*=\inf_{\boldsymbol{u}(k)\in U}\ \sup_{\boldsymbol{d}(k)\in D,\,0\le h(k)\le h^{\max}} J^{\infty}(k).$$

Для того, чтобы функционал (8) был конечен, необходимо и достаточно, чтобы система (14) была устойчива.

Определим блочную матрицу $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_2\\ \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_3\end{bmatrix}$, где $0\prec \boldsymbol{P}_j\in\mathrm{R}^{n\times n},\ j=1,2,3,\ \boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{P}_3=\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}}$, и построим для дескрипторной системы (14) функционал Ляпунова-Красовского

$$V(k)=V'(k)+V''(k), \qquad (15)$$

$$V'(k)=\beta^k\xi^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{EPE}\,\xi(k)=\beta^k(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*), \qquad (16)$$

$$V''(k)=\beta^k\sum_{i=-h^{\max}}^{-1}\ \sum_{j=k+i}^{k-1}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(j)\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{y}(j),\ 0\prec\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{n\times n}. \qquad (17)$$

Вычислим первую разность по k ФЛК (15-17) в силу системы (14):

$$\begin{aligned}
&\Delta V'(k)=V'(k+1)-V'(k)=\\
&=\beta^k\big[\beta\ (\boldsymbol{x}(k+1)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x}(k+1)-\boldsymbol{x}^*)-\\
&-(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)\ \big]=\\
&=\beta^k\big[(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}(\beta-1)\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)+\\
&+(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{BK}(\boldsymbol{x}(k-h(k))-\boldsymbol{x}^*)+\\
&+(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G}(\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{d}^*)+(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Gd}^*+\\
&+(\boldsymbol{x}(k-h(k))-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)+\\
&+(\boldsymbol{x}(k-h(k))-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{BK}(\boldsymbol{x}(k-h(k))-\boldsymbol{x}^*)+\\
&+(\boldsymbol{x}(k-h(k))-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G}(\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{d}^*)+\\
&+(\boldsymbol{x}(k-h(k))-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Gd}^*+\\
&+(\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{d}^*)^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)+\\
&+(\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{d}^*)^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{BK}(\boldsymbol{x}(k-h(k))-\boldsymbol{x}^*)+\\
&+(\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{d}^*)^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G}(\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{d}^*)+(\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{d}^*)^{\mathrm{T}}\beta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Gd}^*+\\
&+\boldsymbol{d}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)+\boldsymbol{d}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{BK}(\boldsymbol{x}(k-h(k))-\boldsymbol{x}^*)+\\
&+\boldsymbol{d}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G}(\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{d}^*)+\boldsymbol{d}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Gd}^*\big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta V''(k)=\beta^k\left[h^{\max}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Zy}(k)-\sum_{j=k-h_m}^{k-1}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(j)\boldsymbol{Zy}(j)\right]=\\
&=\beta^k\big[h^{\max}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Zy}(k)+(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)-\\
&-(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}(k-h^{\max})-\boldsymbol{x}^*)+\\
&+(\boldsymbol{x}(k-h^{\max})-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}(k-h^{\max})-\boldsymbol{x}^*)\big].
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\Delta V(k)=\Delta V'(k)+\Delta V''(k)=\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\Gamma}(h^{\max})\boldsymbol{s}(k),$$

где $\boldsymbol{s}(k)=\mathrm{col}\Big\{\beta^{k/2}(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*),\,\beta^{k/2}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}(k-h(k))-\boldsymbol{x}^*),\,\beta^{k/2}(\boldsymbol{x}(k-h^{\max})-\boldsymbol{x}^*),\,\beta^{k/2}\boldsymbol{y}(k),\,\beta^{k/2}(\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{d}^*),\,\beta^{k/2}\boldsymbol{d}^*\Big\}$;

$$\boldsymbol{\Gamma}(h^{\max})=\begin{bmatrix}
(\beta-1)\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{Z} & \beta\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \beta\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G} & \beta\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G}\\
* & \beta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \beta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G} & \beta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G}\\
* & * & \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n}\\
* & * & * & h^{\max}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n}\\
* & * & * & * & \beta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G} & \beta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G}\\
* & * & * & * & * & \beta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G}
\end{bmatrix};$$

символ «*» обозначает соответствующий блок в симметрической матрице неравенства.

Потребуем, чтобы значение ФЛК (15-17) с течением времени убывало с некоторой гарантированной скоростью, определяемой текущим значением критерия (8)

$$\Delta V(\boldsymbol{k}) \le -\beta^k (\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm T}(\boldsymbol{W}_x+\boldsymbol{K}^{\mathrm T}\boldsymbol{W}_u\boldsymbol{K})(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*). \quad (18)$$

Просуммировав левые и правые части неравенства (18) по k от 0 до ∞, получим

$$\begin{aligned} J^{\infty}(k) &\le (\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}^*)+ \\ &+h^{\max}\boldsymbol{y}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{y}(0)-\sum_{j=-h_m}^{-1}\boldsymbol{y}^{\mathrm T}(j)\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{y}(j), \end{aligned} \quad (19)$$

то есть ФЛК (15-17), вычисленный в момент времени $k=0$, определяет верхнее граничное значение критерия (8). Тогда задача синтеза гарантирующего управления эквивалентна задаче

$$\boldsymbol{u}(k)=\arg\min_{\boldsymbol{u}(k)\in U} V(0). \quad (20)$$

Классический подход к решению задачи синтеза управления, минимизирующего квадратичный критерий качества, основан на решении алгебраического уравнения Риккати и гарантирует оптимальное решение для произвольных начальных условий. Этим управление, полученное в результате решения задачи (20), отличается от классического. Чтобы получить аналогичный результат применим метод инвариантных эллипсоидов [8].

Эллипсоид, описываемый уравнением

$$E(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{Q})=\{\boldsymbol{x}\in \mathrm{R}^n : (\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)\le 1\}, \quad (21)$$

называется инвариантным по состоянию для рассматриваемой системы, если любая траектория системы, начавшись в эллипсоиде, остается в нем для любого момента времени $k\ge 0$.

