

В. П. АНДРІЄВСЬКИЙ, Ю. В. МАКСИМ'ЮК, С. В. МИЦЮК, С. О. ПИСКУНОВ

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕВОЛЮЦІЇ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ І ВИЗНАЧЕННЯ РОЗРАХУНКОВОГО РЕСУРСУ МАСИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ УНІВЕРСАЛЬНОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ

Математичне моделювання процесів континуального руйнування в умовах довготривалої повзучості на основі МСЕ являє собою досить складну задачу, ефективність розв'язання якої залежить від повноти бібліотеки скінченно-елементної бази і алгоритмів розв'язання систем нелінійних рівнянь, а також від організації програмного забезпечення. За основу процедури отримання скінченно-елементних розв'язувальних співвідношень покладені основні принципи моментної схеми скінченних елементів (МССЕ). На відміну від загальноприйнятих підходів використання МССЕ передбачає, крім задання закону розподілення переміщень, незалежне подання деформацій у вигляді рядів Маклорена. В основу алгоритму розв'язання системи нелінійних рівнянь прийнято метод інтегрування по параметру навантаження, причому для отримання достовірних результатів передбачається його послідовне зменшення. Точність розв'язання системи нелінійних рівнянь на кожному кроці по параметру навантаження визначається порівнянням величини суми квадратів вузлових реакцій і суми квадратів вузлових значень зовнішніх навантажень. В якості вихідних співвідношень прийняті рівняння термов'язкопружнопластичності з урахуванням пошкодженості матеріалів. В основу побудови скінченно-елементної моделі об'єктів, покладено принцип використання квазірегулярної фрагментації, яка передбачає побудову загальної нерегулярної скінченно-елементної моделі на основі регулярних скінченно-елементних фрагментів. Це дозволяє суттєво оптимізувати загальну кількість невідомих. При розрахунку нових об'єктів збіжність результатів обґрунтовується шляхом послідовного збільшення параметрів сіткової моделі та зменшення величини кроку інтегрування за рахунок збільшення їх кількості в межах заданого інтервалу навантажень, а також збільшення точності розв'язку системи нелінійних рівнянь на кожному кроці. В даній роботі для обґрунтування достовірності результатів, отриманих на основі універсального скінченного елемента, проведено порівняння параметрів напружено-деформованого стану і параметру пошкодженості ω з даними, обчисленими на основі скінченних елементів загального типу з чисельним інтегруванням і елементів з інтегруванням в замкненому вигляді.

Ключові слова: напружено-деформований стан, повзучість, параметр пошкодженості, скінченний елемент, ресурс.

В. П. АНДРИЕВСЬКИЙ, Ю. В. МАКСИМ'ЮК, С. В. МИЦЮК, С. О. ПИСКУНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСЧЕТНОГО РЕСУРСА МАССИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УНИВЕРСАЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Математическое моделирование процессов континуального разрушения в условиях длительной ползучести на основе МКЭ представляет собой достаточно сложную задачу, эффективность решения которой зависит от полноты библиотеки конечно-элементной базы и алгоритмов решения систем нелинейных уравнений, а также от организации программного обеспечения. В основу процедуры получения конечно-элементных разрешающих соотношений положены основные принципы моментной схемы конечных элементов (МСКЭ). В отличие от общепринятых подходов использование МСКЭ предусматривает, помимо выбора закона распределения перемещений, независимое представление деформаций в виде рядов Маклорена. В основе алгоритма решения системы нелинейных уравнений принят метод интегрирования по параметру нагрузки, причем для получения достоверных результатов предполагается последовательное уменьшение шага интегрирования. Для оптимизации дискретных моделей МКЭ использован подход, основанный на начальной фрагментации расчетной модели. Точность решения системы нелинейных уравнений на каждом шаге по параметру нагрузки определяется сравнением величины суммы квадратов узловых реакций и суммы квадратов узловых значений внешних нагрузок. В качестве исходных соотношений приняты уравнения термовязкоупругопластичности с учетом повреждаемости материалов. В основании построения конечно-элементной модели объектов положен принцип использования квазирегулярной фрагментации, которая предусматривает построение общей нерегулярной конечно-элементной модели на основе регулярных конечно-элементных фрагментов. Это позволяет существенно оптимизировать общее количество неизвестных. При расчете новых объектов сходимость результатов обосновывается путем последовательного увеличения параметров сеточной модели, уменьшением величины шага интегрирования за счет увеличения их количества в пределах заданного интервала нагрузок, а также увеличением точности решения системы нелинейных уравнений на каждом шаге. В данной работе для обоснования достоверности результатов, полученных на основе универсального конечного элемента, проведено сравнение параметров напряженно-деформированного состояния и параметра повреждаемости ω с результатами, полученными на основе конечных элементов общего типа с численным интегрированием и элементов с интегрированием в замкнутом виде.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, ползучесть, параметр повреждаемости, конечный элемент, ресурс.

