

А. С. МАЗМАНИШВИЛИ, А. Ю. СИДОРЕНКО

**АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО 3D-ПОЛЯ:  
ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ВИЗУАЛИЗАЦИЯ**

Розглянуто тривимірне поле, що володіє властивостями стаціонарності, нормальності та марковості. На основі ієрархічного підходу проведено ймовірнісний аналіз випадкових величин, процесів та полів, що розглядаються. Побудовано та статистично обґрунтовано алгоритм генерації такого поля в паралелепіпеді. Наведено чисельний приклад реалізації запропонованого алгоритму. Побудовано тривимірне нормальне марківське поле в об'ємі.

**Ключові слова:** тривимірне поле в об'ємі, статистичні розподіли, стаціонарність, нормальність, марковість, алгоритм генерації, візуалізація, чисельний приклад.

Рассмотрено трехмерное поле, обладающее свойствами стационарности, нормальности и марковости. На основе иерархического подхода проведен вероятностный анализ рассматриваемых случайных величин, процессов и полей. Построен и статистически обоснован алгоритм генерации такого поля в параллелепипеде. Приведен численный пример реализации предложенного алгоритма. Построено трехмерное нормальное марковское поле в объеме.

**Ключевые слова:** трехмерное поле в объеме, статистические распределения, стационарность, нормальность, марковость, алгоритм генерации, визуализация, численный пример.

A three-dimensional field with properties of stationary, normality and Markov process is considered. In the paper is considered a three-dimensional field, which has the properties of stationarity, normality, and process of Markov. The analysis is based on the equation of motion of the amplitude of a three-dimensional field with a generating three-dimensional field possessing the properties of three-dimensional white noise. For a random variable, the amplitudes of a three-dimensional normal Markov field of the first order in the volume, transition conditional probability density densities are obtained together with the unconditional probability distribution density. On their basis, an algorithm for generating such a field in a parallelepiped is constructed and justified. A numerical example of the implementation of the proposed algorithm is given.

**Keywords:** three-dimensional field in volume, statistical distribution, stationary, normality, process of Markov, generation algorithm, visualization, numerical example.

**Введение.** В прикладных физических и технических задачах широко применяется нормальный марковский процесс (НМП) [1]. Подробное обоснование свойств НМП имеется в классической работе [2]. Схема перехода от уравнений движения к их интегральным аналогам и построение рекуррентных алгоритмов численной генерации НМП, обоснование характеристик, синтезированного алгоритма приведено в [3]. Обобщение одномерного НМП на случай двумерного марковского поля (ДНМП) описано в [4] применительно к задачам двумерной фильтрации. Описание физических свойств объектов типа ДНМП изложено в [5]. Алгоритм генерации ДНМП на плоскости приведен в [6].

В настоящей работе построен алгоритм генерации трехмерного стационарного нормального марковского поля.

**Динамические уравнения движения и основные статистические соотношения.**

Рассмотрим параллелепипед, который совместим с декартовой системой координат, и изучим нормальные марковские флуктуации в нем. В основу рассмотрения марковских нормальных полей в объеме положим иерархический принцип. А именно, уже построенные поля на оси и на плоскости используем в качестве граничных условий при синтезе поля в объеме. Изучение нормального марковского поля (НМ-поля) в объеме начнем с динамического уравнения движения. Для амплитуды  $h(x, y, z)$  НМ-поля  $H(x, y, z)$  с парциальными декрементами  $\nu$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  динамическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{d}{dx} + \nu\right)\left(\frac{d}{dy} + \mu\right)\left(\frac{d}{dz} + \lambda\right)h(x, y, z) = u_{XYZ}(x, y, z) \quad (1)$$

с начальным условием в вершинной точке  $(0,0,0)$

$$h(0,0,0) = u_0, \quad (2)$$

с граничными условиями на ребрах  $0x$ ,  $0y$  и  $0z$  вида

$$\left(\frac{d}{dx} + \nu\right)h(x, y, z) = u_X(x), \quad (3a)$$

$$\left(\frac{d}{dy} + \mu\right)h(x, y, z) = u_Y(y), \quad (3b)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + \lambda\right)h(x, y, z) = u_Z(z), \quad (3c)$$

а также граничными условиями на гранях  $x0y$ ,  $x0z$  и  $y0z$

$$\left(\frac{d}{dx} + \nu\right)\left(\frac{d}{dy} + \mu\right)h(x, y, z) = u_{XY}(x, y), \quad (4a)$$

$$\left(\frac{d}{dx} + \nu\right)\left(\frac{d}{dz} + \lambda\right)h(x, y, z) = u_{XZ}(x, z), \quad (4b)$$

$$\left(\frac{d}{dy} + \mu\right)\left(\frac{d}{dz} + \lambda\right)h(x, y, z) = u_{YZ}(y, z). \quad (4c)$$

В уравнении (1)  $u_{XYZ}(x, y, z)$  – белый шум,

реализующийся в объеме и имеющий нулевое математическое ожидание и интенсивность  $\sigma_{U_0}$ .

Начальным условием в вершине к уравнению (1) служит случайная величина  $u_0$ , подчиняющаяся нормальному закону

$$f_{U_0}(u_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{U_0}} \exp\left(-\frac{u_0^2}{2\sigma_{U_0}^2}\right), \quad -\infty < u_0 < \infty, \quad (5)$$

с дисперсией  $\sigma_{U_0}^2$ .

В выражениях (3)  $u_X(x)$  – белый шум, реализующийся на ребре  $0x$ ,  $u_Y(y)$  – белый шум, реализующийся на ребре  $0y$  и  $u_Z(z)$  – белый шум, реализующийся на ребре  $0z$ , соответственно. Эти шумы имеют нулевые математические ожидания и интенсивности  $\sigma_{U_X}$ ,  $\sigma_{U_Y}$  и  $\sigma_{U_Z}$ .