По аналогии с (21) определим семейство эллипсоидов, инвариантных по состоянию с запаздыванием

$$\begin{aligned} &E_j(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{R})=\{\boldsymbol{x}\in \mathrm{R}^n : \\ &(\boldsymbol{x}(k-j)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm T}\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{x}(k-j)-\boldsymbol{x}^*)\le 1\}, \quad j=\overline{1,h^{\max}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Будем понимать сумму и разность эллипсоидов в смысле суммы и разности множеств по Минковскому [9]. Тогда сумма инвариантного эллипсоида (21) и семейства эллипсоидов (21) может рассматриваться в качестве аппроксимации множества достижимости дескрипторной системы (14), то есть позволяет характеризовать влияние внешних возмущений на траекторию системы.

Второе слагаемое в ФЛК (15-17) представим в виде

$$\begin{aligned} V''(k)=\beta^k\Big[&h^{\max}(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm T}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*)- \\ &-\sum_{i=-h^{\max}}^{-1}(\boldsymbol{x}(k-i)-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm T}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}(k-i)-\boldsymbol{x}^*)\Big]. \end{aligned} \quad (23)$$

Сравнение выражений (16) и (21), а также (23) и (22) позволяет утверждать, что если выполняются условия

$$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{Q}^{-1}, \quad \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{R}^{-1} \quad (24)$$

то сумма эллипсоида (21) и семейства эллипсоидов (22) представляет множество, которое может рассматриваться в качестве верхней оценки множества уровня ФЛК (15-17).

Таким образом, задача сводится к построению регулятора, который обеспечивает минимизацию по некоторому критерию суммы инвариантных эллипсоидов при заданных ограничениях. В качестве критерия выбрана сумма квадратов полуосей эллипсоидов, то есть сумма следа матрицы $\boldsymbol{Q}$ и следа матрицы $\boldsymbol{R}$.

Результат решения задачи синтеза оптимального гарантирующего управления запасами в сетях поставок с неопределенными запаздываниями представлен в виде теоремы.

Теорема. Рассмотрим систему (1), (2) с ограничениями (3) и пусть матрицы $\hat{\boldsymbol{Q}}\in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\hat{\boldsymbol{Y}}\in \mathrm{R}^{m\times n}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}\in \mathrm{R}^{n\times n}$ получены в результате решения задачи

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{Q}+\mathrm{tr}\boldsymbol{R}\to \min \quad (25)$$

при ограничении на матричные переменные $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm T}\succ 0$, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\succ 0$, $\boldsymbol{Y}$ и скалярный параметр $\alpha>0$

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{Q} & \beta^{1/2}\boldsymbol{Q} & \beta^{1/2}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \beta^{1/2}\boldsymbol{G} & \beta^{1/2}\boldsymbol{G} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times m} \\ * & -\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{0}_{n\times m} & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}_x^{1/2} & \boldsymbol{Y}^{\mathrm T}\boldsymbol{W}_u^{1/2} \\ * & * & \boldsymbol{0}_{m\times m} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times m} \\ * & * & * & -\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times m} \\ * & * & * & * & -h^{\max}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times m} \\ * & * & * & * & * & -\alpha\boldsymbol{Q}_w^{-1} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times m} \\ * & * & * & * & * & * & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times m} \\ * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times m} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}_{n\times m} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I}_m \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (26)$$

где $\boldsymbol{Q}_w \in \mathrm{R}^{n\times n}$ – матрица эллипсоида наименьшего объема, который аппроксимирует множество значений внешних воздействий узла.

Если задача (25) минимизации линейной функции при ограничении, представленном в виде ЛМН (26), которая является задачей полуопределенного программирования, имеет решение $\hat{\alpha}$, $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{Y}}$, то:

1) для любого начального состояния $\boldsymbol{x}(0) \geq \boldsymbol{x}^*$, любого допустимого внешнего спроса $\boldsymbol{d}(k) \in D$ $\forall k \geq 0$ и величины задержки $0 \leq h(k) \leq h^{\max}$ замкнутая дескрипторная система (14) является робастно устойчивой;

2) среди всех линейных управлений вида (6) регулятор с матрицей

$$\boldsymbol{K} = \hat{\boldsymbol{Y}}\hat{\boldsymbol{Q}}^{-1} \tag{27}$$

доставляет минимум по критерию следа матрицы сумме инвариантного эллипсоида (21) и семейства эллипсоидов (22) в момент времени k;

3) значение локального критерия качества узла, замкнутого обратной связью с матрицей (27), удовлетворяет неравенству

$$J^{\infty}(k) \leq \lambda^{\max}(\boldsymbol{Q}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}_x) + h^{\max}\lambda^{\max}(\boldsymbol{Q}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q}_x) = J^*, \tag{28}$$

где $\lambda^{\max}(\cdot)$ обозначает максимальное собственное число матрицы $(\cdot)$.

Доказательство Теоремы. Выполним аппроксимацию множества значений внешних воздействий для каждого узла эллипсоидом наименьшего объема, который задается уравнением

$$E(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{Q}_w) = \{\boldsymbol{w} \in \mathrm{R}^n : (\boldsymbol{w}(k) - \boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_w^{-1}(\boldsymbol{w}(k) - \boldsymbol{w}^*) \leq 1\}. \tag{29}$$

Матрица эллипсоида $\boldsymbol{Q}_w \in \mathrm{R}^{n\times n}$ и вектор координат центра $\boldsymbol{w}^* \in \mathrm{R}^n$ определяются в результате решения задачи полуопределенного программирования аналогично тому, как это сделано в работе [10]. При этом верхние граничные значения воздействий равны $\boldsymbol{w}^{\max} = \bar{\boldsymbol{x}}^*$, а нижние вычисляются по формуле (4) с заменой вектора $\boldsymbol{d}^{\max}$ на вектор $\boldsymbol{d}^{\min}$.