V. P. ANDRIIEVSKIY, Y. V. MAXIMYUK, S. V. MITSYUK, S. O. PISKUNOV

RESEARCH OF EVOLUTION OF THE STRESS STRAIN AND DEFINITION OF THE ESTIMATED LIFE-TIME OF MASSIVE STRUCTURE ELEMENTS USING OF THE UNIVERSAL FINITE ELEMENT

Mathematical modeling of the continual fracture processes under long creep conditions on the basis of FEM is a rather complex problem. The efficiency of solving of this problem depends on the completeness of the finite element library and the algorithms for solving systems of nonlinear equations, as well as on the software organization. The main principles of the moment scheme of finite elements (MSFE) is the base for procedure of obtaining of finite-element solving relationships. In contrast to the generally accepted approaches the use of MSFE provides an independent representation of deformations in the form of Maclaurin series in addition to the choose of the law of displacements distribution. At the base of the algorithm for solving a system of nonlinear equations, the method of integration over the load parameter is adopted. It is assumed to reduce an integration step consecutively to obtain reliable results. To optimize discrete FEM models, an approach based on the initial fragmentation of the computational model was used. The accuracy of solving of a system of nonlinear equations at each step of the load parameter is determined by comparing the sum of the squares of the nodal reactions and the sum of the squares of the nodal values of the external loads. The equations of termoviscolastoplastic deformation taking into account the damage of materials are taken as initial relations. The principle of using of quasiregular fragmentation which involves constructing a general irregular finite element model based on regular finite element fragments is basis of the procedure of constructing the finite element model of objects under consideration. This make it possible to optimize substantially the total number of unknowns.

© В. П. Андрієвський, Ю. В. Максим'юк, С. В. Мицюк, С. О. Пискунов, 2018

When calculating of a new objects, the convergence of the results is justified by a sequential increase of the parameters of the mesh model, a decrease of integration step value due to an increase of their number within a given range of loads, and an increase of the accuracy of solving of nonlinear equations system at each step. In order to justify the reliability of the results, obtained on the basis of the universal finite element, the parameters of the stress-strain state and the damage parameter ω were compared with data calculated on the basis of finite elements of a general type with numerical integration and elements with integration in a closed form.

Keywords: stress strained state, creep, damage parameter, finite element, life-time.

Вступ. Опис процесу деформування в умовах повзучості із використанням скалярного параметра пошкодженості матеріалу здійснено в роботах вітчизняних [1–10] та багатьох зарубіжних вчених [11–18]. При цьому в [6, 8, 14] відзначено збіг результатів розрахунку із використанням параметра пошкодженості з експериментальними даними визначення напружено-деформованого стану і часу до руйнування. В переважній більшості з перелічених робіт розглянуті одноримірні, плоскі та вісесиметричні задачі, для розв'язання деяких з них використовується МСЕ. Розгляд із використанням МСЕ невісесиметричних задач для тіл обертання і просторових задач здійснений в дуже обмеженій кількості робіт [2, 19, 20]. Тому розв'язання таких задач є важливою проблемою.

Моделювання процесу експлуатаційного навантаження ротора парової турбіни. Диск ротора парової турбіни є масивним вісесиметричним тілом з центральним наскрізним отвором та ободом для закріплення бандажу з лопатками (рис. 1, а). Сили, що впливають на диск обумовлено його обертанням з частотою $n_0=3\ 000$ об/хв і складаються із рівномірно розподіленого по площині бандажного обода S поверхневого навантаження інтенсивністю 68 МПа, що моделює вплив лопаток, і масових сил, що розподілені по об'єму диска. При побудові скінченноелементної моделі розрахункова область була розділена на чотири фрагменти.

Варіант сітки показаний на рис. 1, б (товсті лінії відповідають границям фрагментів). Для дослідження збіжності розв'язку виконано порівняння отриманого розподілення інтенсивності нормальних напружень σ_i вздовж радіуса ротора, на якому σ_i досягає максимальних значень (рис. 2, в, лінія А–А), вздовж концентратора напружень – галтелі (на відстані 2,5 мм від поверхні – рис. 2, в, лінія $K_1 - K - K_2$), а також вздовж перерізу, що лежить на відстані 63 мм від осі ротора і є паралельним до неї (рис. 2, в, лінія В–В).

Масова сила dP , що діє на елементарний об'єм матеріалу dV , що обертається навколо осі з частотою n_0 і розташований на відстані $R = z^2$ від осі обертання, обчислюється за формулою

$$dP = \rho w^2 R dV,$$

де ρ – щільність матеріалу диску, $\rho = 7850$ кг/м³; w – кутова швидкість обертання диску, $w = \pi n_0 / 30$.

Результати визначення напружено-деформованого стан подані у вигляді величин інтенсивності напружень σ_i , отриманих при використанні просторових і універсальних скінченних елементів (рис. 2). Як видно, спостерігається повне співпадіння результатів визначення σ_i на основі обох видів скінченних елементів [21, 22]. В роботі [23] викладений алгоритм розв'язання систем нелінійних рівнянь, який використовується в даній роботі.