Реализация шума  $u_X(x)$  осуществляется на ребре  $0x$ , таким образом, первое граничное условие в (3) справедливо для любых значений координат  $y$  и  $z$ . Аналогично, реализация шума  $u_Y(y)$  осуществляется на ребре  $0y$ , таким образом, второе граничное условие в (3) справедливо для любых значений координаты  $x$  и  $z$ . Так же реализация шума  $u_Z(z)$  осуществляется на ребре  $0z$ , таким образом, третье граничное условие в (2) справедливо для любых значений координат  $x$  и  $y$ .

В выражениях (4)  $u_{XY}(x, y)$  – белый шум, реализующийся на грани  $x0y$ ,  $u_{XZ}(x, z)$  – белый шум, реализующийся на грани  $x0z$ , и  $u_{YZ}(y, z)$  – белый шум, реализующийся на грани  $y0z$ . Реализация шума  $u_{XY}(x, y)$  осуществляется на грани  $x0y$ , таким образом, первое граничное условие в (4) справедливо для любых значений координаты  $z$ . Аналогично, реализация шума  $u_{XZ}(x, z)$  осуществляется на грани  $x0z$ , таким образом, второе граничное условие в (4) справедливо для любых значений координаты  $y$ . Так же реализация шума  $u_{YZ}(y, z)$  осуществляется на грани  $y0z$ , таким образом, третье граничное условие в (4) справедливо для любых значений координаты  $x$ .

Структура рассматриваемого белого шума такова, что на гранях белые шумы реализуются независимо,

$$u_{XYZ}(x, y, z) = u_{XY}(x, y)u_{XZ}(x, z)u_{YZ}(y, z), \quad (6)$$

это их свойство окажется важным в дальнейшем. Независимыми являются так же и шумы на ребрах-осях:

$$\begin{aligned} u_{XY}(x, y) &= u_X(x)u_Y(y), \\ u_{XZ}(x, z) &= u_X(x)u_Z(z), \\ u_{YZ}(y, z) &= u_Y(y)u_Z(z). \end{aligned} \quad (7)$$

Формальное решение уравнения (1) с условиями (2) – (4) следующее

$$h(x, y, z) = h(0,0,0) \exp(-vx - \mu y - \lambda z) + I_X + I_Y + I_Z + I_{XY} + I_{XZ} + I_{YZ} + I_{XYZ}, \quad (8)$$

$$\text{где } I_X = \int_0^x \exp(-vx + vx') u_X(x') dx',$$

$$I_Y = \int_0^y \exp(-\mu y + \mu y') u_Y(y') dy',$$

$$I_Z = \int_0^z \exp(-\lambda z + \lambda z') u_Z(z') dz',$$

$$I_{XY} = \int_0^x dx' \exp(-vx + vx') \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') u_{XY}(x', y'),$$

$$I_{XZ} = \int_0^x dx' \exp(-vx + vx') \int_0^z dz' \exp(-\lambda z + \lambda z') u_{XZ}(x', z'),$$

$$I_{YZ} = \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') \int_0^z dz' \exp(-\lambda z + \lambda z') u_{YZ}(y', z'),$$

$$\begin{aligned} I_{XYZ} &= \int_0^x dx' \exp(-vx + vx') \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') \times \\ &\times \int_0^z dz' \exp(-\lambda z + \lambda z') u_{XYZ}(x', y', z'). \end{aligned}$$

Рассмотрим статистические свойства слагаемых в решении (8). Как видно из (8), решение для поля  $h(x, y, z)$  линейно зависит от порождающего процесса  $u(x, y, z)$ , обладающего свойствами белого шума. Поэтому амплитуда порожденного поля  $h(x, y, z)$  будет подчиняться нормальному закону. При этом безусловное среднее поля  $h(x, y, z)$  будет равно нулю, а его дисперсия  $\sigma_h^2$  будет связана с дисперсией  $\sigma_{U_0}^2$ .

Первое из условий к уравнению (1) связано с вершинным начальным условием (2). Следующие три слагаемых  $I_X$ ,  $I_Y$ , и  $I_Z$  обеспечивают выполнение граничных условий на ребрах параллелепипеда. Например, для  $I_X$  это условие в интегральной форме имеет вид

$$\begin{aligned} I_X &= \int_0^x \exp(-vx + vx') u_X(x') dx' = \\ &= h(x, y, z) - h(0, y, z) \exp(-vx). \end{aligned} \quad (9)$$

Эта добавка в решение (8) удовлетворяет соотношению, справедливому для НМП, реализующегося вдоль оси  $0x$ , при этом, как было отмечено, само это соотношение выполняется для любых координат  $y$  и  $z$ .

Для  $I_Y$  это условие в интегральной форме имеет вид

$$I_Y = \int_0^y \exp(-\mu y + \mu y') u_Y(y') dy' = h(x, y, z) - h(x, 0, z) \exp(-\mu y). \quad (10)$$

Эта добавка в решение (8) удовлетворяет соотношению, справедливому для НМП, реализующегося вдоль оси  $Oy$ , само это соотношение выполняется для любых координат  $x$  и  $z$ .

Для  $I_Z$  это условие в интегральной форме имеет вид

$$I_Z = \int_0^z \exp(-\lambda z + \lambda z') u_Z(z') dz' = h(x, y, z) - h(x, y, 0) \exp(-\lambda z). \quad (11)$$

Эта добавка в решение (8) удовлетворяет соотношению, справедливому для НМП, реализующегося вдоль оси  $Oz$ , само это соотношение выполняется для любых координат  $x$  и  $y$ .

