УДК 519.2

Л. Г. РАСКИН, О. В. СЕРАЯ, Ю. Л. ПАРФЕНЮК

МЕТОД ПОЭЛЕМЕНТНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ КОМПОЗИЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ МАРШРУТОВ В ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ

Предложен простой метод отыскания оптимальных маршрутов в транспортной задаче линейного программирования. Задача решена с использованием совокупности критериев: средняя суммарная стоимость транспортировок, продолжительность и надежность выполнения плана. Модель задачи – ориентированный граф. Вершинам графа соответствуют промежуточные пункты на множестве магистралей, соединяющих пункты производства и потребления. Дуги, соединяющие вершины графа, размечены числами, задающими среднюю стоимость транспортировки единицы продукта через участок маршрута, соответствующей дуге, среднюю продолжительность транспортировки вдоль этого участка и вероятность его преодоления. Для решения задачи предложена мера эффективности использования участков, обладающая свойством аддитивности, то есть мера результата объединения двух участков равна сумме мер этих участков. Мера учитывает значения для всех трех критериев. Описана вычислительная процедура, реализующая метод, которая не требует комбинаторного перебора вариантов и обеспечивает возможность быстрого получения компромиссного результата. Процедура основана на использовании предложенной специальной операции коммутации матриц. Эта операция обеспечивает возможность расчета меры эффективности всех возможных двухшаговых, затем трехшаговых и далее *k*-шаговых путей. Операция итерационно продолжается до тех пор, пока не будет найдена мера маршрута, соединяющая начальный пункт с конечным. Важным дополнительным достоинством метода является возможность его использования для отыскания эффективных маршрутов в сложных транспортных сетях с большим числом промежуточных пунктов. При этом, если переход от одного из пунктов в другой может быть осуществлен через какой-либо промежуточный пункт из некоторого их множества, то метод позволяет найти наилучший из возможных маршрутов. Рассмотрены примеры решения задачи для разных формулировок многокритериальной транспортной задачи.

Ключевые слова: отыскание оптимальных маршрутов, транспортная задача линейного программирования, многокритериальность, модель системы на основе ориентированного графа, специальная операция коммутации матриц, аддитивная мера учета совокупности критериев.

Л. Г. РАСКІН, О. В. СІРА, Ю. Л. ПАРФЕНЮК

МЕТОД ПОЕЛЕМЕНТНОЇ БАГАТОКРИТЕРИАЛЬНОЇ КОМПОЗИЦІЇ ОПТИМАЛЬНИХ МАРШРУТІВ У ТРАНСПОРТНИХ МЕРЕЖАХ

Запропоновано простий метод відшукання оптимальних маршрутів у транспортній задачі лінійного програмування. Задача вирішена із використанням сукупності критеріїв: середня сумарна вартість перевезень, тривалість та надійність виконання плану. Модель задачі – орієнтований граф. Вершинам графа відповідають проміжні пункти на множині магістралей, що з'єднують пункти виробництва і споживання. Дуги, що з'єднують вершини графа, розмічені числами, які задають середню вартість транспортування одиниці продукту через ділянку маршруту, що відповідають дузі, середній тривалості транспортування вздовж цієї ділянки та ймовірності подолання маршруту. Для вирішення задачі запропонована міра ефективності використання ділянок, що має адитивні властивості, тобто міра результату об'єднання двох ділянок дорівнює сумі мір цих ділянок. Міра враховує значення для всіх трьох критеріїв. Описана обчислювальна процедура, що реалізує метод та не вимагає комбінаторного перебору варіантів і забезпечує можливість швидкого отримання компромісного результату. Процедура заснована на використанні запропонованої спеціальної операції комутації матриць. Ця операція забезпечує можливість розрахунку міри ефективності всіх можливих двокрокового, потім трикрокового і далі *k*-крокових шляхів. Операція ітераційно триває до тих пір, поки не буде знайдена міра маршруту, що з'єднує початковий пункт із кінцевим. Важливою додатковою перевагою методу є можливість його використання для відшукання ефективних маршрутів в складних транспортних мережах з великою кількістю проміжних пунктів. При цьому, якщо перехід від одного з пунктів в інший може бути здійснений через будь-який проміжний пункт з деякої їх множини, то метод дозволяє знайти найкращий із можливих маршрутів. Розглянуто приклади розв'язання задачі для різних формулювань багатокритеріальної транспортної задачі.

Ключові слова: пошук оптимальних маршрутів, транспортна задача лінійного програмування, багатокритеріальність, модель системи на основі орієнтованого графа, спеціальна операція комутації матриць, адитивна міра врахування сукупності критеріїв.

L. RASKIN, O. SIRA, Y. PARFENIUK

METHOD OF ELEMENTS-BY-ELEMENTS MULTICRITERIAL COMPOSITION OF OPTIMAL ROUTES IN TRANSPORT NETWORKS

A simple method is proposed for finding optimal routes in the transport problem of linear programming. The task is solved using a set of criteria: the average total cost of transportation, the duration and reliability of plan. The task model is an oriented graph. The vertices of the graph correspond to intermediate points on a number of ways connecting production and consumption points. The arcs connecting the vertices of the graph are marked with numbers specifying the average cost of transporting a product unit through the route section corresponding to the arc, the average duration of transportation along this section and the probability of overcoming it. To solve the task, a measure efficiency use of plots is proposed, which has property of additivity, that is, the measure of result for combination of two sites is equal to the sum of the measures for these sections. The measure takes into account the values for all three criteria. A computational procedure is described that implements a method that does not require a combinatorial enumeration options and ensures the possibility of obtaining a compromise result quickly. The procedure is based on the use of proposed special operation for switching matrices. This operation provides the possibility calculating the effectiveness measure of all possible two-step, then three-step and further *k*-step paths. The operation is iteratively continued until a route measure connecting the start point to the end point is found. An important additional advantage of method is its ability to use it to find efficient routes in complex transport networks with a large number of intermediate points. In this case, if the transition from one point to another can be carried out through some intermediate point from some of their sets, then the method allows to find the best possible route. Examples of task for different formulations of multicriteria transport task are considered.

Keywords: search for optimal routes, transport task of linear programming, multicriteria, model of system based on the oriented graph, special operation commutation of matrices, additive measure set of criteria.

Введение. Задача построения оптимального маршрута – один из важных этапов более общей транспортной задачи в системе «производители потребители».

Теоретические основы и практические методы решения транспортных задач линейного программирования хорошо изучены [1–5].

Соответствующая каноническая задача формируется следующим образом.

Задан набор производителей некоторого продукта и набор его потребителей. При этом известны: a_i объем продукта, изготавливаемого i-м производителем, $i = 1, 2, \dots, m$, b_j объем продукта, требуемого j-му получателю, $j = 1, 2, \dots, n$.

Для каждой пары индексов (i, j) определен маршрут $M(i, j)$ транспортировки и задана мера эффективности этого маршрута $\mu[M(i, j)]$, равная средней стоимости транспортировки c_{ij} единицы продукта от i-го производителя к j-му потребителю c_{ij} по маршруту $M(i, j)$.

Далее вводится набор $X = (x_{ij})$, x_{ij} – планируемый объем перевозки продукта от i-го производителя к j-му потребителю.

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \tag{1}$$

и система ограничений:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n, \end{gathered} \tag{2}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i. \tag{4}$$

Задача состоит в отыскании набора $X = (x_{ij})$, минимизирующего (1) и удовлетворяющего ограничениям (2)–(4). При этом предполагается, что каждый из маршрутов доставки продукта от поставщиков к потребителям заранее определен и для выбранной пары (i, j) характеризуется средним значением стоимости транспортировки единицы продукта c_{ij}.