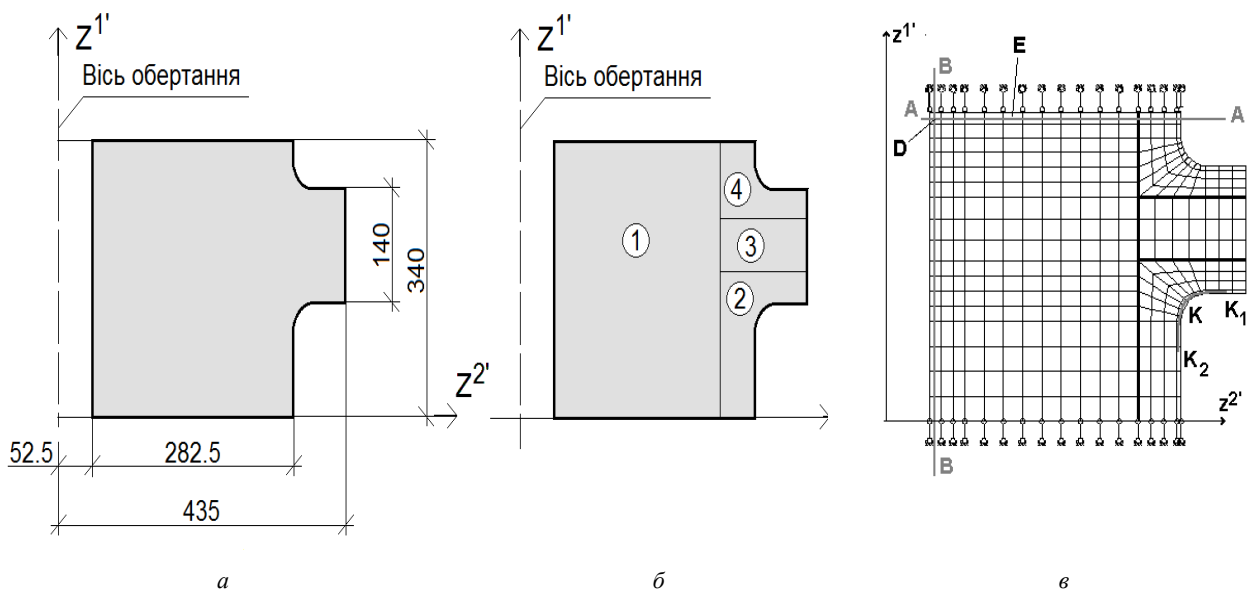


Рис. 1. Диск ротора парової турбіни (а – поперечний переріз; б – фрагментація розрахункової моделі; в – скінченно елементна модель)

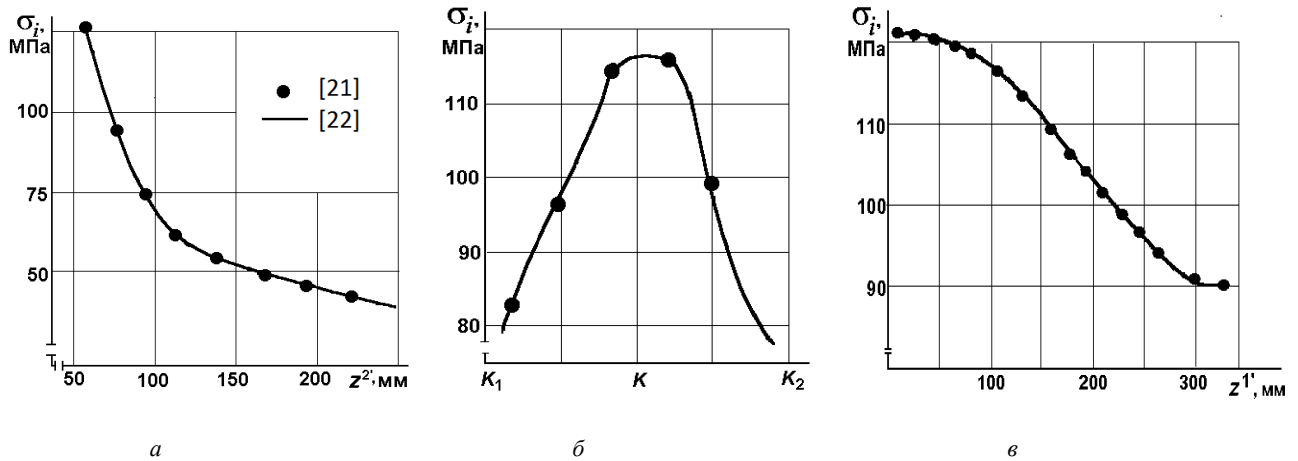


Рис. 2. Збіжність інтенсивності нормальних напружень в початковий момент часу

Для опису деформування в умовах повзучості з урахуванням накопичення пошкодженості матеріалу застосовано рівняння

$$\xi_i^c = A \left(\frac{\sigma_i}{1 - c\omega} \right)^n t^m, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = B \left[\frac{(1 - \alpha)\sigma_i + \alpha\sigma_1}{1 - \omega} \right],$$

де $A = 3.523 \times 10^{-21} \text{МПа}^{-21} \text{год}^{-m-1}$, $c = 0.7$, $n = 5.51$, $m = -0.47$, $B = 6.555 \times 10^{-19} \text{МПа}^{-\Psi} \text{год}^{-1}$, $\alpha = 0.7$, $\Psi = 4.23$ – константи матеріалу.

Дослідження збіжності в залежності від величини кроку за часом Δt проводилось шляхом контролювання похибки визначення величин ω в найбільш пошкодженій зоні по закінченні першої стадії невстановленої повзучості, на II стадії встановленої повзучості, а також за величиною часу до початку руйнування.

На першому етапі проведено моделювання деформування на протязі 98.4 годин після прикладення навантаження. До цього часу закінчується I стадія невстановленої повзучості, що встановлено за величиною $\partial\omega/\partial t$.