Следующие три слагаемых  $I_{XY}$ ,  $I_{XZ}$  и  $I_{YZ}$  обеспечивают выполнение граничных условий на гранях параллелепипеда. Например, для  $I_{XY}$  это условие в интегральной форме имеет вид, справедливый при любом  $z$

$$h(x, y, z) - h(0, 0, 0) \exp(-vx - \mu y) = \int_0^x \exp(-vx + vx') u_X(x') dx' + \int_0^y \exp(-\mu y + \mu y') u_Y(y') dy' + \int_0^x dx' \exp(-vx + vx') \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') u_{XY}(x', y'). \quad (12)$$

Также, для  $I_{XZ}$  справедливо при любом  $y$ :

$$h(x, y, z) - h(0, 0, 0) \exp(-vx - \lambda z) = \int_0^x \exp(-vx + vx') u_X(x') dx' + \int_0^z \exp(-\lambda z + \lambda z') u_Z(z') dz' + \int_0^x dx' \exp(-vx + vx') \int_0^z dz' \exp(-\lambda z + \lambda z') u_{XZ}(x', z'). \quad (13)$$

Наконец, для  $I_{YZ}$  справедливо при любом  $x$ :

$$h(x, y, z) - h(0, 0, 0) \exp(-\mu y - \lambda z) = \int_0^y \exp(-\mu y + \mu y') u_Y(y') dy' + \int_0^z \exp(-\lambda z + \lambda z') u_Z(z') dz' + \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') \int_0^z dz' \exp(-\lambda z + \lambda z') u_{YZ}(y', z'). \quad (14)$$

### Вероятностные свойства амплитуды трехмерного нормального марковского поля.

Теперь для удобства записи будем считать, что объемное поле покрыто сеткой и перейдем от непрерывной координаты  $x$  к набору  $\{x_n\}$ , от непрерывной координаты  $y$  к набору  $\{y_m\}$  и от непрерывной координаты  $z$  к набору  $\{z_k\}$ , при этом индексы  $n$ ,  $m$  и  $k$  отсчитываются от нуля. Тогда,

перейдем в решении (8) к индексной записи. С этой целью будем считать точку с координатами  $(0, 0, 0)$  точкой с индексами  $(n-1, m-1, k-1)$ , а точку  $(x, y, z)$  – точкой с индексами  $(n, m, k)$ .

Обозначим парциальные корреляторы через

$$\begin{aligned} p &= \exp(-v(x_n - x_{n-1})), \\ q &= \exp(-\mu(y_m - y_{m-1})), \\ r &= \exp(-\lambda(z_k - z_{k-1})), \end{aligned} \quad (15)$$

здесь и ниже индексы у парциальных корреляторов  $p$ ,  $q$  и  $r$  опущены для краткости.

Рассмотрим две группы точек из четырех точек каждая:  $(x_{n-1}, y_{m-1}, z_{k-1})$ ,  $(x_n, y_{m-1}, z_{k-1})$ ,  $(x_{n-1}, y_m, z_{k-1})$ ,  $(x_{n-1}, y_{m-1}, z_k)$  и  $(x_{n-1}, y_m, z_k)$ ,  $(x_n, y_{m-1}, z_k)$ ,  $(x_n, y_m, z_k)$ . В «верхнем» прямоугольнике парциальные вероятности попадания в финишную точку  $(x_n, y_m, z_k)$  дают вклад три точки  $(x_{n-1}, y_m, z_k)$ ,  $(x_n, y_{m-1}, z_k)$ ,  $(x_{n-1}, y_{m-1}, z_k)$  с вероятностями  $p$ ,  $q$  и  $pq$  соответственно. При этом условная вероятность попадания из этих точек в точку  $(x_n, y_m, z_k)$  составляет

$$\Pr(H_{n,m,k} | h_{n-1,m,k}, h_{n,m-1,k}, h_{n-1,m-1,k}) = p + q - pq, \quad (16)$$

здесь знак « $\rightarrow$ » соответствует компенсации условной вероятности попадания из точки  $(x_{n-1}, y_{m-1}, z_k)$  в точку  $(x_n, y_m, z_k)$ .

В «нижнем» прямоугольнике условная вероятность попадания в точку  $(x_n, y_m, z_{k-1})$  из точек  $(x_{n-1}, y_{m-1}, z_{k-1})$ ,  $(x_n, y_{m-1}, z_{k-1})$ ,  $(x_{n-1}, y_m, z_{k-1})$  также составляет с учетом указанной компенсации

$$\Pr(H_{n,m,k-1} | h_{n-1,m-1,k-1}, h_{n,m-1,k-1}, h_{n-1,m,k-1}) = p + q - pq, \quad (17)$$

тогда условная вероятность попадания в точку  $(x_n, y_m, z_{k-1})$  уже из 4 точек «нижнего» прямоугольника составит

$$\Pr(H_{n,m,k-1} | h_{n-1,m-1,k-1}, h_{n,m-1,k-1}, h_{n-1,m,k-1}, h_{n-1,m-1,k}) = r - r(p + q - pq). \quad (18)$$

Таким образом, условная вероятность попадания в финишную точку  $(x_n, y_m, z_k)$  из остальных семи вершин параллелепипеда с учетом двойной компенсации имеет вид

$$\Pr(H_{n,m,k} | h_{n-1,m,k}, h_{n,m-1,k}, h_{n-1,m-1,k}, h_{n-1,m-1,k-1}, h_{n,m-1,k-1}, h_{n-1,m,k-1}, h_{n-1,m-1,k}) = p + q + r - pq - pr - qr + pqr. \quad (19)$$

Для нахождения дисперсии в условном распределении случайной величины  $h_{n,m,k}$  введем условную производящую функцию

$$G(\xi) = M[\exp(i\xi H_{n,m,k} | S)], \quad (20)$$

в которой

$$S = ph_{n-1,m,k} + qh_{n,m-1,k} + rh_{n,m,k-1} - pqh_{n-1,m-1,k} - qrh_{n,m-1,k-1} - prh_{n-1,m,k-1} + pqrh_{n-1,m-1,k-1}, \quad (21)$$