Вместе с тем, реальная система транспортных магистралей состоит из некоторого множества отдельных участков, которые в разных комбинациях могут быть использованы для построения конкретного маршрута для каждой пары «поставщик потребитель».

Каждый участок удобно задавать номерами пунктов, соответствующих началу и концу этого участка.

Таким образом, если имеется множество $\{1, 2, \dots, k, \dots, K\}$ номеров пунктов на множестве магистралей, то может быть поставлена задача построения матрицы, элемент которой, лежащий в строке $k1$ и столбце $k2$, задает среднюю стоимость доставки c_{k1k2} единицы продукта от пункта $k1$ до пункта $k2$ при транспортировке по наиболее эффективному маршруту.

После получения этой матрицы из нее можно выделить матрицу $C = (c_{ij})$, строки которой определяются номерами поставщиков, а столбцы – номерами потребителей.

Элементы именно этой матрицы используются при формировании критерия эффективности транспортировок (1).

Задача построения совокупности наиболее эффективных маршрутов не является тривиальной даже в описанном варианте, но ещё более усложняется, если при выборе оптимальных маршрутов необходимо учитывать не один, а большее число критериев.

Цель статьи – разработка методики построения оптимальных маршрутов в многокритериальной транспортной задаче линейного программирования. Рассмотрим возможные подходы к решению задачи.

Основной материал – методика построения оптимальных маршрутов в транспортной задаче с учетом совокупности критериев.

А. Отыскание оптимальных маршрутов в однокритериальной задаче.

Сформируем ориентированный граф с вершинами, отображающими пункты, через которые могут проходить маршруты между поставщиками и потребителями, и дугами, соответствующими участкам, обеспечивающим непосредственный переход для какой-либо пары пунктов.

Каждой дуге графа припишем число, задающее среднюю стоимость транспортировки единицы продукта через соответствующий участок маршрута.

Пусть, например, набор пунктов, через которые может проходить маршрут между конкретной парой «поставщик – потребитель», образует граф, приведенный на рис. 1.

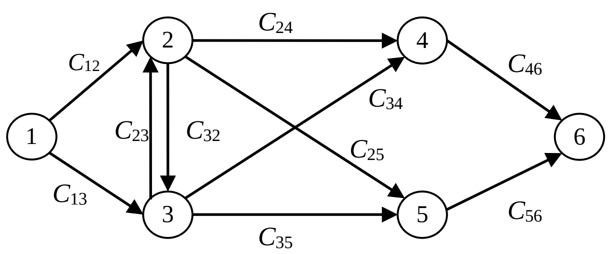

Рис. 1. Граф транспортной сети

Символом M для (i, j)-го элемента этой матрицы отображается ситуация, когда непосредственный переход из пункта i в пункт j невозможен (M – большое число).

Значения средних стоимостей транспортировки, приписанные дугам графа, сведены в матрицу $\boldsymbol{C}^{(1)}$.

Для построения оптимального маршрута между пунктами 1 и 6 используем метод, реализующий специальную операцию коммутации матриц [6].

$\boldsymbol{C}^{(1)} =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	10	M	M	M
2	M	0	2	6	3	M
3	M	6	0	5	4	M
4	M	M	M	0	M	6
5	M	M	M	M	0	3

Для двух матриц $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ одинакового размера $(m \times n)$ введем эту операцию следующим образом:

$$\boldsymbol{R} = \left(r_{ij}\right) = \boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q}, \qquad (5)$$

$$r_{ij} = \min_k \{r_{i1} + q_{1j}; r_{i2} + q_{2j}, \dots, r_{ik} + q_{kj}; \dots; r_{im} + q_{mj}\}, \qquad (6)$$

$$r_{jj} = 0, \quad r_{ik} + M = M,$$
$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Реализуем эту операцию по правилам (6) для вычисления $\boldsymbol{C}^{(2)} = \boldsymbol{C}^{(1)} \otimes \boldsymbol{C}^{(1)}$. При этом имеем:

$$\boldsymbol{C}_{11}^{(2)} = 0,$$

$$\boldsymbol{C}_{12}^{(2)} = \min\left\{\boldsymbol{C}_{11}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{12}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{12}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{22}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{13}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{32}^{(1)}; \dots; \boldsymbol{C}_{16}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{62}^{(1)}\right\} =$$
$$= \min\{0 + 3; 3 + 0; 10 + 6;\ M + M; \dots; M + M\} = 3,$$

$$\boldsymbol{C}_{13}^{(2)} = \min\left\{\boldsymbol{C}_{11}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{13}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{12}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{23}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{13}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{33}^{(1)}; \dots; \boldsymbol{C}_{16} + \boldsymbol{C}_{63}\right\} =$$
$$= \min\{0 + 10; 3 + 2; 10 + M; M + M; \dots; M + M\} = 5,$$

$$\boldsymbol{C}_{14}^{(2)} = \min\left\{\boldsymbol{C}_{11}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{14}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{12}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{24}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{13}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{34}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{41}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{44}; \dots; \boldsymbol{C}_{16}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{64}^{(1)}\right\} =$$
$$= \min\{0 + M; 3 + 6; 10 + 5; M + M; \dots; M + M\} = 9,$$

$$\boldsymbol{C}_{15}^{(2)} = \min\left\{\boldsymbol{C}_{11}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{15}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{12}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{25}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{13}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{35}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{14}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{45}^{(1)}; \dots; \boldsymbol{C}_{16}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{65}^{(1)}\right\} =$$
$$= \min\{0 + M; 3 + 3; 10 + 4; M + M; \dots; M + M\} = 6,$$

$$\boldsymbol{C}_{16}^{(2)} = \min\left\{\boldsymbol{C}_{11}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{16}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{12}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{26}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{13}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{36}^{(1)}; \dots; \boldsymbol{C}_{16}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{66}^{(1)}\right\} =$$
$$= \min\{0 + M; 3 + M; 10 + M;\ \dots; M + M\} = M.$$

Действуя аналогично, рассчитаем все элементы матрицы $\boldsymbol{C}^{(2)}$.

Полученная матрица $\boldsymbol{C}^{(2)}$ определяет длины оптимальных двухшаговых маршрутов.

При этом, например, выясняется, что двухшаговый маршрут (1–2–3) из пункта 1 в пункт 3 через пункт 2 короче непосредственного (1–3).

$\boldsymbol{C}^{(2)} =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	5	9	6	M
2	M	0	2	6	3	6
3	M	6	0	5	4	7
4	M	M	M	0	M	6
5	M	M	M	M	0	3

Пункт 6, недостижимый из пунктов 2 и 3 непосредственно, оказывается достижимым по маршрутам (2–5–6) и (3–5–6).

Однако не существует двухшагового маршрута из пункта 1 в пункт 6.

Сделаем еще один шаг применения операции коммутации.