Розрахунок проведений при змінному кроці за

часом. Розглянуто три послідовності кроків Δt (№№ 1–3), що поступово збільшуються від 0.04 до 15 год. в послідовності № 1, від 0.02 до 10 год. в № 2 і від 0.01 до 5 год. в № 3. Дослідження проведено в точках D і K (рис. 1), де спостерігаються локальні максимуми σ_i в початковий момент часу і, відповідно, максимуми значень ω на початковому етапі деформування. Як видно з наведених в табл. 1. результатів (величини ω – в чисельнику, похибка відносно до розв’язку, що отриманий при найменшому кроці за часом $\delta_\omega, \%$ – в знаменнику) похибка визначення пошкодженості для послідовності кроків № 2 лежить в межах 2 %

При подальшому моделюванні деформування на II стадії встановленої повзучості на часовому інтервалі 98.4–21 100 годин крок за часом було послідовно збільшено до $\Delta t=250, 500, 1\ 000$ і $2\ 000$ год. Як видно з наведених в табл. 2 результатів (значення ω в точці найбільших значень на радіусі A-A і відповідних похибок δ_ω , які обчислені відносно до розв’язку, отриманого при $\Delta t=250$ год.) точність визначення пошкодженості становить біля 2%.

Таблиця 1 – Збіжність параметру пошкодженості при повзучості в інтервалі 0–98.4 год.

		$t = 7.4$ год.	$t = 98.4$ год.
Точка	Крок Δt , № №	$\omega, 10^{-4} / \delta_\omega, \%$	
D	1	0.0380 / 7.4	0.242 / 3.8
	2	0.0350 / 1.1	0.248 / 1.4
	3	0.0354 / –	0.252 / –
K	1	0.0339 / 16.0	0.275 / 4.5
	2	0.0399 / 1.8	0.282 / 1.7
	3	0.0407 / –	0.287 / –

Таблиця 2. – Збіжність параметру пошкодженості в інтервалі від 98.4 год і часу до початку руйнування

t , год	8 600	21 100	$t_{\text{руйн.}} \text{ год.} / \delta_{t \text{ руйн.}} \%$
Δt_{max} , год	$\omega / \delta_\omega, \%$		
2000	–	0.04138 / 2.2	127 100 / 6.27
1000	0.01763 / 1.56	0.04194 / 2.28	122 100 / 2.09
500	0.01783 / 0.44	0.04264 / 0.65	121 100 / 1.25
250	0.01791 / –	0.04292 / –	119 600 / –

Розв'язання задачі на III стадії повзучості до початку руйнування проводилось із $\Delta t = 2\,000, 1\,000, 500, 250$ год., а також із поступовим зменшенням кроку за часом від 2 000 до 50 год. на інтервалі від 100 000 год. Отримані значення часу до початку руйнування (t руйн., табл. 2) свідчать, що результат, як у випадку застосування змінного кроку за часом, так і для постійних кроків ($\Delta t = 500, 1\,000$) збігається з похибкою в межах 2%. В якості величини розрахункового ресурсу роботи деталі приймаємо значення, отримане при змінному кроці за часом (117 600 год.), припускаючи величину похибки визначення ресурсу в запас.

Отримані результати дозволяють спостерігати еволюцію напружено-деформованого стану ротора на протязі всього процесу деформування – зміння в часі розподілення інтенсивності нормальних напружень і параметру пошкодженості (рис. 3). Як видно з наведених на рис. 3 ізоліній розподілення σ_i , в момент $t = 0$ зона максимальних напружень розташована на внутрішньому радіусі диску (рис. 3, а). З часом, внаслідок розвинення деформацій повзучості, відбувається зменшення максимальних значень і перерозподіл напружень: так, на момент часу $t = 21\,000$ максимальні напруження зменшилися вдвічі (рис. 3, б), а в момент, попереджуючий початок руйнування ($t = 117\,000$ год., рис. 3, в) напружено-деформований стан диску є досить однорідним.

Початкове розташування зони максимальних

значень пошкодженості відповідає розташуванню зони максимальних напружень (рис. 4, а). З часом відбувається перерозподілення пошкодженості за рахунок перерозподілення напружень в процесі повзучості. Відповідно, зона максимальних значень пошкодженості поступово змінює розташування вздовж радіусу в напрямку від осі обертання.

До моменту часу біля 21 000 год. з початку деформування ця зона є досить великою і розташована всередині диска (рис. 4, б). На протязі всього залишку часу до початку руйнування значення пошкодженості в цій зоні є більшими, ніж в точках D і K (рис. 1, в), що відповідають максимумам напружень в початковий момент часу (рис. 4, г). З часом зона максимальних значень пошкодженості локалізується в точці E, де в момент часу $t = 117\,600$ год. Значення пошкодженості досягають максимальних значень (рис. 4, в). Таким чином, в даному випадку руйнування розпочинається з середини диска.

Зміння пошкодженості з часом в характерних точках проілюстровано на рис. 4, г. Як видно, до моменту часу біля 100 000 годин значення пошкодженості в точках D, K і E відрізняються приблизно в півтора рази. Після досягнення параметром пошкодженості в точці K значення 0.5 процес накопичення пошкодженості набуває лавиноподібного характеру і збільшення значень до критичних ($\omega=0.9$) відбувається за проміжок часу менше 10% від всього процесу навантаження.