тогда

$$g_{n+1,0,0} = pg_{n,0,0} + \sqrt{1-p^2} u_{n+1,0,0}. \quad (22)$$

Вычисление  $G(\xi)$  удобно начать с точек, прилегающих к финишной точке  $h_{n,m,k}$ , то есть точек  $h_{n-1,m,k}$ ,  $h_{n,m-1,k}$  и  $h_{n,m,k-1}$ . Рассматривая грани, где они расположены, и пользуясь двумерными переходными плотностями распределений вероятностей, получим

$$G(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\sigma_H^2 W\right) M[\exp(i\xi Q)], \quad (23)$$

где

$$W = p^2(1-q^2)(1-r^2) + q^2(1-p^2)(1-r^2) + r^2(1-p^2)(1-q^2), \\ Q = pqH_{n-1,m-1,k} + prH_{n-1,m,k-1} + qrH_{n,m-1,k-1} - 2pqrH_{n-1,m-1,k-1}.$$

Из свойств оставшихся трех граней параллелепипеда, на которых расположены точки  $h_{n-1,m-1,k}$ ,  $h_{n-1,m,k-1}$ ,  $h_{n,m-1,k-1}$ , найдем, что второй множитель в (23) составляет

$$M[\exp(i\xi(pqH_{n-1,m-1,k} + prH_{n-1,m,k-1} + qrH_{n,m-1,k-1} - 2pqrH_{n-1,m-1,k-1}))] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\xi^2\sigma_H^2 [p^2q^2(1-r^2) + p^2r^2(1-q^2) + q^2r^2(1-p^2)]\right\} M[\exp(i\xi pqrH_{n-1,m-1,k-1})]. \quad (24)$$

Примем, что  $n=1$ ,  $m=1$  и  $k=1$ . Поскольку на основании (2) в вершинной точке  $h_{0,0,0}$  выполняется инициализирующее условие

$$M[\exp(i\xi pqrH_{0,0,0})] = \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\sigma_H^2 p^2q^2r^2\right), \quad (25)$$

то после объединения всех трех сомножителей, входящих в (24), получим при  $n=1$ ,  $m=1$  и  $k=1$

$$G(\xi) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\xi^2\sigma_H^2 [1 - (1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)]\right\}. \quad (26)$$

В силу (8)  $H_{n,m,k} = S + I_{XYZ}$ , поэтому

$$D[H_{1,1,1}] = D[S] + D[I_{XYZ}]. \quad (27)$$

Из (25) следует

$$D[S] = \left[1 - (1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)\right] \sigma_H^2. \quad (28)$$

В связи с нормальностью  $I_{XYZ}$  плотность распределения случайных значений  $I_{XYZ}$  имеет

гауссов вид с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\sigma_{I_{XYZ}}^2 = \left\langle \int_{x_0}^{x_1} \exp(-vx + vx') u_X(x') dx' \times \int_{y_0}^{y_1} \exp(-\mu y + \mu y') u_Y(y') dy' \times \int_{z_0}^{z_1} \exp(-\lambda z + \lambda z') u_Z(z') dz' \times \int_{x_0}^{x_1} \exp(-vx + vx'') u_X(x'') dx'' \int_{y_0}^{y_1} \exp(-\mu y + \mu y'') u_Y(y'') dy'' \int_{z_0}^{z_1} \exp(-\lambda z + \lambda z'') u_Z(z'') dz'' \right\rangle. \quad (29)$$

В результате расщепления по  $x$ -м,  $y$ -м и  $z$ -м флуктуациям, усреднения и интегрирования найдем

$$\sigma_{I_{XYZ}}^2 = \frac{1 - \exp(-2v(x_1 - x_0))}{2v} \times \frac{1 - \exp(-2\mu(y_1 - y_0))}{2\mu} \times \frac{1 - \exp(-2\lambda(z_1 - z_0))}{2\lambda} \sigma_{U_{XYZ}}^2. \quad (30)$$

Итак, нормальная случайная величина  $I_{XYZ}$  имеет дисперсию

$$\sigma_{I_{XYZ}}^2 = \frac{(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)}{8v\mu\lambda} \sigma_{U_{XYZ}}^2. \quad (31)$$

Поскольку  $H_{n,m,k} = S + I_{XYZ}$ , то статистические свойства слагаемых в этом равенстве эквивалентны, откуда

$$\sigma_H^2 = \left[1 - (1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)\right] \sigma_H^2 + \frac{(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)}{8v\mu\lambda} \sigma_{U_{XYZ}}^2. \quad (32)$$

Для обеспечения *стационарности* примем

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{8v\mu\lambda} \sigma_{U_{XYZ}}^2. \quad (33)$$

Это соотношение можно рассматривать как аналог соотношения Эйнштейна [2], но для случая трехмерного поля в объеме.

Таким образом, показано, что если справедливо  $M[(H_{0,0,0})^2] = \sigma_H^2$ , то выполняется  $M[(H_{1,1,1})^2] = \sigma_H^2$ . Продолжая это равенство индуктивно, получим для точки 3D-поля с произвольным набором индексов

$$M[(H_{n,m,k})^2] = \sigma_H^2. \quad (34)$$

Теперь, так же, как и выше, для условной плотности распределения вероятностей  $f_H(h_{n,m,k}|S)$  случайной величины  $H_{n,m,k}$  – амплитуды

нормального марковского поля первого порядка в объеме – получим

$$f_H(h_{n,m,k}|S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)}\sigma_H} \times \exp\left(-\frac{[h_{n,m}-V]^2}{2\sigma_H^2(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)}\right), \quad (35)$$

где

$$V = ph_{n-1,m,k} + qh_{n,m-1,k} + rh_{n,m,k-1} - pqh_{n-1,m-1,k} - qrh_{n,m-1,k-1} - prh_{n-1,m,k-1} + pqrh_{n-1,m-1,k-1}.$$