Вычислим $\boldsymbol{C}^{(3)} = \boldsymbol{C}^{(2)} \otimes \boldsymbol{C}_1$. При этом

$$\boldsymbol{C}_{12}^{(3)} = \min\left\{\boldsymbol{C}_{11}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{12}^{(1)};\ \boldsymbol{C}_{22}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{22}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{13}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{32}^{(1)}; \dots; \boldsymbol{C}_{16}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{62}^{(1)}\right\} =$$
$$= \min\{0 + 3; 3 + 0; 5 + 6;\ 9 + M; \dots; M + M\} = 3,$$

$$\boldsymbol{C}_{11}^{(3)} = 0,$$

$$\boldsymbol{C}_{13}^{(3)} = \min\left\{\boldsymbol{C}_{11}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{13}^{(1)}; C_{12}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{23}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{13}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{33}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{14}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{43}^{(1)}; \dots; \boldsymbol{C}_{16}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{63}^{(1)}\right\} =$$
$$= \min\{0 + 10; 3 + 2; 10 + 0; 9 + M; \dots; M + M\} = 5,$$

$$\boldsymbol{C}_{14}^{(3)} = \min\left\{\boldsymbol{C}_{11}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{14}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{12}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{24}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{13}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{34}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{14}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{44}^{(1)};\ \dots; \boldsymbol{C}_{16}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{64}^{(1)}\right\} =$$
$$= \min\{0 + \mathrm{M}; 3 + 6; 5 + 5; 9 + 0; 6 +\ M; \dots; M + M\} = 9,$$

$$\boldsymbol{C}_{15}^{(3)} = \min\left\{\boldsymbol{C}_{11}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{15}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{12}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{25}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{13}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{35}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{14}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{45}^{(1)}; \dots; \boldsymbol{C}_{16}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{65}^{(1)}\right\} =$$
$$= \min\{0 + M; 3 + 3; 5 + 4; 9 + M; 6 + 0; M; \dots; M\} = 6,$$

$$\boldsymbol{C}_{16}^{(3)} = \min\left\{\boldsymbol{C}_{11}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{16}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{12}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{26}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{13}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{36}^{(1)}; \boldsymbol{C}_{14}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{46}^{(1)};\ \dots; \boldsymbol{C}_{16}^{(2)} + \boldsymbol{C}_{61}^{(1)}\right\} =$$
$$= \min\{0 + M; 3 + M; 5 + M; 9 + 6; 6 + 3; M + 0; \dots; M + M\} = 9.$$

Действуя аналогично, рассчитаем все остальные элементы матрицы $\boldsymbol{C}^{(3)}$.Полученная матрица $\boldsymbol{C}^{(3)}$ определяет длины оптимальных трехшаговых маршрутов.

При этом определен маршрут, обеспечивающий достижение пункта 6 из пункта 1 за три шага (1–2–5–6), имеющий длину 9.

Отметим, кроме того, что эта матрица содержит вычисленные длины маршрутов, ко всем достижимым пунктам рассматриваемой в этом примере транспортной сети. Решение задачи закончено.

Изложенная методика расчета определяемых маршрутов, выполненная для всех пар «поставщик – потребитель», реализует подготовительный этап решения канонической транспортной задачи линейного программирования.

$\boldsymbol{C}^{(3)} =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	5	9	6	9
2	M	0	2	6	3	6
3	M	6	0	5	4	7
4	M	M	M	0	M	6
5	M	M	M	M	0	3

B. Отыскание оптимальных маршрутов в двухкритериальной транспортной задаче.

Практика решения транспортных задач линейного программирования показывает, что решения, полученные по критерию – средняя суммарная стоимость транспортировки не всегда и не полностью удовлетворяют потребителя, поскольку эти решения могут оказаться неудачными по другим естественным критериям (например, продолжительность реализации плана перевозок или надежность его выполнения).

Это обстоятельство приводит к необходимости разработки компромиссных планов с учетом совокупности критериев.

В этой ситуации могут быть предложены различные подходы [7–11]. Один из наиболее употребительных в двухкритериальной задаче состоит в выборе основного из пары критериев, а второй при этом используется как ограничение. Другие подходы реализуют какие–либо возможные методы скаляризации векторного критерия.

Пусть, например, в конкретной задаче необходимо учитывать среднюю суммарную стоимость транспортировки C_Σ и вероятность выполнения плана P. При этом скаляризованный критерий может быть получен в виде отношения $C_\Sigma/_P$, значение которого минимизируется.

Если считать этот подход приемлемым, то его следует реализовать и в задаче выбора оптимальных маршрутов. В соответствии с этим для участка (i, j) введем меру эффективности использовании этого участка при построении маршрута, равную

$$\mu = \frac{C_{ij}}{P_{ij}}.$$

Эта мера для двух последовательно расположенных участков (i, k) и (k, j) в соответствии с логикой её формирования должна быть равна

$$\mu[(i,k),(k,j)] = \mu[(i,j)] = \frac{\boldsymbol{C}_{ik} + \boldsymbol{C}_{kj}}{P_{ik}P_{kj}}.$$

К сожалению, введенная мера не аддитивна, поскольку эта мера для объединения (суммы) двух участков не равна сумме мер этих участков, то есть:

$$\mu[(i,k),(k,j)] = \mu[(i,j)] = \frac{\boldsymbol{C}_{ij}}{P_{ij}} = \frac{\boldsymbol{C}_{ik+}\boldsymbol{C}_{kj}}{P_{ik}P_{kj}} \neq$$

$$\neq \frac{\boldsymbol{C}_{ik}}{P_{ik}} + \frac{\boldsymbol{C}_{kj}}{P_{kj}}\mu[(i,k)] + \mu[(k,j)].$$

Возможный способ преодоления возникшей проблемы таков. Введем функцию

$$U(Z) = \frac{1}{P}Z^C$$

и операцию над ней

$$F\big(U(Z)\big) = \frac{dU(Z)}{dZ}\,|_{z=1} = \frac{C}{P}.$$

Далее для двух любых

$$U_1(Z) = \frac{1}{P_1}Z^{C_1}$$

и для

$$U_2(Z) = \frac{1}{P_2}Z^{C_2}$$

введем

$$U(Z) = U_1(Z)\cdot U_2(Z) = \frac{1}{P_1}Z^{C_1}\cdot\frac{1}{P_2}Z^{C_2} = \frac{1}{P_1P_2}Z^{C_1+C_2}.$$

При этом

$$F\big(U(Z)\big) = F\big(U_1(Z)\cdot U_2(Z)\big) =$$

$$= \frac{dU(Z)}{dZ}\,|_{z=1} = \frac{d}{dZ}\left(\frac{1}{P_1P_2}Z^{C_1+C_2}\right)_{Z=1} = \frac{C_1+C_2}{P_1P_2}.$$

В соответствии с этими соотношениями, если меры двух последовательно расположенных участков равны соответственно $C_{ik}/_{P_{ik}}$ и $C_{kj}/_{P_{kj}}$, то для

$$U_{ik} = \frac{1}{P_{ik}}Z^{C_{ik}},\ U_{kj} = \frac{1}{P_{kj}}Z^{C_{kj}},$$

$$U_{ij} = U_{ik}\cdot U_{kj} = \frac{1}{P_{ik}P_{kj}}Z^{C_{ik}+C_{kj}}.$$

имеем

$$\mu[U_{ik}, U_{kj}] = F\left(U_{ij}(Z)\right) = \frac{C_{ik}+C_{kj}}{P_{ik}P_{kj}}.$$

Таким образом, введенная операция позволяет, используя меры отдельных участков, рассчитать меру их объединения. Обозначив, для краткости, эту операцию символом $\oplus$, запишем требуемые соотношения для двух и произвольного числа участков:

$$\mu(i,j) = \frac{\boldsymbol{C}_{ik}}{P_{ik}} \oplus \frac{\boldsymbol{C}_{kj}}{P_{kj}} = \frac{\boldsymbol{C}_{ik+}\boldsymbol{C}_{kj}}{P_{ik}P_{kj}},$$

$$\mu(k_i, k_n) = \frac{\boldsymbol{C}_{k_1}\boldsymbol{C}_{k_2}}{P_{k_1}P_{k_2}} \oplus \frac{\boldsymbol{C}_{k_2}\boldsymbol{C}_{k_3}}{P_{k_2}P_{k_3}} \oplus \ldots \oplus \frac{\boldsymbol{C}_{k_{n-1}}\boldsymbol{C}_{k_n}}{P_{k_{n-1}}P_{k_n}} =$$

$$= \frac{\sum_{S=1}^{n-1} C_{s,\ s+1}}{\prod_{S=1}^{n-1} P_{s,\ s+1}}.$$

Введенная операция может быть использована при решении задач отыскания эффективных маршрутов в сложных транспортных сетях с большим числом промежуточных пунктов.