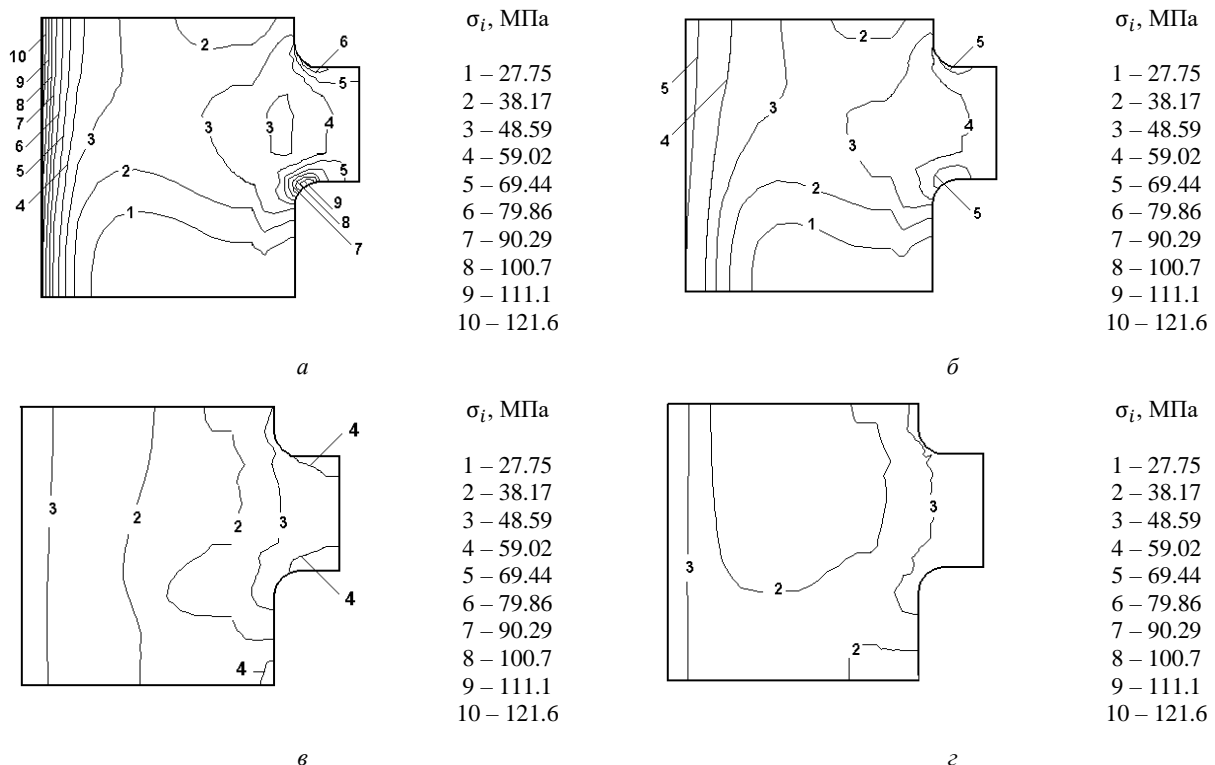


Рис. 3. Розподілення інтенсивності напружень в поперечному перерізі ротора (а – 0 год.; б – 98.4 год.; в – 21 000 год.; г – 117 600 год.)

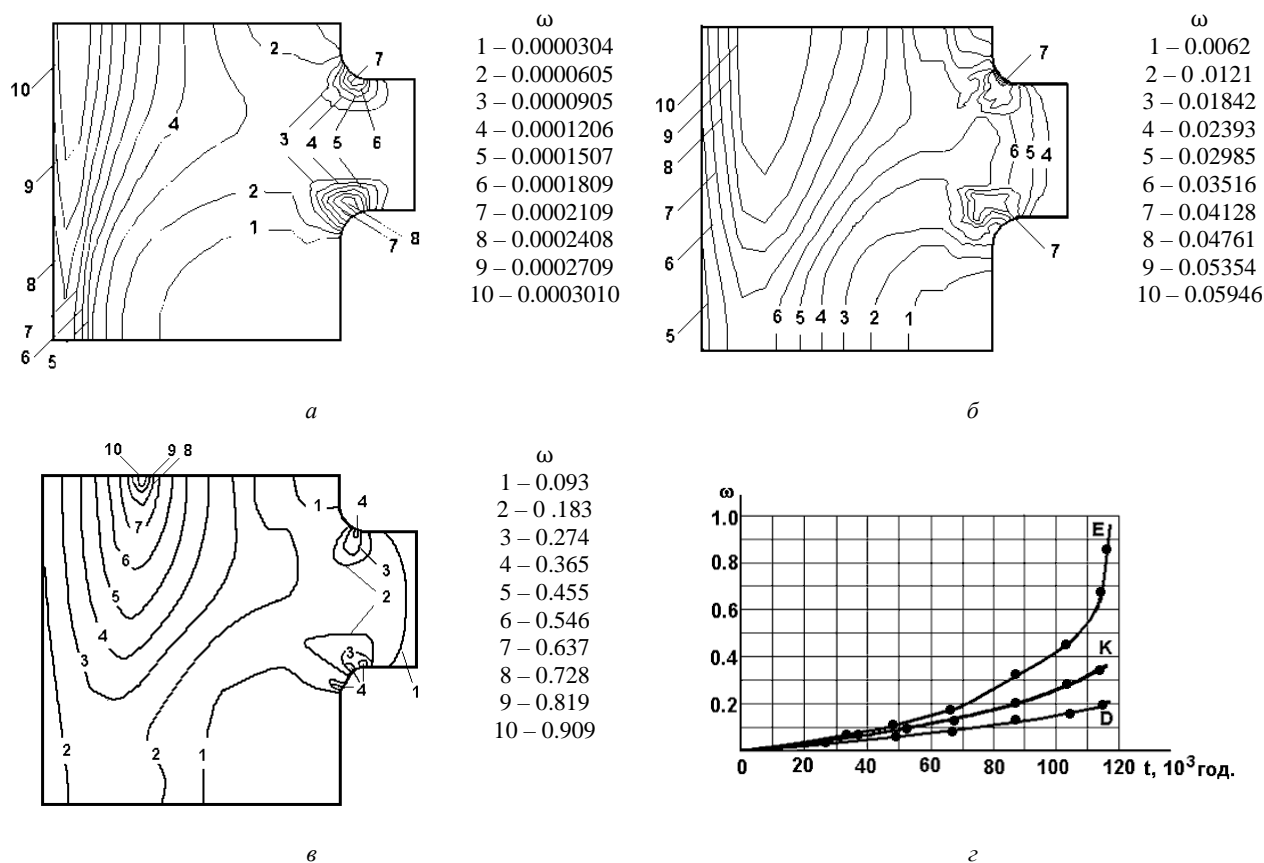


Рис. 4. Розподілення пошкодженості в поперечному перерізі ротора в залежності від часу (*a* – 98,4 год.; *б* – 21 100 год.; *в* – 117 200 год.) і змінення пошкодженості з часом (*z*)