Сужение плотности (35), например, на грань  $(x, y, 0)$  дает

$$f_H(h_{n,m,k}|h_{n-1,m-1,k}, h_{n-1,m-1,k}, h_{n-1,m-1,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)}\sigma_H} \times \exp\left(-\frac{[h_{n,m,k} - (ph_{n-1,m,k} + qh_{n,m-1,k} - pqh_{n-1,m-1,k})]^2}{2\sigma_H^2(1-p^2)(1-q^2)}\right). \quad (36)$$

Аналогично строятся переходные плотности вероятностей  $f_H(h_{n,m,k}|h_{n-1,m,k-1}, h_{n-1,m-1,k}, h_{n-1,m,k-1})$  и  $f_H(h_{n,m,k}|h_{n,m-1,k-1}, h_{n-1,m-1,k-1}, h_{n-1,m-1,k-1})$ .

Дальнейшее сужение плотности (36), например, на ребро  $(x, 0, 0)$  дает

$$f_H(h_{n,m,k}|h_{n-1,m,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)}\sigma_H} \times \exp\left(-\frac{[h_{n,m,k} - ph_{n-1,m,k}]^2}{2\sigma_H^2(1-p^2)}\right) \quad (37)$$

и аналогично для  $y$ -ребра  $f_H(h_{n,m,k}|h_{n,m-1,k})$  и  $z$ -ребра  $f_H(h_{n,m,k}|h_{n,m,k-1})$ . Теперь, в результате сужения по оставшемуся указанному ребру приходим к равновесной безусловной плотности (5).

Поэтому на основании (35) получаем, что безусловная дисперсия амплитуды  $h_{n,m,k}$  постоянна для любых значений индексов  $n$ ,  $m$  и  $k$ ,

$$D[H_{n,m,k}] = \sigma_H^2. \quad (38)$$

Таким образом, построенное нормальное марковское поле – стационарно.

При синтезе нормального марковского 3D-поля  $H(x, y, z)$  в точке  $(x, y, z)$  будем опираться на статистический вес (35). Эта условная плотность вероятности (пропагатор) связывает значения  $h(x, y, z)$  случайного поля  $H(x, y, z)$  в выбранной точке  $(x, y, z)$  со значениями в «предыдущих» точках  $h(x', y, z)$ ,  $h(x, y', z)$ ,  $h(x', y', z)$  и  $h(x', y, z')$ ,  $h(x, y', z')$ ,  $h(x', y', z')$ . Для нормального марковского 3D-поля этих данных достаточно, чтобы описать

вероятностные свойства амплитуды поля  $h(x, y, z)$  в точке  $(x, y, z)$ . Нормальности 3D-поля соответствует свойство гауссовости переходной плотности вероятностей (35), выражающейся с помощью парциальных корреляторов, которые теперь имеют вид  $p = \exp(-\nu(x-x'))$ ,  $q = \exp(-\mu(y-y'))$  и  $r = \exp(-\lambda(z-z'))$  с декрементами затухания  $\nu$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  соответственно по осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ .

**Алгоритм генерации нормальных трехмерных марковских полей в объеме.** Алгоритмы генерации трехмерных марковских полей приспособлены для применения в параллелепипеде, стороны которого параллельны декартовым осям координат в объеме. Далее рассмотрен синтез алгоритма генерации случайного объекта  $H(x, y, z)$  – нормального марковского поля, реализующегося в объеме.

Определяющим свойством рассматриваемого нормального марковского двумерного поля является его корреляционный функционал

$$K_{XYZ} = K_{XYZ}(x, y, z | x', y', z') = \langle H(x, y, z)H(x', y', z') \rangle = pqr\sigma_H^2, \quad (39)$$

где  $h(x, y, z)$  – реализация гауссового двумерного поля  $H(x, y, z)$  в прямоугольной области  $\{x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$  в объеме;  $\sigma_H^2 = \langle H^2(x, y, z) \rangle$  – интенсивность трехмерного НМ-поля;  $\nu$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  – декремента затухания поля по оси абсцисс  $x$ , оси ординат  $y$  и оси аппликат  $z$  соответственно.

Расположим в объеме декартову систему координат с началом в точке  $(0,0,0)$ . Динамику значений  $h(x, y, z)$  случайного НМ-поля  $H(x, y, z)$  в прямоугольнике  $\{x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$  с вершиной в  $(0,0,0)$  можно описать с помощью уравнения (1), обобщающего уравнение Ланжевена для процесса Орнштейна – Уленбека на трехмерный случай. Подробно методика перехода от уравнения Ланжевена и его решения в интегральной форме к рекуррентным последовательностям изложена в работе [6] для случая одномерного марковского процесса.

На основе решения (8) можно построить числовой алгоритм генерации значений  $h(x, y, z)$  НМ-поля  $H(x, y, z)$ . Этот иерархический алгоритм генерации значений в узлах нормального марковского трехмерного поля в прямоугольной области плоскости удобно представить следующими 4 шагами.