Введем обозначения:

$$f_i(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{M}_i \in \mathrm{R}^{(5n+m)\times(5n+m)}, \ i = 0, 1,$$

$$\boldsymbol{M}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \beta\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \beta\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G} & \beta\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G} \\ * & \beta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \beta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G} & \beta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G} \\ * & * & \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times q} & \boldsymbol{0}_{n\times q} \\ * & * & * & h^{\max}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0}_{n\times q} & \boldsymbol{0}_{n\times q} \\ * & * & * & * & \beta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G} & \beta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G} \\ * & * & * & * & * & \beta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{G} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Omega} = (\beta - 1)\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{W}_x + \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_u\boldsymbol{K},$$

$$\boldsymbol{M}_1 = \mathrm{block\,diag}\{\boldsymbol{0}_{n\times n}, \boldsymbol{0}_{m\times m}, \boldsymbol{0}_{n\times n}, \boldsymbol{0}_{n\times n}, \boldsymbol{Q}_w^{-1}, \boldsymbol{0}_{n\times n}\}.$$

Тогда неравенство (18), обеспечивающее убывание ФЛК (15-17) вдоль любой траектории системы (14), замкнутой управлением (6), а также неравенство (29), описывающее эллипсоид, аппроксимирующий допустимое множество значений внешних воздействий, запишем в виде $f_0(\boldsymbol{s}) \leq 0 \ \ \forall \boldsymbol{s}: \ \ f_1(\boldsymbol{s}) \leq 1$.

С учетом неущербности *S*-процедуры при одном ограничении [8] достаточным условием знакоопределенности записанных квадратичных форм является выполнение для некоторого скалярного параметра $\alpha > 0$ матричного неравенства $\boldsymbol{M}_0 \preceq \alpha\boldsymbol{M}_1$, которое представим в виде

$$\begin{bmatrix} \beta^{1/2} \\ \beta^{1/2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0}_{1\times n} \\ \boldsymbol{0}_{1\times n} \\ \beta^{1/2}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \\ \beta^{1/2}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}_1(k)\left[\beta^{1/2} \quad \beta^{1/2}\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{0}_{n\times 1} \quad \boldsymbol{0}_{n\times 1} \quad \beta^{1/2}\boldsymbol{G} \quad \beta^{1/2}\boldsymbol{G}\right] +$$

$$+\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} - \beta\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0}_{m\times m} & -\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} \\ * & \boldsymbol{0}_{m\times m} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} \\ * & * & \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} \\ * & * & * & h^{\max}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} \\ * & * & * & * & -\alpha\boldsymbol{Q}_w^{-1} & \boldsymbol{0}_{n\times n} \\ * & * & * & * & * & \boldsymbol{0}_{n\times n} \end{bmatrix} \preceq 0.$$

Используя модификацию леммы Шура для нестрогих матричных неравенств [8], последнее неравенство запишем в виде

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{P}_1^{-1} & \beta^{1/2} & \beta^{1/2}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \beta^{1/2}\boldsymbol{G} & \beta^{1/2}\boldsymbol{G} \\ * & \boldsymbol{\Omega} - \beta\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0}_{n\times m} & -\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} \\ * & * & \boldsymbol{0}_{m\times m} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times n} \\ * & * & * & \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} \\ * & * & * & * & h^{\max}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n} \\ * & * & * & * & * & -\alpha\boldsymbol{Q}_w^{-1} & \boldsymbol{0}_{n\times n} \\ * & * & * & * & * & * & \boldsymbol{0}_{n\times n} \end{bmatrix} \preceq 0.$$

Введем матричную переменную $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}$. Откуда в силу $\boldsymbol{Q} \succ 0$ матрица $\boldsymbol{K}$ восстанавливается единственным образом в соответствии с (27).

Вновь применив лемму Шура и использовав матричные переменные (24), а также применив к полученной матрице неравенства конгруэнтное преобразование с помощью блочно-диагональной матрицы $\mathrm{block\ diag}\{\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{P}_1^{-1}, \boldsymbol{I}_n, -\boldsymbol{Z}^{-1}, -\boldsymbol{Z}^{-1}, \boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{I}_n\,\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{I}_n\}$, получим ЛМН (26).

Таким образом, если задача (25) при ограничении (26) имеет допустимое решение $\hat{\alpha}$, $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{Y}}$, то закон управления в виде обратной связи

$$\boldsymbol{u}(k) = \hat{\boldsymbol{Y}}\hat{\boldsymbol{Q}}^{-1}(\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}^*) \tag{30}$$

обеспечивает оптимальное гарантирующее управление запасами локального узла сети поставок.

Верхнее граничное значение критерия качества в (19) зависит от начальных условий системы (1), (2). Чтобы устранить эту зависимость применим подход, предложенный в [11]. Предположим, что начальное состояние каждого узла сети произвольно, но принадлежит эллипсоиду

$$E(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{Q}_x) = \{\boldsymbol{x}(-i) \in \mathrm{R}^n : \\ (\boldsymbol{x}(-i) - \boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_x^{-1} (\boldsymbol{x}(-i) - \boldsymbol{x}^*) \le 1, \quad i = 0,1,..., h^{\max} \}, \quad (31)$$

вектор координат центра которого совпадает с вектором страховых запасов $\boldsymbol{x}^*$, а матрица $\boldsymbol{Q}_x$ вычисляется из условия (9) в результате решения соответствующей задачи полуопределенного программирования. Тогда оценка (19) приводит к неравенству

$$J^{\infty}(k) \le \lambda^{\max}(\boldsymbol{Q}_x^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{Q}_x) + h^{\max} \lambda^{\max}(\boldsymbol{Q}_x^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Z} \boldsymbol{Q}_x),$$

откуда с учетом обозначений (24) следует неравенство (28) для оценки верхней границы J^* показателя качества узла, замкнутого управлением (30). Теорема доказана.

Анализ устойчивости сети поставок. После того, как для каждого узла сети найдены допустимые решения задачи (25) при ограничении (26), выполняется анализ устойчивости взаимосвязанной сети поставок. Для этого применяется метод векторных функций Ляпунова и метод сравнения.