Наведені в роботі [24] результати експериментальних досліджень процесу повзучості дисків під час їх обертання із великими швидкостями свідчать, що руйнування може розпочинатися з появи радіальних тріщин на торцевій поверхні диска як біля центрального отвору, так і посередині диска. При цьому розташування тріщин є різним для дисків із різних сталей. Необхідно відзначити, що в цьому експериментальному дослідженні навантаження обиралися таким чином, щоб забезпечити руйнування дисків в короткий термін (в межах 100–200 год.). Проведення масштабних експериментальних досліджень процесу деформування елементів енергетичного обладнання на базах, що відповідають розрахунковим строкам експлуатації не є можливим. Як свідчать отримані при розв'язку цієї задачі результати, розроблена методика дає змогу проводити чисельне моделювання процесів деформування реальних елементів конструкцій на базах, що відповідають термінам їх експлуатації із урахуванням ефекту перерозподілення напружень і визначенням розташування початкових зон руйнування.

Висновок. Наведені результати дозволяють стверджувати, що всі використані при розрахунку фрагмента цільникового ротору скінчені елементи (загального типу з чисельним інтегруванням і з інтегруванням в замкненому вигляді та універсальний SE) дозволяють отримувати практично тотожні результати визначення параметрів напружено-

деформованого стану при моделюванні тривалих процесів навантаження.

Список літератури

1. Анищенко Г. О., Бреславский Д. В., Морачковский О. К. Ползучесть и длительная прочность елочного замкового соединения ГТД при совместном действии статических и циклических нагрузок. *Проблемы прочности*. 1998. № 1. С. 34–41.
2. Биргер И. А., Даревский В. М., Демьянушко И. В. и др. *Расчет на прочность авиационных газотурбинных двигателей*. Москва: Машиностроение, 1984. 208 с.
3. Бреславский Д. В., Корытко Ю. Н. Ползучесть тел вращения при циклических теплосменах. *Методы розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. 2009. Вип. 10. С. 41–47.
4. Галишин А. З., Шевченко Ю. Н. Определение осесимметрического упруго-пластического состояния тонких оболочек с учетом третьего инварианта девиатора напряжений. *Международный научный журнал «Прикладная механика»*. 2010. Т. 46, № 8. С. 19–28.
5. Гецов Л. Б. *Ползучесть и длительная прочность металлических материалов: учебн. пособие*. СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2005. 52 с.
6. Гигиняк Ф. Ф., Булах П. А. Прогнозирование долговечности теплоустойчивой стали 10ГН2МФА с учетом повреждаемости металла при пульсирующем растяжении в условиях сложного напряженного состояния. *Проблемы прочности*. 2012. № 5. С. 98–104.
7. Гигиняк Ф. Ф., Булах П. А. Усовершенствование упруговязкопластической модели деформирования с учетом повреждений. *Проблемы прочности*. 2012. № 4. С. 58–66.
8. Голуб В. П. Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и