*Шаг 1.* Генерация значения в вершине:

$$g_{0,0,0} = u_{0,0,0}. \quad (40)$$

*Шаг 2a.* Генерация значения процесса вдоль  $x$ -границы параллелепипеда  $n > 0$ :

$$g_{n+1,0,0} = pg_{n,0,0} + \sqrt{1-p^2} u_{n+1,0,0}. \quad (41a)$$

**Шаг 2b.** Генерация значения процесса вдоль  $y$ -границы параллелепипеда  $m > 0$ :

$$g_{0,m+1,0} = qg_{0,m,0} + \sqrt{1-q^2} u_{0,m+1,0}. \quad (41b)$$

**Шаг 2c.** Генерация значения процесса вдоль  $z$ -границы параллелепипеда  $k > 0$ :

$$g_{0,0,k+1} = rg_{0,0,k} + \sqrt{1-r^2} u_{0,0,k+1}. \quad (41c)$$

**Шаг 3a.** Последовательное заполнение значениями внутренних узлов  $x0y$ -прямоугольника  $n > 0, m > 0$ :

$$g_{n+1,m+1,k} = pg_{n,m+1,k} + qg_{n+1,m,k} - pqg_{n,m,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)} u_{n+1,m+1,k}. \quad (42a)$$

**Шаг 3b.** Последовательное заполнение значениями внутренних узлов  $x0z$ -прямоугольника  $n > 0, k > 0$ :

$$g_{n+1,m,k+1} = pg_{n,m,k+1} + rg_{n+1,m,k} - prg_{n,m,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-r^2)} u_{n+1,m,k+1}. \quad (42b)$$

**Шаг 3c.** Последовательное заполнение значениями внутренних узлов  $y0z$ -прямоугольника  $m > 0, k > 0$ :

$$g_{n,m+1,k+1} = qg_{n,m,k+1} + rg_{n+1,m+1,k} - qrg_{n,m,k} + \sqrt{(1-q^2)(1-r^2)} u_{n,m+1,k+1}. \quad (42c)$$

**Шаг 4.** Последовательное заполнение значениями внутренних узлов  $xuz$ -параллелепипеда  $n > 0, m > 0, k > 0$ :

$$g_{n+1,m+1,k+1} = pg_{n,m+1,k+1} + qg_{n+1,m,k+1} + rg_{n+1,m+1,k} - pqg_{n,m,k+1} - qrg_{n+1,m,k} - prg_{n,m+1,k} + pqrq_{n,m,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)} u_{n+1,m+1,k+1}. \quad (43)$$

**Шаг 5.** Нормировка амплитуды поля  $n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0$ :

$$h_{n,m,k} = \sigma_H g_{n,m,k}. \quad (44)$$

Заполнение узлов вычисленными значениями выполняется, например, для очередного  $k$ -го слоя. Его, в свою очередь, заполняют в узлах прямоугольника так, как это выполнялось в случае генерации марковского поля в прямоугольнике. В выражениях (40)-(44) обозначено  $p = \exp(-v\Delta_x)$ ,  $q = \exp(-\mu\Delta_y)$  и  $r = \exp(-\lambda\Delta_z)$ , где  $v$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  – парциальные декременты,  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  и  $\Delta_z$  – шаги узлов по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Интенсивность  $\sigma_H$  амплитуды порожденного поля  $H(x, y, z)$  связана с интенсивностью порождающего поля  $u(x, y)$  соотношением (44). Отметим, что для выбранных  $\Delta_x$ ,

$\Delta_y$  и  $\Delta_z$  (то есть количество шагов  $N_x = a/\Delta_x$ ,  $N_y = b/\Delta_y$  и  $N_z = c/\Delta_z$  соответствующих заданным размерам параллелепипеда  $a$ ,  $b$  и  $c$ ), интенсивность в числовом алгоритме необходимо перенормировать так, чтобы энергия НМ-поля  $H(x, y, z)$ , приходящаяся на единицу площади, совпадала с заданной для любого числа шагов. Из (40)-(44) можно получить для значения  $h_{n,m,k}$  в любом  $(n, m, k)$ -узле

$$M[H_{n,m,k}] = 0, \quad M\left[\left(H_{n,m,k}\right)^2\right] = \sigma_H^2 = \text{const}, \quad (45)$$

если последовательно понижать значения  $n$ -индекса, затем  $m$ -индекса и  $k$ -индекса и, наконец, найти безусловное равновесное среднее. Таким образом, алгоритм (40)-(44) генерации значений случайного поля в прямоугольнике на плоскости является стационарным.

В программных математических средах могут отсутствовать трехмерные матрицы. Поэтому приведем алгоритм генерации двух двумерных полей, нижнего –  $a(x, y)$  и верхнего –  $b(x, y)$ . Последовательно итерируя такую пару двумерных коррелированных полей, получим поле, которое в совокупности обладает свойствами трехмерного поля  $h(x, y, z)$ . А именно, будем считать, что с помощью стандартных системных датчиков ( $\text{norm}(1,0,1)$ ) выполнена независимая инициализация каждого из двумерных полей белым шумом единичной интенсивности  $n \geq 0, m \geq 0$ :

$$v_{n,m} = \sigma \text{norm}(1,0,1)_0, \quad u_{n,m} = \sigma \text{norm}(1,0,1)_0. \quad (46)$$

Тогда получим алгоритм:

**Шаг 1.** Генерация значений в вершине нижнего прямоугольника  $n = 0, m = 0$ :

$$a_{0,0} = u_{0,0}. \quad (47)$$

**Шаг 2a.** Генерация значения процесса вдоль  $x$ -границы нижнего прямоугольника  $n > 0, m = 0$ :

$$a_{n+1,0} = pa_{n,0} + \sqrt{1-p^2} u_{n+1,0}. \quad (48a)$$

**Шаг 2b.** Генерация значения процесса вдоль  $y$ -границы нижнего прямоугольника  $n = 0, m > 0$ :

$$a_{0,m+1} = qa_{0,m} + \sqrt{1-q^2} u_{0,m+1}. \quad (48b)$$

**Шаг 2c.** Последовательное заполнение значениями внутренних узлов нижнего прямоугольника  $n > 0, m > 0$ :

$$a_{n+1,m+1} = pa_{n,m+1} + qa_{n+1,m} - pqa_{n,m} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)} u_{n+1,m+1}. \quad (48c)$$

**Шаг 3.** Генерация значений в вершине верхнего прямоугольника  $n = 0, m = 0$ :

$$b_{0,0} = ra_{0,0} + \sqrt{1-r^2} v_{0,0}. \quad (49)$$

*Шаг 4a.* Генерация значения процесса вдоль  $x$ -границы верхнего прямоугольника  $n > 0, m = 0$ :

$$b_{n+1,0} = pb_{n,0} + ra_{n,0} - pra_{n+1,0} + \sqrt{(1-p^2)(1-r^2)}v_{n+1,0}. \quad (50a)$$