При этом, если переход из i в j может быть осуществлен через какой–то промежуточный пункт из совокупности $(1, 2, \ldots, k, \ldots, l)$, то наиболее эффективный из возможных переходов определим соотношением

$$r_{ij} = \min_k (r_{ik} \oplus r_{kj}) = \min_k \frac{C_{ik} + C_{kj}}{P_{ik}P_{kj}}.$$

Проиллюстрируем технологию использования полученных соотношений на максимально простом примере.

Пусть система магистралей, связывающая совокупность пунктов с номерами 1,2,…,6, имеет вид, представленный на рис. 2.

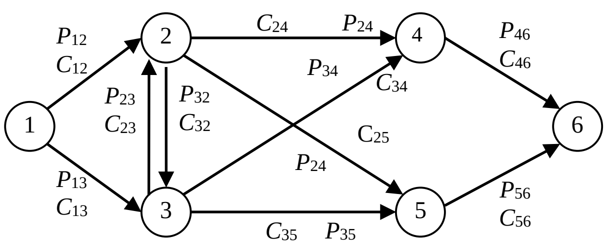

Рис. 2. Граф переходов транспортной сети

Числовые значения характеристик участков между пунктами сведены в матрицу $\boldsymbol{R}^{(1)}$.

Элемент этой матрицы, лежащий в i-й строке и j-м столбце содержит характеристики маршрута между пунктами i и j, причем слева размещено значение C_{ij}, а справа – значение P_{ij}. Символом M отображается ситуация, когда пункт j недостижим из пункта i непосредственно.

$\boldsymbol{R}^{(1)}=$

	1	2		3		4		5		6	
1	0	3	0.6	10	0.3	M		M		M	
2	M	0		2	0.8	6	0.2	3	0.7	M	
3	M	6	0.8	0		5	0.7	4	0.2	M	
4	M	M		M		0		M		6	0.8
5	M	M		M		M		0		3	0.5

Рассчитаем $\boldsymbol{R}^{(2)} = \boldsymbol{R}^{(1)} \oplus \boldsymbol{R}^{(1)}$:

$\boldsymbol{R}^{(2)} =$

	1	2		3		4		5		6	
1	0	3	0.6	5	0.48	15	0.21	6	0.42	M	
2	M	0		2	0.8	7	0.56	3	0.7	6	0.35
3	M	6	0.8	0		5	0.7		0.56	11	0.56
4	M	M		M		0		M		6	0.8
5	M	M		M		M		0		3	0.5

$$r_{12}^{(2)} = \min\left\{\frac{\boldsymbol{C}_{12}}{P_{12}};\ \frac{\boldsymbol{C}_{13} + \boldsymbol{C}_{32}}{P_{13} \cdot P_{32}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{3}{0.6};\ \frac{10+6}{0.3 \cdot 0.8}\right\} = \min\{5;\ 66\} = 5,$$

$$r_{13}^{(2)} = \min\left\{\frac{\boldsymbol{C}_{13}}{P_{13}};\ \frac{\boldsymbol{C}_{12} + \boldsymbol{C}_{23}}{P_{13} \cdot P_{23}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{10}{0.3};\ \frac{3+2}{0.3 \cdot 0.8}\right\} = \min\{33.3;\ 10.41\} = 10.41,$$

$$r_{14}^{(2)} = \min\left\{\frac{\boldsymbol{C}_{12} + \boldsymbol{C}_{24}}{P_{12} \cdot\ C_{24}};\ \frac{\boldsymbol{C}_{13} + \boldsymbol{C}_{34}}{P_{13} \cdot P_{34}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{3+6}{0.6 \cdot 0.2};\ \frac{10+5}{0.3 \cdot 0.7}\right\} = \min\{75;\ 71.43\} = 71.43,$$

$$r_{15}^{(2)} = \min\left\{\frac{\boldsymbol{C}_{12} + \boldsymbol{C}_{25}}{P_{12} \cdot\ \boldsymbol{C}_{25}};\ \frac{\boldsymbol{C}_{13} + \boldsymbol{C}_{35}}{P_{13} \cdot P_{35}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{3+3}{0.6 \cdot 0.7};\ \frac{10+4}{0.3 \cdot 0.2}\right\} = \min\{14.29;\ 233\} = 14.29,$$

$$r_{24}^{(2)} = \min\left\{\frac{\boldsymbol{C}_{24}}{P_{24}};\ \frac{\boldsymbol{C}_{23} + \boldsymbol{C}_{34}}{P_{23} \cdot P_{34}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{6}{0.2};\ \frac{2+5}{0.8 \cdot 0.7}\right\} = \min\{30;\ 12.5\} = 12.5,$$

$$r_{25}^{(2)} = \min\left\{\frac{\boldsymbol{C}_{25}}{P_{25}};\ \frac{\boldsymbol{C}_{23} + \boldsymbol{C}_{35}}{P_{23} \cdot P_{35}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{3}{0.7};\ \frac{2+4}{0.8 \cdot 0.2}\right\} = \min\{4.28;\ 37.5\} = 4.28,$$

$$r_{34}^{(2)} = \min\left\{\frac{\boldsymbol{C}_{34}}{P_{34}};\ \frac{\boldsymbol{C}_{32} + \boldsymbol{C}_{24}}{P_{32} \cdot P_{24}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{5}{0.7}; \frac{6+6}{0.8\cdot 0.2}\right\} = \min\ \{7.14; 75\} = 7.14,$$

$$r_{35}^{(2)} = \min\left\{\frac{\boldsymbol{C}_{34}}{P_{34}}; \frac{\boldsymbol{C}_{32}+\boldsymbol{C}_{24}}{P_{32}\cdot P_{24}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{4}{0.2}; \frac{6+3}{0.8\cdot 0.7}\right\} = \min\{20; 16.07\} = 16.07,$$

$$r_{36}^{(2)} = \min\left\{\frac{\boldsymbol{C}_{35}+\boldsymbol{C}_{56}}{P_{35}\cdot P_{56}}; \frac{\boldsymbol{C}_{34}+\boldsymbol{C}_{46}}{P_{34}\cdot P_{46}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{4+3}{0.2\cdot 0.5}; \frac{5+6}{0.7\cdot 0.8}\right\} = \min\{70; 19.64\} = 19.64,$$

$$r_{46}^{(2)} = r_{46}^{(1)},\ r_{56}^{(2)} = r_{46}^{(1)}.$$

Поскольку пункт 6 из пункта 1 за два шага не достижим, выполним еще один шаг коммутации, вычислив $\boldsymbol{R}^{(3)} = \boldsymbol{R}^{(2)} \oplus \boldsymbol{R}^{(1)}$.