- усталости. *Международный научный журнал «Прикладная механика»*. 2000. Т. 36, № 3. С. 31–66.
9. Лелюх Ю. И. Анализ методов учета повреждаемости материала при термовязкоупругопластическом деформировании. *Международный научный журнал «Прикладная механика»*. 2007. Т. 43, № 12. С. 110–121.
 10. Шевченко Ю. Н. Деформационная теория термовязкоупругопластического деформирования ортотропного тела, учитывающая историю нагружения. *Проблемы прочности*. 2000. № 5. С. 74–84.
 11. Логинов О. А. Распространение фронта разрушения в толстостенной трубе в условиях ползучести. *Надежность и прочность машиностроительных конструкций: сб. науч. тр. Куйбышев: Куйбышев. политехн. ин-т*, 1988. С. 61–67.
 12. Локощенко А. М., Назаров В. В. Длительная прочность металлов при равноосном плоском напряженном состоянии. *Прикладная механика и техническая физика*. 2009. Т. 50, № 4. С. 150–157.
 13. Муравченко Ф. М. Актуальные проблемы динамики, прочности и надежности авиадвигателей. *Вибрації в техніці і технологіях*. 2004. № 6 (38). С. 2–4.
 14. Харченко В. В. *Моделирование процессов высокоскоростного деформирования материалов с учетом вязкопластических эффектов*. К.: Логос, 2009. 280 с.
 15. Chen G. G., Hsu T. R. The role of plastic strains in creep crack growth. *Eng. Fracture Mechanics*. 1991. Vol. 39, № 3. P. 493–506.
 16. Jakowluk A. *Procesy pelzania i zmecczenia w materialach*. Warszawa: Wyd. Nauk. Tech., 1993. 484 p.
 17. Murakami S., Sanomura Y. Creep and damage of cooper under multiaxior states of stress. *Plasticity Tday*. London: Elsevier, 1985. P. 535–551.
 18. Nishihara T., Yamada N. Damage mechanic correlation for high-cycle loading condition. *Fac. Enineering*. Kyoto Univ. 1956, № 3. P. 175–213.
 19. Мельников В. В. Температурные напряжения в упругой сфере, содержащей конические вырезы. *Прикладная механика и техническая физика*. 2009. Т. 50, № 6. С. 161–164.
 20. Русинко А. Н. Аналітичний опис повзучості попередньо деформованого матеріалу. *Машинознавство*. 2004. № 1. С. 13–16.
 21. Гуляр О. І., Пискунов С. О., Солодей І. І. та ін. Ефективність моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) в задачах згину та з концентраторами. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2012. Вип. 89. С. 143–157.
 22. Максим'юк Ю. В. Розрахункові співвідношення універсального скінченого елемента на основі моментної схеми скінчених елементів. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2015. Вип. 94. С. 244–251.
 23. Гуляр О. І., Пискунов С. О., Максим'юк Ю. В. Алгоритм розв'язання геометрично нелінійної задачі в'язкопружнопластичного деформування двовимірних тіл. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2009. Вип. 83. С. 44–62.
 24. Василенко Г. С. Условие разрушения неравномерно нагретых вращающихся дисков. *Труды ЦНИИТМАШ*. 1962, № 30. С. 5–18.
- References (transliterated)**
1. Anyshchenko H. O., Breslavskiy D. V., Morachkovskiy O. K. Polzuchest y dlytelnaia prochnost elochnoho zamkovoho soedyneniya lopatki HTD pry sovместnom deistviy statycheskykh y tsyklycheskykh nahruzok [Creep and long-time durability of fir-tree interlock of gas turbine blade under the united action of static and cyclic loads]. *Problemy prochnosti* [Strength of Materials]. 1998, no.1, pp. 34–41.
 2. Byrher Y. A., Darevskiy V. M., Demianushko Y. V. et al. *Raschet na prochnost avyatsyonnykh hazoturbynykh dyhatelei* [Calculation on durability of aviation turbo-engines]. Moscow, Mashynostroeye Publ. 1984. 208 p.
 3. Breslavskiy D. V., Korytko Yu. N. Polzuchest tel vrashcheniya pry tsyklycheskykh teplosmenakh [Creep of bodies of rotation under cyclic warm changing]. *Metody rozv'язuvannia prykladnykh zadach mekhaniky deformivnoho tverdogo tila* [Methods for solving of applications of the solid body]. 2009, issue 10, pp. 41–47.
 4. Halysyn A. Z., Shevchenko Yu. N. Opredelenye osesymmetrychnoho upruho-plastycheskoho sostoianiya tonkykh obolochek s uchetom treteho ynvaryanta devyatora napriazheniy nahruzok [Determination of the axisymmetrical elasto-plastic state of thin shells taking into account the third invariant of stress deviator]. *Prikladnaja mekhanika* [International Applied Mechanics]. 2010, vol. 46, no. 8, pp. 19–28.
 5. Hetsov L. B. *Polzuchest y dlytelnaia prochnost metallycheskykh materyalov* [Creep and long-time durability of metallic materials. Manual]. Saint Petersburg, Yzd-vo Polytekhn. Un-ta Publ, 2005. 52 p.
 6. Hyhyniak F. F., Bulakh P. A. Uovershenstvovanye upruhoviazkoplastycheskoi modeli deformirovaniya s uchetom povrezhdeniy [Improvement of elasto-viscoplastic model of deformation with an account of damage]. *Problemy prochnosti* [Strength of Materials]. 2012, no. 4, pp. 58–66.
 7. Hyhyniak F. F., Bulakh P. A. Prohnozyrovanye dolhovechnosti teploustoichyvoi staly 10HN2MFA s uchetom povrezhdaemosti metalla pry pulsyruishchem rastiazheniy v usloviakh slozhnoho napriazhennoho sostoianiya [Prognostication of longevity of “10GH2MFA” thermostable steel taking into account of metal damage at pulsating tension in the conditions of the difficult stress state]. *Problemy prochnosti* [Strength of Materials]. 2012, no. 5, pp. 98–104.
 8. Holub V. P. Nelyneinaia mekhanika kontynualnoi povrezhdenosti y ee prylozhenye k zadacham polzuchesty y ustalosti [Nonlinear mechanics of continual damage and its application to the tasks of creep and fatigue]. *Prikladnaja mekhanika* [International Applied Mechanics]. 2000, vol. 36, no. 3, pp. 31–66.
 9. Leliukh Yu. Y. Analiz metodov ucheta povrezhdaemosti materyala pry termoviazkoprugoplastychem deformirovaniy [Analysis of methods for accounting of material damage during thermo-viscous elastically plastic deformation]. *Prikladnaja mekhanika* [International Applied Mechanics]. 2007, vol. , no. 12, pp. 110–121.
 10. Shevchenko Yu. N. Deformatsyonnaia teoriya termoviazkoprugoplastycheskoho deformirovaniya ortotropnoho tela, uchytivaiushchaia ystoriyu nahruzheniya [Deformation theory of thermoviscoelastic-plastic deformation of an orthotropic body, taking into account the loading history]. *Problemy prochnosti* [Strength of Materials]. 2000, no. 5, pp. 74–84.
 11. Lohynov O. A. Rasprostraneniya fronta razrusheniya v tolstostennoi tube v usloviakh polzuchesty [Distribution of fracture front in the thick-walled pipe under conditions of creep]. *Nadezhnost y prochnost mashynostroytelnykh konstruksiy: sb. nauch. tr. [Reliability and durability of machine-building structure]*. Kuibishev, Kujbyshev. politehn. in-t Publ., 1988, pp. 61–67.
 12. Lokoshchenko A. M., Nazarov V. V. Dlytelnaia prochnost metallov pry ravnoosnom ploskom napriazhenom sostoianiy polzuchesty [Long-time durability of metals at equiaxial plane stress state]. *Prikladnaja mekhanika y tehicheskaja fizyka* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]. 2009, vol. 50, no. 4, pp. 150–157.
 13. Muravchenko F. M. Aktualnye problemy dynamiky, prochnosti y nadezhnosti avyadyhatelei [Actual problems of dynamics, durability and reliability of aero-engines]. *Vibratsii v tekhnitsi i tekhnologiiakh* [Vibrations in a technique and technologies magazine]. 2004, no. 6 (38), pp. 2–4.
 14. Kharchenko V. V. *Modelirovaniye protsessov vyaskoskorostnoho deformirovaniya materyalov s uchetom viazkoplastycheskykh effektov* [Design of processes of high-speed deformation of materials taking into account visco-plastic effects]. Kyiv, Lohos Publ., 2009. 280 p.
 15. Chen G. G., Hsu T. R. The role of plastic strains in creep crack growth. *Eng. Fracture Mechanics*. 1991, vol. 39, no. 3, pp. 493–506.
 16. Jakowluk A. *Procesy pelzania i zmecczenia w materialach*. [Processes of creep and hardening in materials].– Warszawa : Wyd.Nauk.Tech., 1993. – 484 p.
 17. Murakami S., Sanomura Y. Creep and damage of cooper under multiaxior states of stress. *Plasticity Tday*. London, Elsevier Publ., 1985, pp. 535–551.
 18. Nishihara T., Yamada N. Damage mechanic correlation for high-cycle loading condition. *Fac. Enineering*. Kyoto Univ, 1956, no. 3, pp. 175–213.
 19. Melnykov V. V. Temperaturnye napriazheniya v upruhoi sfere, sodержashchei konycheskye vyrezy [Temperature stresses in a elastic sphere containing conical cuts]. *Prikladnaja mekhanika y tehicheskaja fizyka* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]. 2009, vol. 50, no. 6, pp. 161–164.