*Шаг 4b.* Генерация значения процесса вдоль  $y$ -границы верхнего прямоугольника  $n = 0, m > 0$ :

$$b_{0,m+1} = qa_{0,m} + rb_{0,m} - qra_{0,m+1} + \sqrt{(1-q^2)(1-r^2)}v_{0,m+1}. \quad (50b)$$

*Шаг 4c.* Последовательное заполнение значениями внутренних узлов верхнего прямоугольника  $n > 0, m > 0$ :

$$b_{n+1,m+1} = pb_{n,m+1} + qb_{n+1,m} + ra_{n+1,m+1} - pqb_{n,m} - qra_{n+1,m} - pra_{n,m+1} + pqra_{n,m} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)}v_{n+1,m+1}. \quad (50c)$$

*Шаг 5.* Нормировка амплитуды поля  $n \geq 0, m \geq 0$ :

$$h_{n,m} = \sigma_H b_{n,m}. \quad (51)$$

В выражениях (47)–(51) обозначены корреляторы  $p = \exp(-v\Delta_x)$ ,  $q = \exp(-\mu\Delta_y)$  и  $r = \exp(-\lambda\Delta_z)$ , где  $v$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  – парциальные декременты,  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  и  $\Delta_z$  – шаги узлов по осям  $0x$ ,  $0y$  и  $0z$  соответственно. Интенсивность  $\sigma_H$  амплитуды порожденного поля  $H(x, y, z)$  связана с интенсивностью  $\sigma_U$  порождающего поля  $u(x, y)$  соотношением (33). С помощью алгоритма (47)–(51) можно получать значения на заданном порожденном слое, опираясь на ранее найденные значения предыдущего порождающего слоя.

**Визуализация нормального марковского поля.** Графическое представление трехмерного НМ-поля затруднено изобразительными возможностями. Следующие рисунки является иллюстрацией к работе программного средства, с помощью которого на основе предложенного алгоритма (47)–(51) визуализируются рассчитанные НМ-поля. В нем случайное трехмерное поле показано ограниченным набором последовательных двумерных слоев-сечений.

На рис. 1 приведен пример генерации  $h(x, y, z)$  случайного поля  $H(x, y, z)$ . Этот рисунок  $H(x, y, z)$  образован из 3 последовательных рисунков поля  $H(x, y, z_0)$ ,  $H(x, y, z_1)$  и  $H(x, y, z_2)$ , совокупность которых  $\{h(x_n, y_m, z_0)\}$ ,  $\{h(x_n, y_m, z_1)\}$  и  $\{h(x_n, y_m, z_2)\}$  состоит из значений, найденных в соответствии с алгоритмом (47) – (51).

Параметры расчета трехмерного поля: шаги по осям  $\Delta_x = 1.0$ ,  $\Delta_y = 1.0$ ,  $\Delta_z = 5.0$ ; количество шагов  $N_x = 20$ ,  $N_y = 20$ ,  $N_z = 2$ ; декременты затухания  $v = 1.0$ ,  $\mu = 1.0$ ,  $\lambda = 0.75$ . Интенсивность  $\sigma_U$  амплитуды  $h(x, y, z)$  поля  $H(x, y, z)$  выбрана равной  $\sigma_U = 0.5$ . На рис. 1 ось  $0z$  – вертикальная.

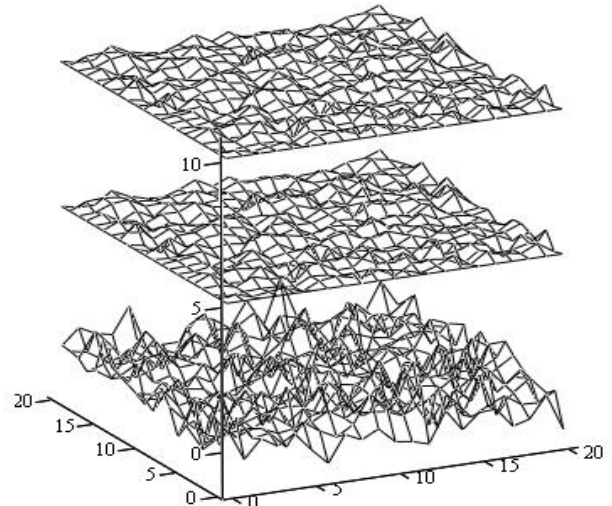


Рис. 1 – Нормальное марковское 3D-поле  $H(x, y, z)$

На рис. 2 приведен аналогичный пример генерации  $h(x, y, z)$  случайного поля  $H(x, y, z)$ . Параметры расчета те же, что и на рис. 1, кроме: декремент затухания  $\lambda = 1.0$  и  $\sigma_U = 1.0$ .

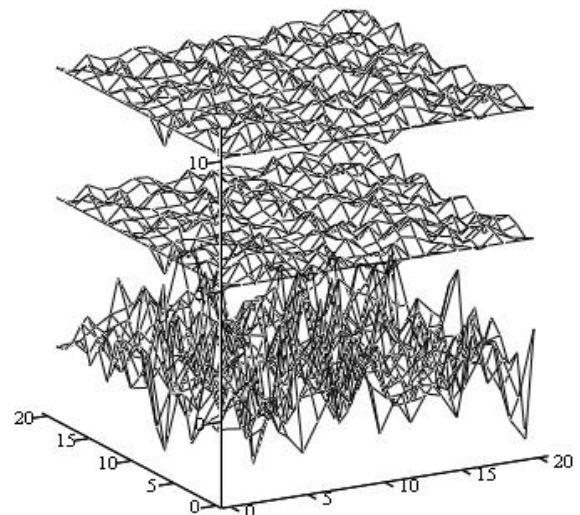


Рис. 2 – Нормальное марковское 3D-поле  $H(x, y, z)$

Из приведенных рисунков можно видеть динамику затухания по разным направлениям, в частности по оси  $0z$ .