Уравнение замкнутой дескрипторной модели узла с учетом взаимосвязей (2) примет вид

$$\boldsymbol{E}_i \xi_i(k+1) = \boldsymbol{A}_i \xi_i(k) - \tilde{\boldsymbol{B}}_i \sum_{j=k-h(k)}^{k-1} \xi_i(j) + \sum_{j=1, j\ne i}^{n} \boldsymbol{B}_{ij} \boldsymbol{u}_j(k) + \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{d}(k), \quad (32)$$

где $\tilde{\boldsymbol{B}}_i = [\,\boldsymbol{0}_{2n_i \times n_i} \;\vdots\; \overline{\boldsymbol{B}_i}\,]$, $\boldsymbol{B}_{ij} = \overline{\boldsymbol{G}_i} \boldsymbol{\Pi}_{ij}$, $\boldsymbol{F}_i = \overline{\boldsymbol{G}_i} \boldsymbol{H}_i$, что после подстановки управления (6) дает

$$\boldsymbol{E}_i \xi_i(k+1) = \boldsymbol{A}_i \xi_i(k) - \tilde{\boldsymbol{B}}_i \sum_{j=k-h(k)}^{k-1} \xi_i(j) + \\ + \sum_{j=1, j\ne i}^{n} \boldsymbol{B}_{ij} \boldsymbol{K}_j (\boldsymbol{x}_j(k) - \boldsymbol{x}_j^*) + \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{d}(k).$$

Выполним расширение пространства состояний дескрипторной модели узла, для чего построим составной вектор состояний

$\overline{\xi_i}(k) = \mathrm{col}\{\xi_i(k), \xi_i(k-1), ..., \xi_i(k - h_i^{\max})\} \in \mathrm{R}^{\overline{N_i}}$, и введем блочные матрицы:

$$\overline{\boldsymbol{E}_i} = \mathrm{block\,diag}\{\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{E}_i, ..., \boldsymbol{E}_i\} \in \mathrm{R}^{\overline{N_i} \times \overline{N_i}},$$

$$\overline{\boldsymbol{A}_i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i & -\tilde{\boldsymbol{B}}_i & -\tilde{\boldsymbol{B}}_i & \cdots & -\tilde{\boldsymbol{B}}_i \\ \boldsymbol{0}_{2n_i \times 2n_i} & \boldsymbol{I}_{2n_i} & -\tilde{\boldsymbol{B}}_i & \cdots & -\tilde{\boldsymbol{B}}_i \\ \boldsymbol{0}_{2n_i \times 2n_i} & \boldsymbol{0}_{2n_i \times 2n_i} & \boldsymbol{I}_{2n_i} & \cdots & -\tilde{\boldsymbol{B}}_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0}_{2n_i \times 2n_i} & \boldsymbol{0}_{2n_i \times 2n_i} & \boldsymbol{0}_{2n_i \times 2n_i} & \cdots & \boldsymbol{I}_{2n_i} \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{\overline{N_i} \times \overline{N_i}},$$

$$\overline{\boldsymbol{F}_{ij}} = \mathrm{block\,diag}\{\boldsymbol{B}_{ij}\boldsymbol{K}_j, \boldsymbol{0}_{2n_i \times 2n_j}, ..., \boldsymbol{0}_{2n_i \times 2n_j}\} \in \mathrm{R}^{\overline{N_i} \times \overline{N_j}},$$

$$\overline{\boldsymbol{F}_i} = \left[\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}} \;\vdots\; \boldsymbol{0}_{2n_i \times q}^{\mathrm{T}} \;\vdots\; \dots \;\vdots\; \boldsymbol{0}_{2n_i \times q}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{\overline{N_i} \times q},$$

где $\overline{N_i} = 2n_i(1 + h_i^{\max})$.

Расширенную дескрипторную модель узла представим в виде

$$\overline{\boldsymbol{E}_i}\,\overline{\xi_i}(k+1) = \overline{\boldsymbol{A}_i}\,\overline{\xi_i}(k) + \sum_{j=1, j\ne i}^{n} \overline{\boldsymbol{F}_{ij}}\,\overline{\xi_j}(k) + \overline{\boldsymbol{F}_i}\boldsymbol{d}(k). \quad (33)$$

Для сети поставок, состоящей из взаимосвязанных узлов, описываемых уравнением (33), построим векторную функцию Ляпунова

$$\Psi(k) = \mathrm{col}\{V_1(k), ..., V_n(k)\}, \quad (34)$$

компонентами которой являются ФЛК отдельных узлов в форме (15-17). На основе векторной функции (34) строится общая функция Ляпунова

$$V_0(k) = \sum_{i=0}^{n} p_{0i} V_i(k) = \boldsymbol{P}_0 \Psi(k), \quad (35)$$

где $\boldsymbol{P}_0 = [p_{01}, ..., p_{0n}] \in \mathrm{R}^{1\times n}$, $p_{0i} > 0$, $i = \overline{1,n}$.

Сопоставим набору локальных подсистем линейную систему сравнения, обусловленную разностными уравнениями:

$$\boldsymbol{\upsilon}(k+1) = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\upsilon}(k), \quad \boldsymbol{\upsilon}(0) = \Psi(0), \\ \eta(k) = \boldsymbol{P}_0\, \boldsymbol{\upsilon}(k), \quad (36)$$

где $\boldsymbol{\upsilon}(k) \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояний системы сравнения;

$\eta(k)$ – скалярная функция, которая является выходом системы сравнения;

$\boldsymbol{\Lambda} \in \mathrm{R}^{n\times n}$ – матрица динамики с неотрицательными элементами.

Квадратичные формы $V_i(\overline{\boldsymbol{F}_{ij}}(k))$ и $V_j(k)$ определяют пучок форм $V_i(\overline{\boldsymbol{F}_{ij}}(k)) - \mu V_j(k)$, где μ – некоторый параметр. Вычисление элементов матрицы $\boldsymbol{\Lambda}$ выполняется по характеристическим уравнениям пучков квадратичных форм [12]:

$$\det(\overline{\boldsymbol{A}_i}^{\mathrm{T}}\, \overline{\boldsymbol{P}_i}\, \overline{\boldsymbol{A}_i} - \mu_{ii} \overline{\boldsymbol{P}_i}) = 0, \; i = \overline{1,n}, \\ \det(\overline{\boldsymbol{F}_{ij}}^{\mathrm{T}}\, \overline{\boldsymbol{P}_i}\, \overline{\boldsymbol{F}_{ij}} - \mu_{ij} \overline{\boldsymbol{P}_j}) = 0, \; i, j = \overline{1,n}, \; j \ne i,$$

где $[\boldsymbol{\Lambda}]_{ij} = (\mu_{ij}^{\max})^{1/2}$, $\mu_{ij}^{\max}$ – максимальное значение корня соответствующего уравнения;

$$\overline{\boldsymbol{P}_i} = \mathrm{block\,diag}\{\boldsymbol{E}_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{1i} & \boldsymbol{P}_{2i} \\ \boldsymbol{P}_{2i}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_{3i} \end{bmatrix} \boldsymbol{E}_i, \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{n_i} & \boldsymbol{Z}_i \\ \boldsymbol{0}_{n_i} & \boldsymbol{0}_{n_i} \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{n_i} & \boldsymbol{Z}_i \\ \boldsymbol{0}_{n_i} & \boldsymbol{0}_{n_i} \end{bmatrix}\},$$

$\overline{\boldsymbol{P}_i} \in \mathrm{R}^{\overline{N_i} \times \overline{N_i}}$, матрицы $\boldsymbol{P}_{1i}$ блочных матриц $\boldsymbol{P}_i$ вычисляются в соответствии с (24) после решения задач (25), матрицы $\boldsymbol{P}_{2i}$ и $\boldsymbol{P}_{3i}$ выбираются произвольно, так как они не оказывают влияния на результат.