$\boldsymbol{R}^{(3)} =$

	1	2		3		4		5		6	
1	0	3	0.6	5	0.48	10	0.54	6	0.42	9	0.21
2	M	0		2	0.8	7	0.56	3	0.7	6	0.35
3	M	6	0.8	0		5	0.7	9	0.56	11	0.56
4	M	M		M		0		M		6	0.8
5	M	M		M		M		0		3	0.5

$$r_{12}^{(3)} = \frac{3}{0.6},\ r_{13}^{(3)} = \frac{5}{0.48} = 14.6,$$

$$r_{14}^{(3)} = \min\left\{r_{12}^{(2)} \oplus r_{24}^{(1)};\ r_{13}^{(2)} \oplus r_{34}^{(1)}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{3+6}{0.6\cdot 0.2}; \frac{5+5}{0.48\cdot 0.7}\right\} = \min\{75; 29.76\} = 29.76,$$

$$r_{15}^{(3)} = \min\left\{r_{12}^{(2)} \oplus r_{25}^{(1)}; r_{13}^{(2)} \oplus r_{35}^{(1)}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{3+3}{0.6\cdot 0.7}; \frac{5+4}{0.48\cdot 0.2}\right\} =$$

$$= \min\{14.28; 93.7\} = 14.28,$$

$$r_{16}^{(3)} = \min\left\{r_{14}^{(2)} \oplus r_{46}^{(1)};\ r_{15}^{(2)} \oplus r_{56}^{(1)}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{15+6}{0.21\cdot 0.8}; \ \frac{6+3}{0.42\cdot 0.5}\right\} =$$

$$= \min\{125; 42.8\} = 42.8,$$

$$r_{24}^{(3)} = r_{24}^{(2)},\ \ r_{25}^{(3)} = r_{25}^{(2)},$$

$$r_{26}^{(3)} = \min\left\{r_{24}^{(2)} \oplus r_{46}^{(1)};\ r_{25}^{(2)} \oplus r_{56}^{(1)}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{7+6}{0.56\cdot 0.8}; \frac{3+3}{0.7\cdot 0.5}\right\} = \min\{29.01;\ 17.14\} =$$

$$= 17.14,$$

$$r_{35}^{(3)} = r_{35}^{(2)},$$

$$r_{36}^{(3)} = \min\left\{r_{34}^{(2)} \oplus r_{46}^{(1)};\ r_{35}^{(2)} \oplus r_{56}^{(1)}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{5+6}{0.7\cdot 0.8}; \frac{9+3}{0.56\cdot 0.5}\right\} = \min\{19.64; 42.8\} =$$

$$= 19.64,$$

$$r_{46}^{(3)} = r_{46}^{(2)},\ r_{56}^{(3)} = r_{56}^{(2)}.$$

Таким образом, наиболее эффективный маршрут из пункта 1 в пункт 6 является трехэтапным (1–2–5–6) и имеет наилучший показатель эффективности:

Наилучший показатель эффективности равен $9/0.21 = 42.85$.

C. Отыскание оптимальных маршрутов в трехкритериальной транспортной задаче

Рассмотренная выше методика отыскания оптимальных маршрутов в двухкритериальной транспортной задаче легко распространяется на случай, когда из практических соображений кроме использованных ранее критериев целесообразно учитывать еще один важный показатель – продолжительность T реализации плана (где C – это средняя суммарная стоимость транспортировок, P – вероятность выполнения плана). Мера эффективности использования участка (i, j) в этом случае может быть определена значением

$$\mu(i,j) = \frac{C_{ij}T_{ij}}{P_{ij}}.$$

Для расчета этой меры для последовательности участков было использовано общее соотношение, аналогичное соотношению:

$$\mu(k_1 k_n) =$$

$$= \frac{C_{k_1k_2}T_{k_1k_2}}{P_{k_1k_2}} \oplus \frac{C_{k_2k_3}T_{k_2k_3}}{P_{k_2k_3}} \oplus \ldots \oplus \frac{C_{k_{p-1}k_n}T_{k_{n-1}k_n}}{P_{k_{n-1}k_n}} =$$

$$= \frac{\sum_{S=1}^{n-1} C_{k_sk_{s+1}}T_{k_sk_{s+1}}}{\prod_{S=1}^{n-1} P_{k_sk_{s+1}}}.$$

Характеристики участков сети (в том же, что и ранее в примере) сведем в матрицу $\boldsymbol{R}^{(1)}$, элемент которой в i-й строке и j-м столбце определяет их значения для участка (i, j).

$\boldsymbol{R}^{(1)} =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3 5 0.6	10 7 0.3	M	M	M
2	M	0	2 3 0.8	6 4 0.2	3 8 0.7	M
3	M	6 6 0.8	0	5 3 0.7	4 3 0.2	M
4	M	M	M	0	M	6 4 0.8
5	M	M	M	M	0	3 22 0.5

Рассчитаем $\boldsymbol{R}^{(2)} = \boldsymbol{R}^{(1)} \oplus \boldsymbol{R}^{(1)}$.

$\boldsymbol{R}^{(2)} =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3 5 0.6	5 8 0.48	9 9 0.12	6 13 0.42	M
2	M	0	2 3 0.8	7 6 0.56	3 8 0.7	6 30 0.35
3	M	6 6 0.8	0	5 3 0.7	4 3 0.2	11 7 0.56
4	M	M	M	0	M	6 4 0.8
5	M	M	M	M	0	3 22 0.5

Эти характеристики размещены следующим образом: слева вверху в ячейке расположена стоимость транспортировки C_{ij}, справа вверху в ячейке расположена продолжительность прохождения участка T_{ij}, внизу в ячейке расположена вероятность выполнения транспортировки P_{ij}.

Последовательность решения задачи приведем без пояснений.

$$r_{12}^{(2)} = \min\left\{\frac{C_{12}T_{12}}{P_{12}};\ \frac{(C_{13}+C_{32})(T_{13}+T_{32})}{P_{13}\cdot P_{32}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{3\cdot 5}{0.6};\ \frac{(10+6)(7+3)}{0.3\cdot 0.8}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{15}{0.6};\ \frac{16\cdot 10}{0.24}\right\} = \min\{25; 60\} = 25,$$

$$r_{13}^{(2)} = \min\left\{\frac{C_{13}T_{13}}{P_{13}};\ \frac{(C_{12}+C_{23})(T_{12}+T_{23})}{P_{12}\cdot P_{23}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{10\cdot 7}{0.3};\ \frac{(3+2)(5+3)}{0.6\cdot 0.8}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{70}{0.3};\ \frac{40}{0.48}\right\} = \min\{233.3; 83.3\} = 83.3,$$

$$r_{14}^{(2)} = \min\left\{\frac{(C_{12}+C_{24})(T_{12}+T_{24})}{P_{12}\cdot P_{24}};\ \frac{(C_{13}+C_{34})(T_{13}+T_{34})}{P_{13}\cdot P_{34}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{9\cdot 9}{0.6\cdot 0.2};\ \frac{15\cdot 10}{0.3\cdot 0.7}\right\} = \min\left\{\frac{81}{0.12};\ \frac{150}{0.21}\right\} =$$

$$= \min\{675; 714\} = 675,$$

$$r_{15}^{(2)} = \min\left\{\frac{(C_{12}+C_{25})(T_{12}+T_{25})}{P_{12}\cdot P_{25}};\ \frac{(C_{13}+C_{35})(T_{13}+T_{35})}{P_{13}\cdot P_{35}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{6\cdot 13}{0.6\cdot 0.7};\ \frac{14\cdot 10}{0.3\cdot 0.2}\right\} = \min\left\{\frac{78}{0.42};\ \frac{140}{0.06}\right\} =$$