Можно предложить широкий круг задач, в которых найдут применение трехмерные нормальные марковские поля. Прежде всего, это расширение традиционных задач с применением случайных одномерных процессов и двумерных полей [2–5] на случай трех переменных. Представляется перспективным применение трехмерных НМП в задачах рассеяния электромагнитных волн в возмущенных средах, внешней баллистики в турбулентной атмосфере, рассеяния заряженных частиц в аморфных средах, распространения акустических колебаний в твердом теле. Возможности вычислительных средств дают основание надеяться на успешное применение трехмерных НМП в задачах численного моделирования. Перспективным является

применение трехмерных НМП в задачах оценивания, фильтрации, трехмерного шифрования и декодирования.

**Выводы.** В работе рассмотрено трехмерное поле, обладающее свойствами стационарности, нормальности и марковости. Анализ основывается на уравнении движения амплитуды трехмерного поля с порождающим трехмерным полем, обладающим свойствами трехмерного белого шума. Для случайной величины – амплитуды трехмерного нормального марковского поля первого порядка в объеме – получены переходные условные плотности распределения вероятностей вместе с безусловной плотностью распределения вероятностей. На их основе построен и обоснован алгоритм генерации такого поля в параллелепипеде. Приведен численный пример реализации предложенного алгоритма.

#### Список литературы

1. Uhlenbeck G. E. On the theory of Brownian Motion / L. S. Ornstein, G. E. Uhlenbeck, // Phys. Rev. 1930, v. 36, pp. 823–841.
2. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. – М.: Гос. изд-во иностран. лит-ры, 1947. – 168 с.
3. Тихонов В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.

4. Habibi A. Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image // Proc. IEEE, 1972, vol. 60, № 7, pp. 878–883.
5. Хусу А. П., Шероховатость поверхностей / А. П. Хусу, Ю. Р. Витенберг, В. А. Пальмов. – М.: Наука, 1975. – 344 с.
6. Мазманишвили А. С. Моделирование марковских случайных последовательностей и алгоритм генерации однородного двумерного марковского поля / А. С. Мазманишвили, В. Е. Щербань // Электронное моделирование. – 1996. – № 2. – С. 93–95.

#### References (transliterated)

1. Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S. On the theory of the Brownian Motion. Phys. Rev. 1930, v. 36, pp. 823–841.
2. Chandrasekar S. *Stokhasticheskie problemy v fizike i astronomiji* [Stochastic problems in physics and astronomy]. – Moscow, GIL Publ., 1947. 168 p.
3. Tihonov V. I., Mironov M. A. *Markovskie process* [Process of Markov] Moscow, Sov. Radio Publ., 1977. 488 p.
4. Habibi A. Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image. Proc. IEEE, 1972, vol. 60, no. 7, pp. 878–883.
5. Husu, A. P., Vitenberg, Yu. R., ed. *Sherohovatost' poverhnosti*. [Surface of roughness] Moscow, Nauka Publ., 1975. 344 p.
6. Mazmanishvili A. S., Tscherban' V. E. Modelirovanie markovskih sluchainyh posledovatel'nostey i algoritm generacii odnorodnogo dvumernogo markovskogo polya [Simulation of Markov random sequences and an algorithm for generating a two-dimensional Markov field]. *Electronic modeling*, 1996, no. 2, pp. 93–95.

Поступила (received) 21.11.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Алгоритм побудови стаціонарного нормального марківського 3d-поля: динамічні рівняння руху, статистичні розподіли ймовірностей, візуалізація / О. С. Мазманишвілі, Г. Ю. Сидоренко // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 55 (1276). – С. 13–20. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2079-0023.**

**Алгоритм построения стационарного нормального марковского 3d-поля: динамические уравнения движения, статистические распределения вероятностей, визуализация / А. С. Мазманишвили, А. Ю. Сидоренко // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Харків: НТУ «ХПІ», 2017. – № 55 (1276). – С. 13–20. – Библиогр.: 6 назв. – ISSN 2079-0023.**

**Algorithm for constructing of stationary normal Markov 3d-field: dynamic equations of motion, statistical probability distributions, visualization / O. S. Mazmanishvili, G. Yu. Sydorenko // Bulletin of National Technical University "KhPI". Series: System analysis, control and information technology. – Kharkov: NTU "KhPI", 2017. – No. 55 (1276). – P. 13–20. – Bibliogr.: 6. – ISSN 2079-0023.**

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Мазманишвили Александр Сергеевич** – доктор фізико-математических наук, професор, старший науковий співробітник ННЦ ХФТИ, г. Харків; тел.: (067) 799-38-64; e-mail: mazmanishvili@gmail.com.

**Мазманишвілі Олександр Сергійович** – доктор фізико-математических наук, професор, старший науковий співробітник ННЦ ХФТИ, м. Харків; тел.: (067) 799-38-64; e-mail: mazmanishvili@gmail.com.

**Mazmanishvili Oleksandr Serhiyovych** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, senior staff scientist, National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology", Kharkov; tel.: (067) 799-38-64; e-mail: mazmanishvili@gmail.com.

**Сидоренко Ганна Юрїївна** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій; тел.: (095) 392-54-39; e-mail: sau123@ukr.net.

**Сидоренко Анна Юрьевна** – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», доцент кафедры системного анализа и информационно-аналитических технологий; тел.: (095) 392-54-39; e-mail: sau123@ukr.net.

**Sydorenko Ganna Yurijivna** – Candidate of Technical Sciences, Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of analysis of systems and information-analytical technologies; тел.: (095) 392-54-39; e-mail: sau123@ukr.net.