В результате для векторной (34) и общей (35) функций Ляпунова сети поставок выполняются неравенства:

$$\Psi(k) \le \boldsymbol{\upsilon}(k), \quad V_0(k) \le \eta(k).$$

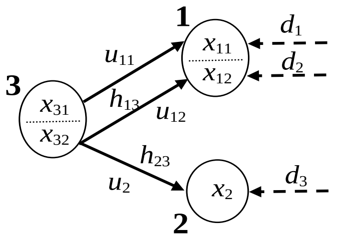
Таким образом, система сравнения (36) покомпонентно мажорирует векторную и общую функции Ляпунова, построенные для управляемой сети поставок. В результате анализ устойчивости децентрализованной системы управления запасами в сети поставок сводится к анализу устойчивости линейной положительной системы сравнения (36). Следовательно для обеспечения устойчивости управляемой сети поставок, узлы которой замкнуты обратными связями с регуляторами, матрицы которых вычисляются на основании (27), необходимо выбирать такие значения весовых матриц локальных критериев качества (8), при которых выполняется условие

$$\sigma(\mathbf{\Lambda}) < 1, \qquad (37)$$

где $\sigma(\cdot)$ – спектральный радиус матрицы $(\cdot)$.

Численный пример. В качестве примера исследуется компания, занимающаяся продажей алкогольной продукции. Данные для моделирования предоставлены компанией CloudWorks LTD, г. Харьков (http://www.cloudwk.com/), которая разрабатывает программное обеспечение для автоматизированных систем управления запасами. Для моделирования выбраны два наиболее популярных вида продукции, продажи которых осуществляются независимо друг от друга. Структура сети поставок представлена на рис. 1.

В настоящее время узел 1 реализует два вида продукции x_{11} и x_{12}, и пополняет их запасы напрямую со склада 3. Период дискретизации равен 1 суткам. Время выполнения заказа h_{13} составляет от 2 до 6 суток. Узел 2 реализует продукцию x_2 и пополняет запасы со склада 3. Время выполнения заказа h_{23} составляет от 2 до 4 суток. Дуги d_1, d_2 и d_3, изображенные пунктиром, обозначают внешний спрос (см. рис. 1, *а*).



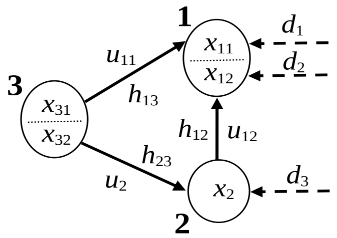


Рис. 1 – Структура сети поставок: *а* – существующая; *б* – предлагаемая

Компанию интересует вопрос оптимизации процесса транспортировки путем отправки продукции x_{12} в узел 2, для которого узел 1 будет формировать заказы на ее поставку (см. рис. 1, *б*). Время выполнения заказов h_{12} составляет от 1 до 2 суток.

Размерности модели равны $n_1 = m_1 = 2$, $n_2 = m_2 = 1$, $n_3 = m_3 = 2$, $N = 5$. Варианту *а* соответствуют следующие значения матриц, описывающих взаимосвязи между узлами: $\mathbf{\Pi}_{21} = [0\ 0]$, $\mathbf{\Pi}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{\Pi}_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; варианту *б*: $\mathbf{\Pi}_{21} = [0\ 1]$, $\mathbf{\Pi}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{\Pi}_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Матрицы влияния внешнего спроса равны: $\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{H}_2 = [0\ 0\ 1]$, $\boldsymbol{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

На основе информации об объемах продаж за первые 50 дней 2017 года определены граничные значения спроса $\boldsymbol{d}^{\max} = \mathrm{col}\{112; 326; 263\}$ и $\boldsymbol{d}^{\min} = \mathrm{col}\{6; 19; 22\}$.

В соответствии с (4), (5) определены размеры страховых запасов ресурсов для обоих вариантов, которые выбраны в качестве начального состояния системы $x_a(0) = x_a^* = \mathrm{col}\{672; 1956; 1052; 112; 589\}$, $x_б(0) = x_б^* = \mathrm{col}\{672; 652; 2356; 112; 589\}$. Нетрудно убедиться, что суммарные размеры страховых запасов в обоих вариантах совпадают, они лишь по разному распределены между узлами сети.

Численное решение соответствующих задач полуопределенного программирования выполнено в среде MATLAB с помощью свободно распространяемого пакета cvx [13]. В результате определены параметры эллипсоидов (29), аппроксимирующих множества значений внешних воздействий для каждого узла сети.

Для 1-го узла получены такие результаты: вариант *а*:

$$\boldsymbol{Q}_{w_1} = \mathrm{diag}\{5{,}616 \cdot 10^3; 4{,}713 \cdot 10^4\}, \boldsymbol{w}_1^* = \mathrm{col}\{59; 172{,}5\};$$

вариант *б*: для разных видов продукции задачи решены независимо (величины запаздывания отличаются), в результате эллипсоиды вырождаются в отрезки:

$$\boldsymbol{Q}_{w_{11}} = 2{,}809 \cdot 10^3,\ \boldsymbol{w}_{11}^* = 59,$$

$$\boldsymbol{Q}_{w_{12}} = 2{,}356 \cdot 10^4,\ \boldsymbol{w}_{12}^* = 172{,}5.$$

Для 2-го узла эллипсоид также вырождается в отрезок: вариант *а*: $\boldsymbol{Q}_{w_2} = 1{,}452 \cdot 10^4$, $\boldsymbol{w}_2^* = 142{,}5$; вариант *б*: $\boldsymbol{w}_2^* = 315$, $\boldsymbol{Q}_{w_2} = 7{,}508 \cdot 10^4$.