$$= \min\{185.7; 2333.3\} = 185.7,$$

$$r_{23}^{(2)} = r_{23}^{(1)},$$

$$r_{24}^{(2)} = \min\left\{\frac{C_{24}T_{24}}{P_{24}};\ \frac{(C_{23}+C_{34})(T_{23}+T_{34})}{P_{23}\cdot P_{34}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{6\cdot 4}{0.2};\ \frac{7\cdot 6}{0.8\cdot 0.7}\right\} = \min\left\{\frac{24}{0.2};\ \frac{42}{0.56}\right\} =$$

$$= \min\{120; 75\} = 75,$$

$$r_{25}^{(2)} = \min\left\{\frac{C_{25}T_{25}}{P_{25}};\ \frac{(C_{23}+C_{35})(T_{23}+T_{35})}{P_{23}\cdot P_{35}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{3\cdot 8}{0.7};\ \frac{6\cdot 6}{0.8\cdot 0.2}\right\} = \min\left\{\frac{24}{0.7};\ \frac{36}{0.16}\right\} =$$

$$= \min\{34.3; 225\} = 34.3,$$

$$r_{34}^{(2)} = \min\left\{\frac{C_{34}T_{34}}{P_{34}};\ \frac{(C_{32}+C_{24})(T_{32}+T_{24})}{P_{32}\cdot P_{24}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{5\cdot 3}{0.7};\ \frac{12\cdot 10}{0.8\cdot 0.2}\right\} = \min\left\{\frac{15}{0.7};\ \frac{120}{0.16}\right\} =$$

$$= \min\{21.43; 750\} = 21.43,$$

$$r_{35}^{(2)} = \min\left\{\frac{C_{35}T_{35}}{P_{35}};\ \frac{(C_{32}+C_{25})(T_{32}+T_{25})}{P_{32}\cdot P_{25}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{4\cdot 3}{0.2};\ \frac{9\cdot 14}{0.8\cdot 0.7}\right\} = \min\left\{\frac{12}{0.2};\ \frac{126}{0.56}\right\} =$$

$$= \min\{60; 22\} = 60,$$

$$r_{26}^{(2)} = \min\left\{\frac{(C_{24}+C_{46})(T_{24}+T_{46})}{P_{24}\cdot P_{46}};\ \frac{(C_{25}+C_{56})(T_{25}+T_{56})}{P_{25}\cdot P_{56}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{12\cdot 8}{0.16};\ \frac{6\cdot 30}{0.35}\right\} = \min\{600;\ 514.3\} = 514.3,$$

$$r_{36}^{(2)} = \min\left\{\frac{(C_{35}+C_{56})(T_{35}+T_{56})}{P_{35}\cdot P_{56}};\ \frac{(C_{34}+C_{46})(T_{34}+T_{46})}{P_{34}\cdot P_{36}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{7\cdot 25}{0.10};\ \frac{11\cdot 7}{0.56}\right\} = \min\{2750;\ 137.5\} = 137.5,$$

$$r_{46}^{(2)} = r_{46}^{(1)},\ r_{56}^{(2)} = r_{56}^{(1)}.$$

Рассчитаем теперь $\boldsymbol{R}^{(3)} = \boldsymbol{R}^{(2)} \oplus \boldsymbol{R}^{(1)}$.

$\boldsymbol{R}^{(3)} =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3 5 / 0.6	5 8 / 0.24	10 11 / 0.336	6 13 / 0.42	15 13 / 0.096
2	M	0	2 3 / 0.8	7 6 / 0.56	3 8 / 0.7	13 10 / 0.448
3	M	6 6 / 0.8	0	5 3 / 0.7	4 3 / 0.2	11 7 / 0.56
4	M	M	M	0	M	6 4 / 0.8
5	M	M	M	M	0	3 22 / 0.5

$$r_{12}^{(3)} = r_{12}^{(2)},\ r_{13}^{(3)} = r_{13}^{(2)},$$

$$r_{14}^{(3)} = \min\left\{\frac{(C_{12}{}^{(2)}+C_{24})(T_{12}{}^{(2)}+T_{24})}{P_{12}{}^{(2)}\cdot P_{24}};\ \frac{(C_{13}{}^{(2)}+C_{34})(T_{13}{}^{(2)}+T_{34})}{P_{13}{}^{(2)}\cdot P_{34}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{(3+6)(5+4)}{0.6\cdot 0.2};\ \frac{(5+5)(8+3)}{0.48\cdot 0.7}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{81}{0.12};\ \frac{110}{0.336}\right\} = \min\{675;\ 327.4\} = 327.4,$$

$$r_{15}^{(3)} = \min\left\{\frac{(C_{12}{}^{(2)}+C_{25})(T_{12}{}^{(2)}+T_{25})}{P_{12}{}^{(2)}\cdot P_{25}};\ \frac{(C_{13}{}^{(2)}+C_{35})(T_{13}{}^{(2)}+T_{35})}{P_{13}{}^{(2)}\cdot P_{35}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{(3+3)(5+8)}{0.6\cdot 0.7};\ \frac{(5+4)(8+3)}{0.48\cdot 0.2}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{78}{0.42};\ \frac{99}{0.096}\right\} = \min\{185.7;\ 1031\} = 185.7,$$

$$r_{16}^{(3)} = \min\left\{\frac{(C_{14}{}^{(2)}+C_{46})(T_{14}{}^{(2)}+T_{46})}{P_{14}{}^{(2)}\cdot P_{46}};\ \frac{(C_{15}{}^{(2)}+C_{56})(T_{15}{}^{(2)}+T_{56})}{P_{15}{}^{(2)}\cdot P_{56}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{(9+6)(9+4)}{0.12\cdot 0.8};\ \frac{(6+3)(13+22)}{0.42\cdot 0.3}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{15\cdot 13}{0.096};\ \frac{9\cdot 35}{0.126}\right\} = \min\left\{\frac{195}{0.096};\ \frac{315}{0.126}\right\} =$$

$$= \min\{2031;\ 2500\} = 2031,$$

$$r_{23}^{(3)} = r_{23}^{(2)},\ r_{24}^{(3)} = r_{24}^{(2)},\ r_{25}^{(3)} = r_{25}^{(2)},$$

$$r_{26}^{(3)} = \min\left\{\frac{(\mathrm{C}_{24}{}^{(2)}+\mathrm{C}_{46})(\mathrm{T}_{24}{}^{(2)}+\mathrm{T}_{46})}{\mathrm{P}_{24}{}^{(2)}\cdot \mathrm{P}_{46}};\ \frac{(\mathrm{C}_{25}{}^{(2)}+\mathrm{C}_{56})(\mathrm{T}_{25}{}^{(2)}+\mathrm{T}_{56})}{\mathrm{P}_{25}{}^{(2)}\cdot \mathrm{P}_{56}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{(7+6)(6+4)}{0.56\cdot 0.8};\ \frac{(3+3)(8+22)}{0.7\cdot 0.5}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{13\cdot 10}{0.448};\ \frac{6\cdot 30}{0.35}\right\} = \min\{290.2;\ 514.2\} =$$

$$= 290.2,$$

$$r_{34}^{(3)} = r_{34}^{(2)},\ r_{35}^{(3)} = r_{35}^{(2)},\ r_{25}^{(3)} = r_{25}^{(2)},$$