20. Rusynko A. N. Analytychnyi opys povzuchosti poperedno deformovanoho materialu [Analytical description of creep of the preliminary deformed material]. *Mashynoznavstvo* [Engineering science]. 2004, no. 1, pp. 13–16.
21. Huliar O. I., Pyskunov S. O., Solodei I. I. et al. Efektyvnist momentnoi skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) v zadachakh zghynu ta z kontsentroramy [Efficiency of moment scheme of finite element (MSFE) in the problem of bending and stress concentrators]. *Opir materialiv i teoriia sporud* [Strength of Materials and Theory of Structures]. 2012, issue 89, pp. 143–157.
22. Maksymiuk Yu. V. Rozrakhunkovi spivvidnoshennia universalnogo skinchenoho elementa na osnovi momentnoi skhemy skinchenykh elementiv [Solving relations of universal finite element on the basis of moment scheme of finite element]. *Opir materialiv i teoriia sporud* [Strength of Materials and Theory of Structures]. 2015, issue 94, pp. 244–251.
23. Huliar O. I., Pyskunov S. O., Maksymiuk Yu. V. Alhorytm rozviazannia heometrychno nelineinnoi zadachi viazkoprzhnoplachynoho deformuvannia dvovymirnykh til [Algorithm of decision of geometrically nonlinear problem of viscoelastoplasticity of two-dimensional bodies]. *Opir materialiv i teoriia sporud* [Strength of Materials and Theory of Structures]. 2009, issue 83, pp. 44–62.
24. Vasylychenko H. S. Uslovyie razrusheniia neravnomerno nahretkh vrashchaiushchykh diskov [Condition of destruction of the unevenly heated rotating disks]. *Trudi CNITMASH* [Proceedings of CNITMASH]. 1962, no. 30, pp. 5–18.

Надійшла (received) 05.05.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Андрієвський Віктор Петрович (Андрієвский Виктор Петрович, Andriyevsky Andriievskiy Viktor Petrovich) – кандидат технічних наук, доцент, Київський національний університет будівництва і архітектури, доцент кафедри будівельної механіки; м. Київ, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6172-8797>; e-mail: vandriievskiy@i.ua

Максим'юк Юрій Всеволодович (Максимюк Юрий Всеволодович, Maximyuk Yuriy Vsevolodovich) – кандидат технічних наук, доцент, Київський національний університет будівництва і архітектури, доцент кафедри будівельної механіки; м. Київ, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5814-6227>; e-mail: maximyuk@ukr.net

Мицюк Сергій Вікторович (Мицюк Сергей Викторович, Mitsyuk Sergey Victorovich) – кандидат технічних наук, доцент, Київський національний університет будівництва і архітектури, доцент кафедри будівельної механіки; м. Київ, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6481-4036> e-mail: serewka@ukr.net

Пискунов Сергій Олегович (Пискунов Сергей Олегович, Piskunov Sergey Olegovich) – доктор технічних наук, професор, Київський національний університет будівництва і архітектури, професор кафедри будівельної механіки; м. Київ, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3987-0583>; e-mail: s_piskunov@ua.fm