Для 3-го узла параметры эллипсоида в обоих вариантах совпадают:

$$\boldsymbol{w}_3^* = \mathrm{col}\{59; 315\},\ \boldsymbol{Q}_{w_3} = \mathrm{diag}\{5{,}616 \cdot 10^3; 1{,}502 \cdot 10^5\}.$$

Величины запаздываний $h_{13}(k) \in [2; 6]$, $h_{23}(k) \in [2; 4]$ и $h_{12}(k) \in [1; 2]$ в каждом периоде генерировалась случайным образом, $\beta = 0{,}8$.

Используя результаты решения для каждого узла задачи (25) при ограничении (26), в соответствии с (27) вычислены матрицы регуляторов для варианта *а*:

$$\boldsymbol{K}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}139 & -0{,}167 \\ -0{,}033 & -0{,}192 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}_2 = -0{,}243,$$

$$\boldsymbol{K}_3 = \begin{bmatrix} -0{,}143 & -0{,}243 \\ 0{,}341 & -0{,}699 \end{bmatrix};$$ и варианта *б*: $\boldsymbol{K}_{11} = -0{,}242$,

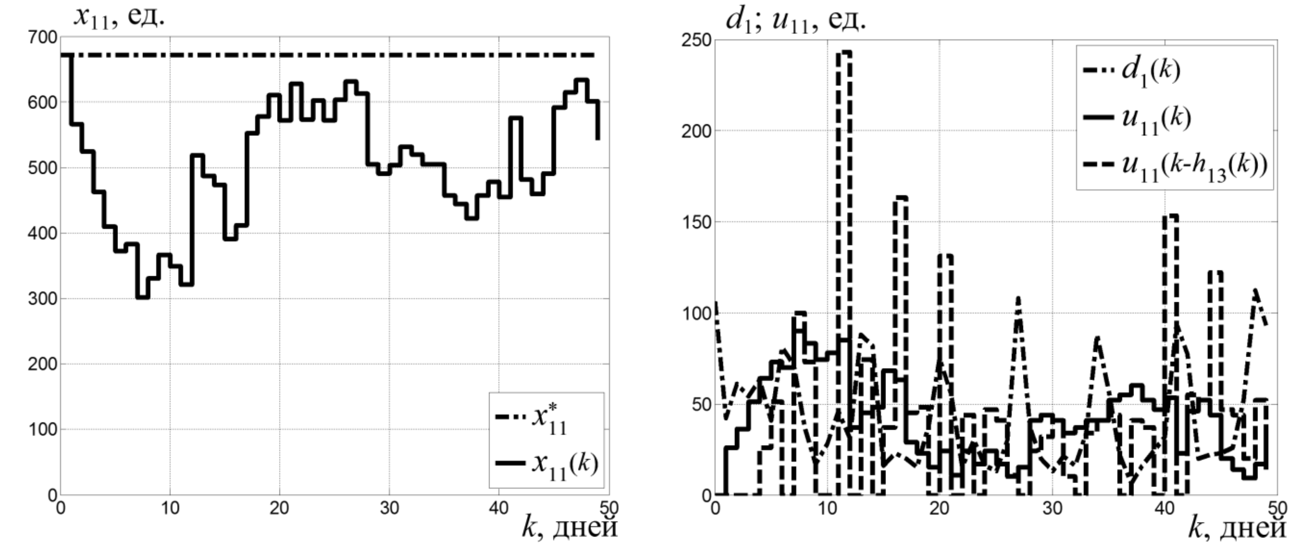
$$\boldsymbol{K}_{12} = -0{,}420,\ \boldsymbol{K}_2 = -0{,}222,\ \boldsymbol{K}_3 = \begin{bmatrix} -0{,}119 & -0{,}201 \\ 0{,}341 & -0{,}699 \end{bmatrix}.$$

Для модели сети поставок в обоих вариантах построена система сравнения. Матрица динамики системы сравнения для варианта *б* равна

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 5{,}145\cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}050\cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}164\cdot 10^{-1} & 5{,}010\cdot 10^{-4} & 0 \\ 3{,}353\cdot 10^{-1} & 0 & 3{,}333\cdot 10^{-1} & 7{,}646\cdot 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

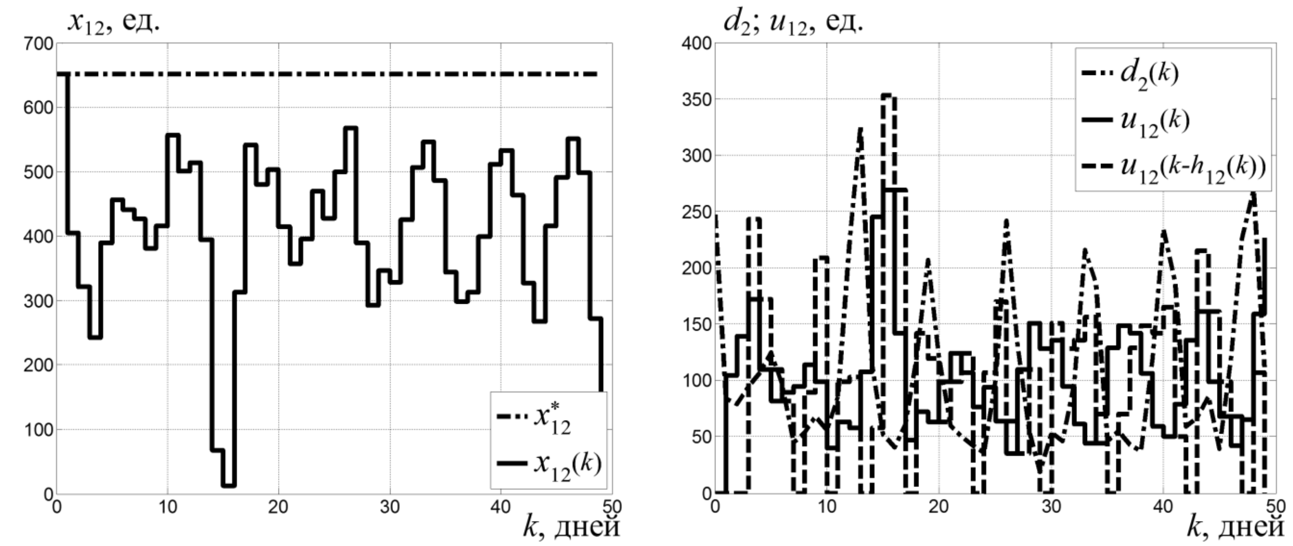
Нетрудно убедиться, что условие устойчивости (37) выполняется. Таким образом, система сравнения, а, следовательно, и управляемая сеть поставок являются устойчивыми.