$$r_{36}^{(3)} = \min\left\{\frac{(\mathrm{C}_{34}{}^{(2)}+\mathrm{C}_{46})(\mathrm{T}_{34}{}^{(2)}+\mathrm{T}_{46})}{\mathrm{P}_{34}{}^{(2)}\cdot \mathrm{P}_{46}};\ \frac{(\mathrm{C}_{35}{}^{(2)}+\mathrm{C}_{56})(\mathrm{T}_{35}{}^{(2)}+\mathrm{T}_{56})}{\mathrm{P}_{35}{}^{(2)}\cdot \mathrm{P}_{56}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{(5+6)(3+4)}{0.7\cdot 0.8};\ \frac{(4+3)(3+22)}{0.2\cdot 0.5}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{11\cdot 7}{0.56};\ \frac{7\cdot 25}{0.10}\right\} = \min\{137.5;\ 1750\} = 137.5,$$

$$r_{46}^{(3)} = r_{46}^{(2)},\ r_{56}^{(3)} = r_{56}^{(2)},$$

$$R^{(4)} = \boldsymbol{R}^{(3)} \oplus \boldsymbol{R}^{(1)}$$

$$r_{12}^{(4)} = r_{12}^{(3)},\ r_{23}^{(4)} = r_{23}^{(3)},\ r_{13}^{(4)} = r_{13}^{(3)},\ r_{24}^{(4)} = r_{24}^{(3)},$$

$$r_{14}^{(4)} = r_{14}^{(3)},\ r_{25}^{(4)} = r_{25}^{(3)},\ r_{15}^{(4)} = r_{15}^{(3)},\ r_{25}^{(4)} = r_{25}^{(3)},$$

$$r_{34}^{(4)} = r_{34}^{(3)},\ r_{36}^{(4)} = r_{36}^{(3)},\ r_{35}^{(4)} = r_{35}^{(3)},$$

$$r_{16}^{(4)} = \min\left\{\frac{({C_{14}}^{(3)} + C_{46})({T_{14}}^{(3)} + T_{46})}{{P_{14}}^{(3)} \cdot P_{46}};\ \frac{({C_{15}}^{(3)} + C_{56})({T_{15}}^{(3)} + T_{56})}{{P_{15}}^{(3)} \cdot P_{56}}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{(10 + 6)(11 + 4)}{0.336 \cdot 0.8};\ \frac{(6 + 3)(13 + 22)}{0.12 \cdot 0.5}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{16 \cdot 15}{0.269};\ \frac{15 \cdot 35}{0.06}\right\} = \min\{892.2;\ 8750\} =$$

$$= 892.2.$$

$\boldsymbol{R}^{(4)} =$

<table>
<tr><th></th><th>1</th><th colspan="2">2</th><th colspan="2">3</th><th colspan="2">4</th><th colspan="2">5</th><th colspan="2">6</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td><td>8</td><td>10</td><td>11</td><td>6</td><td>13</td><td>16</td><td>15</td></tr>
<tr><td colspan="2">0.6</td><td colspan="2">0.24</td><td colspan="2">0.168</td><td colspan="2">0.12</td><td colspan="2">0.269</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">M</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td>2</td><td>3</td><td>7</td><td>6</td><td>3</td><td>8</td><td>13</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="2">0.8</td><td colspan="2">0.56</td><td colspan="2">0.7</td><td colspan="2">0.448</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">M</td><td>6</td><td>6</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>11</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="2">0.8</td><td colspan="2">0.7</td><td colspan="2">0.2</td><td colspan="2">0.56</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">M</td><td rowspan="2" colspan="2">M</td><td rowspan="2" colspan="2">M</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td rowspan="2" colspan="2">M</td><td>6</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">0.8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">M</td><td rowspan="2" colspan="2">M</td><td rowspan="2" colspan="2">M</td><td rowspan="2" colspan="2">M</td><td rowspan="2" colspan="2">0</td><td>9</td><td>22</td></tr>
<tr><td colspan="2">0.3</td></tr>
</table>

Оптимальный маршрут в трехкритериальной задаче из пункта 1 в пункт 6 является четырехзвенным (1–2–3–4–6). Соответствующее этому маршруту значение меры эффективности равно

$$\mu\left(r_{16}^{(3)}\right) = \frac{(C_{12} + C_{23} + C_{34} + C_{46})}{P_{12}P_{23}P_{34}P_{46}} \times$$

$$\times \frac{(T_{12} + T_{23} + T_{34} + T_{46})}{P_{12}P_{23}P_{34}P_{46}} = 892.2.$$

Возвращаясь к двухкритериальной задаче, отметим, что в том случае оптимальным был трехзвенный маршрут (1–2–5–6) со значением меры эффективности:

$$\mu\left(r_{16}^{(3)}\right) = \frac{(C_{12} + C_{25} + C_{56})}{P_{12}P_{25}PP_{56}} = 42.85.$$

Этому же маршруту в трехкритериальной задаче соответствует значение результирующего показателя, равное:

$$\mu\left(r_{16}^{(3)}\right) = \frac{(C_{12} + C_{25} + C_{56})(T_{12} + T_{25} + T_{56})}{P_{12}P_{25}P_{56}} =$$

$$= 1499.75,$$

что заметно хуже, чем значение $\mu\left(r_{16}^{(4)}\right)$ из–за крайне плохого значения продолжительности T_{56} преодоления участка (5–6), включенного в оптимальный двухкритериальный маршрут.

Возможное направление дальнейших исследований связано с разработкой методов решения задачи отыскания оптимальных маршрутов в ситуации, когда исходная информация о числовых характеристиках маршрутов является неточной [12–16], или нечеткой [17–20].

Для решения задачи в этом случае могут быть использованы подходы, предложенные в [21, 22].

Выводы. Предложен метод отыскания эффективных компромиссных маршрутов при решении транспортных задач линейного программирования по совокупности критериев: средняя суммарная стоимость, продолжительность транспортировок и надежность выполнения плана перевозок.

Метод основан на разработанной технологии расчета аддитивной меры для оценки эффективности маршрутов, составленных из последовательности отдельных участков. Преимуществом данного метода является вычислительная процедура.

Данная процедура, для решения задачи, не требует применения трудоемкого комбинаторного перебора и обеспечивает возможность быстрого получения результата.

Рассмотрено несколько примеров отыскания оптимальных маршрутов в одно, двух, и трехкритериальных вариантах формулировки транспортных задач.

Список литературы

1. Интриллигатор М. *Математические методы оптимизации экономическая теория*. Москва: Айрес–Пресс, 2002. 564 с.
2. Вентцель Е. С. *Исследование операций.* Москва: Высшая школа, 2001. 208 с.
3. Кузнецов А. В., Сакович В. А., Холод Н. И. *Высшая математика. Математическое программирование.* Минск: Вышэйшая школа, 2001. 351 с.
4. Раскин Л. Г. *Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления*. Москва: Сов. радио, 1979. 344 с.
5. Раскин Л. Г. *Математические методы исследования операций и анализа сложных систем вооружения ПВО*. Харьков: ВИРТА, 1988. 177 с.
6. Раскин Л. Г., Серая О. В. *Нечеткая математика*. Харьков: Парус, 2008. 352 с.
7. Ehrgott M. *Multicriteria Optimizahion.* Springer, 2005. 323 p.
8. Steuer R. E. *Multiple Criteria Optimizahion.* New York: John Wiley, 1986. 546 p.
9. Серая О. В. Клименко Т. А Самородов В. Б. Выбор критерия оптимизации в задаче управления многономенклатурными запасами. *Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета и Северо-Восточного научного центра Транспортной академии Украины: сб. науч. тр.* Харьков: ХНАДУ, 2009. Вып.45. С. 31–34.
10. Зубарев В. В. Ковтуненко А. П. Раскин Л. Г. *Математические методы оценки и прогнозирования технических показателей эксплуатационных свойств радиотехнических систем.* Киев: НАУ, 2005. 184 с.
11. Соболь И. М. *Выбор оптимальных параметров в задачах с многими критериями*. Москва: Дрофа, 2006. 175 с.
12. Pawlak Z. Roughsets. Rough Sets. *International Journal of Information and Computer Sciences*. 1982. Vol.11. No.5. P. 341–356.
13. Pawlak Z. Rough Sets approach to knowledge–based decision support. *European Journal of Operational Research*. 1997. Vol. 99. No.1. P. 48–57.

14. Slowinski R., Vanderpooten D. A generalized definition of rough approximations based on similarity. *IEEE Transactions on Knowledge and data Engineering*. 2000. Vol. 12. No. 2. P. 331–336.
15. Alefeld G., Herzberger J. *Introduction to Interval Computations*. New York: Academic Press, 1983. 352p.
16. Hansen E. *Global Optimization Using Interval Analysis*. New York: Marcel Dekker, 1992. 230 p.
17. Zadeh L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*. 1978. Vol.1. P. 3–28.
18. Kaufman A., Gupta M. *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications*. New York: VN Reinhold, 1985. 334 p.
19. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990. 286 p.
20. Liu B., Zhao B. *Stochastic Programming and Fuzzy Programming*. Beijing: Tsinghua University Press, 1998. 312 p.
21. Raskin L., Sira O. Method of solving fuzzy problems of mathematical programming. *Eastern–european journal of enterprise technologies.* 2016. Vol. 5, No. 4 (83). P. 23–28.
22. Raskin L., Sira O. Fuzzy models of rough mathematics. *Eastern–European Journal of Enterprise Technologies.* 2016. Vol. 6, issue 4. P. 53–60.

References (transliterated)

1. Intriligator M. *Matematicheskie metodyi optimizatsii ekonomicheskaya teoriya* [Mahematical optimization and economic theory]. Moscow, Airis–Press Publ., 2002. 564 p.
2. Ventcel E. S. *Issledovanie operatsiy* [Operations research]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 208 p.
3. Kuznetcov A. V.,Sakovich V. A., Holod N. I. *Vyisshaya matematika. Matematicheskoe programmirovanie* [Higher mathematics. Mathematical Programming]. Minsk, Vyshjejshaja shkola Publ., 2001. 351 p.
4. Raskin L. G. *Analiz slozhnyih sistem i elementyi teorii optimalnogo upravleniya* [Analysis of complex systems and elements of optimal control theory]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1979. – 344 p.
5. Raskin L. G. *Matematicheskie metodyi issledovaniya operatsiy i analiza slozhnyih sistem vooruzheniya PVO* [Mathematical methods of investigation of operations and analysis of complex air defense systems]. Kharkov, WIRTA 1988. 177 p.
6. Raskin L. G., Sira O. V. *Nechetkaya matematika* [Fuzzy Mathematics]. Kharkov, Parus Publ., 2008. 352 p.
7. Ehrgott M. *Multicriteria Optimizahion.* Springer Publ., 2005. 323 p.
8. Steuer R. E. *Multiple Criteria Optimizahion.* New York, John Wiley Publ., 1986. 546 p.
9. Sira O. V., Klimeko T. A.,Samorodov V. B. Vyibor kriteriya optimizatsii v zadache upravleniya mnogonomenklaturnyimi zapasami [Selection of optimization criterion in the multi-nomenclature inventory management problem]. *Vestnik Har'kovskogo nacional'nogo avtomobil'no-dorozhnogo universiteta i Severo-Vostochnogo nauchnogo centra Transportnoj akademii Ukrainy: sb. nauch. tr.* [Bulletin of the Kharkov National Automobile and Highway University and the North-Eastern Scientific Center of the Transport Academy of Ukraine: Sat. sci. tr.]. Kharkov, KhNADU Publ., 2009.Vol. 45.P. 31–34.
10. Zubarev V. V., Kovtunenko A. P. Raskin. L. G. Matematicheskie metodyi otsenki i prognozirovaniya tehnicheskih pokazateley ekspluatatsionnyih svoystv radiotehnicheskih sistem [Mathematical methods estimation and forecasting technical indicators of operational properties of radio engineering systems]. Kiev, NAU Publ., 2005. 184 p.
11. Sobol I. M., *Vyibor optimalnyih parametrov v zadachah s mnogimi kriteriyami* [Choice of optimal parameters in tasks with many criteria]. Moscow, Drofa Publ., 2006. 175 p.
12. Pawlak Z. Rough sets. *International Journal of Information and Computer Sciences*. 1982, vol. 11, no. 5, p. 341–356.
13. Pawlak Z. Rough Sets approach to knowledge–based decision support. *European Journal of Operational Research*. 1997, vol. 99. no. 1, p. 48–57.
14. Slowinski R., Vanderpooten D. A generalized definition of rough approximations based on similarity. *IEEE Transactions on Knowledge and data Engineering*. 2000, vol. 12, no. 2, p. 331–336.
15 Alefeld G., Herzberger, J. *Introduction to Interval Computations*. New York, Academic Press Publ., 1983. 352 p.
16. Hansen E. *Global Optimization Using Interval Analysis*. New York, Marcel Dekker Publ., 1992. 230 p.
17. Zadeh L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*. 1978, vol. 1, p. 3–28.
18. Kaufman A., Gupta M. *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications*. New York, VN Reinhold Publ., 1985. 334 p.
19. Dubois D., Prade H. *Possibility Theory: an Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. New York, Plenum Press Publ., 1988. 263 p. (Rus. ed.: Dubois D., Prade H. *Teoryia vozmozhnostei. Prylozhenye k predstavlenyiuznanyi v ynformatyke*. Moscow, Radyo i sviaz Publ., 1990. 286 p.).
20. Liu B., Zhao B. *Stochastic Programming and Fuzzy Programming*. Beijing, Tsinghua University Press Publ., 1998. 312 p.
21. Raskin L., Sira O. Method of solving fuzzy problems of mathematical programming. *Eastern–european journal of enterprise technologies.* 2016, vol 5, no. 4 (83), p. 23–28.
22. Raskin L., Sira O. Fuzzy models of rough mathematics. *Eastern–European Journal of Enterprise Technologies.* 2016, vol. 6, issue 4, p. 53–60.

Поступила (received) 05.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Раскін Лев Григорович (***Раскин Лев Григорьевич***, ***Raskin Lev***) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» завідувач кафедри розподілених інформаційних систем і хмарних технологій; м. Харків, Україна; ORCID: http://orcid.org/ 0000–0002–9015–4016; e-mail: topology@ukr.net;

Сіра Оксана Володимирівна (***Серая Оксана Владимировна***, ***Sira Oksana***) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри комп’ютерного моніторингу та логістики; м. Харків, Україна; ORCID: http://orcid.org/0000–0002–4869–2371; e-mail: chime@bk.ru

Парфенюк Юрій Леонідович (***Парфенюк Юрий Леонидович***, ***Parfeniuk Yurii***) – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; м. Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000–0001–5357–1868; e-mail: parfuriy.l@gmail.com