Результаты моделирования для варианта *б* приведены на рис. 2 – рис. 4, где *а* – значения страхового и наличного уровней запасов; *б* – значения спроса, номинального и реального (с учетом запаздывания) управляющих воздействий.



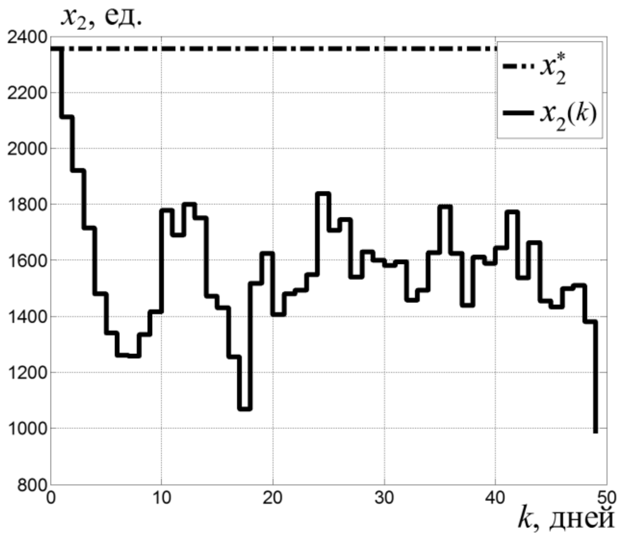
а *б*

Рис. 2 – Графики изменения размеров запасов продукции x_{11}

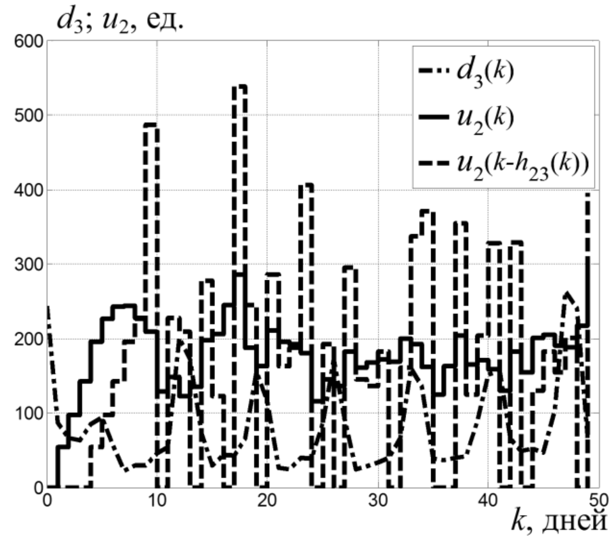


а *б*

Рис. 3 – Графики изменения размеров запасов продукции x_{12}



а



б

Рис. 4 – Графики изменения размеров запасов продукции x_2

Из графиков видно, что наличие запаздываний приводит к пропускам в поставках и неравномерности размеров поставок вследствие объединения заказов, сделанных в разных периодах. Однако, предложенная стратегия управления запасами обеспечивает отсутствие дефицита ресурсов в узлах сети, а также гарантированные размеры затрат на производство и хранение ресурсов.

Значение критерия качества, полученное путем суммирования значений локальных критериев, вычисленных в соответствии с (8), для варианта *б* равно $J_\Sigma^\infty(k) = 2{,}585 \cdot 10^6$, что на 40,8 % меньше значения, полученного для варианта *а*. Таким образом, схема транспортировки ресурсов, представленная на рис. 1, *б*, является более выгодной. Верхнее граничное значение критерия, полученное путем суммирования локальных граничных значений, вычисленных в соответствии с (28), равно $J_\Sigma^* = 3{,}157 \cdot 10^7$.

Выводы. В статье предложен подход к решению задачи синтеза децентрализованного гарантирующего управления запасами в сетях поставок с неопределенными транспортными запаздываниями в условиях действия «неизвестного, но ограниченного» спроса. С помощью дескрипторного преобразования дискретной модели узла сети поставок в пространстве состояний получена модель без запаздываний. Путем построения для дескрипторной модели узла функционала Ляпунова-Красовского, зависящего от максимальной величины запаздывания, получено условие существования гарантирующего регулятора, реализующего локальный закон управления в виде линейной обратной связи по рассогласованию между наличными и страховыми уровнями запасов ресурсов. На основе метода инвариантных эллипсоидов с помощью техники ЛМН задача синтеза гарантирующего регулятора, который минимизирует верхнее граничное значение квадратичного критерия качества, сведена к задаче полуопределенного программирования. Для анализа устойчивости управляемой сети поставок применяется метод векторных функций Ляпунова и метод сравнения.

Список литературы

1. *Zhu X. L.* New results of stability analysis for systems with time-varying delay / *X. L. Zhu, G. H. Yang* // Int. J. Robust Nonlinear Control. – 2010. – Vol. 20. – P. 596–606.
2. *Liu X. G.* Delay-dependent robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay / *X. G. Liu, R. R. Martin, M. Wu, M. L. Tang* // IEE Proc.: Control Theory and Applications. – 2006. – Vol. 153(6). – P. 689–702.
3. *Wu V.* Stability analysis and robust control of time-delay systems / *V. Wu, Y. He, J.-H. She* // New York : Springer, 2010. – 335 p.
4. *Баландин Д. В.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / *Д. В. Баландин, М. М. Коган*. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 280 с.
5. *Fridman E.* A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems / *E. Fridman, U. Shaked* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2002. – Vol. 47. – P. 253–270.
6. *Zhang W.* Robust stability test for uncertain discrete-time systems: a descriptor system approach / *W. Zhang, H. Su, Y. Liang, Z. Han* // Lat. Am. Appl. Res. – 2011. – Vol. 41. – No. 4. – P. 359–364.
7. *Афанасьев В. Н.* Гарантирующее управление нелинейными объектами / *В. Н. Афанасьев*. – М. : Московский государственный институт электроники и математики, 2012. – 170 с.
8. *Поляк Б. Т.* Управление линейными системами при внешних возмущениях (техника линейных матричных неравенств) / *Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков*. – М. : ЛЕНАНД, 2014. – 560 с.
9. *Половинкин Е. С.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / *Е. С. Половинкин, М. В. Балашов*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 416 с.
10. *Дорофеев Ю. И.* Синтез системы оптимального управления запасами с дискретным ПИД-регулятором с использованием линейных матричных неравенств / *Ю. И. Дорофеев* // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Харків : ХУПС, 2014. – Вип. 4(41). – С. 34–41.
11. *Petersen I. R.* Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain linear systems / *I. R. Petersen, D. C. McFarlane, M. A. Rotea* // Int. J. Robust Nonlinear Control. – 1998. – Vol. 8. – P. 649–657.
12. *Бобцов А. А.* Управление непрерывными и дискретными процессами / *А. А. Бобцов, Г. И. Болтунов, С. В. Быстров, В. В. Григорьев*. – СПб : СПбГУ ИТМО, 2010. – 175 с.
13. *Grant M.* CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.1 / *M. Grant, S. Boyd*. – Режим доступа : http://cvxr.com/cvx. – Дата обращения: 20 сентября 2017.

References (transliterated)

1. Zhu X. L., Yang G. H.. New results of stability analysis for systems with time-varying delay. *Int. J. Robust Nonlinear Control,* 2010, vol. 20, pp. 596–606.
2. Liu X. G., Martin R. R., Wu M., Tang M. L. Delay-dependent robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay. *IEE Proc.: Control Theory and Applications,* 2006, vol. 153, no. 6, pp. 689–702.
3. Wu V., He Y., She J.-H. *Stability analysis and robust control of time-delay systems.* New York, Springer, 2010. 335 p.
4. Balandyn D. V., Kohan M. M. *Sintez zakonov upravleniya na osnove linejnykh matrichnykh neravenstv* [Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 280 p.
5. Fridman E., Shaked U. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems. *IEEE Trans. Automat. Control,* 2002, vol. 47, pp. 253–270.
6. Zhang W., Su H., Liang Y., Han Z. Robust stability test for uncertain discrete-time systems: a descriptor system approach. *Lat. Am. Appl. Res.,* 2011, vol. 41, no. 4, pp. 359–364.
7. Afanas'ev V. N. *Garantiruyushhee upravlenie nelinejnymi ob"ektami* [Guaranteed cost control of nonlinear objects]. Moscow, Moskovskij gosudarstvennyj institut ehlektroniki i matematiki Publ., 2012. 170 p.
8. Polyak B. T., Hlebnikov M. V., Shcherbakov P. S. *Upravlenie linejnymi sistemami pri vneshnih vozmushcheniyah (tekhnika linejnyh matrichnyh neravenstv)* [Control of linear systems under external perturbations (the technique of linear matrix inequalities)]. Moscow, LENAND Publ., 2014. 560 p.
9. Polovinkin E. S., Balashov M. V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* [Elements of convex and strongly convex analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 416 p.
10. Dorofieiev Y. I. Sintez sistemy optimal'nogo upravleniya zapasami s diskretnym PID-regulyatorom s ispol'zovaniem LMN [Synthesis of the optimal inventory control system with a discrete PID-controller using LMI]. *Zbirnyk naukovykh prats' Kharkivs'koho universytetu Povitryanykh Syl* [Collection of scientific works of Kharkiv University of Air Forces]. Kharkiv, 2014, vol. 4 (41), pp. 34–41.
11. Petersen I. R., McFarlane D. C., Rotea M. A. Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain linear systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control,* 1998, vol. 8, pp. 649–657.
12. Bobtsov A. A., Boltunov G. I., Bystrov S. V., Grigor'ev V. V. *Upravlenie nepreryvnymi i diskretnymi protsessami* [Control of continuous and discrete processes]. Sankt-Peterburg, SPbGU ITMO Publ., 2010. 175 p.
13. Grant M., Boyd S. (2017), CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.1. Available at: http://cvxr.com/cvx. (accessed 20.09.2017).

Поступила (received) 01.11.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Дескрипторний підхід до синтезу децентралізованого гарантуючого управління запасами в мережах поставок з невизначеними запізненнями / Ю. І. Дорофєєв, А. О. Нікульченко // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 51 (1272). – С. 21–31. – Бібліогр.: 13 назв. – ISSN 2079-0023.

Дескрипторный подход к синтезу децентрализованного гарантирующего управления запасами в сетях поставок с неопределенными запаздываниями / Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 51 (1272). – С. 21–31. – Библиогр.: 13 назв. – ISSN 2079-0023.

Descriptor system approach to the synthesis of decentralized guaranteed cost inventory control in supply networks with uncertain delays / Y. I. Dorofieiev, A. A. Nikulchenko // Bulletin of National Technical University "KhPI". Series: System analysis, control and information technology. – Kharkov : NTU "KhPI", 2017. – No. 51 (1272). – P. 21–31. – Bibliogr.: 13. – ISSN 2079-0023.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Дорофєєв Юрій Іванович – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій; тел.: (057) 707-61-03; e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu.

Дорофеев Юрий Иванович – доктор технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», профессор кафедры системного анализа и информационно-аналитических технологий; тел.: (057) 707-61-03; e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu.

Dorofieiev Yuri Ivanovych – Doctor of Technical Sciences, Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Professor at the Department of System Analysis and Informative - Analytical Technologies; tel.: (057) 707-61-03; e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu.

Нікульченко Артем Олександрович – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», асистент кафедри комп'ютерної математики та аналізу даних; тел.: (057) 707-63-51; e-mail: an@cloudwk.com.

Никульченко Артем Александрович – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ассистент кафедры компьютерной математики и анализа данных; тел.: (057) 707-63-51; e-mail: an@cloudwk.com.

Nikulchenko Artem Aleksandrovych – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Assistant at the Department of Computer Mathematics and Data Analysis; tel.: (057) 707-63-51; e-mail: an@cloudwk.com.