УПРАВЛІННЯ В ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS

УДК 519.2 **DOI: 10.20998/2079-0023.2019.02.02**

О. С. КУЦЕНКО, М. А. ОДАРЧЕНКО

РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ СІЛЬВЕСТРА СПЕКТРАЛЬНИМ МЕТОДОМ

Матричні лінійні рівняння Сільвестра та Ляпунова широко використовуються в теорії управління і теорії стійкості руху, а також при розв'язанні рівняння Ріккаті у задачі аналітичного конструювання оптимальних регуляторів. Особливої актуальності проблема розв'язання рівняння Сільвестра придбала у зв'язку з вирішенням завдань синтезу спостерігачів Люенбергера зниженої розмірності та задач модального синтезу систем управління лінійними автоматичними системами. У роботі проведено аналіз існуючих методів розв'язання матричного рівняння Сільвестра. Обґрунтовано обмеженість основних методів чисельного розв'язання матричних рівнянь, а також відсутність аналітичних методів розв'язання. В роботі запропоновано досить простий метод розв'язання лінійного матричного рівняння Сільвестра, що є узагальненням широко відомого в теорії стійкості матричного рівняння Ляпунова. В основу методу покладено спектральне розкладання матричного лінійного оператора за його власними векторами, що представляють собою матриці, утворені добутками власних векторів матриць лінійного і спряженого до нього операторів. У результаті отримано конструктивний розв'язок матричного рівняння Сільвестра. Розглянуто випадки як дійсних так і комплексно спряжених власних чисел матриць рівнянь Сільвестра. Розроблено алгоритм і програмне забезпечення для розв'язання матричного рівняння Сільвестра великої розмірності. Для реалізації методу використовуються стандартні процедури розв'язання повної задачі на власні значення для дійсних матриць. Чисельні експерименти підтвердили високу ефективність запропонованого методу як з точки зору витрат часу так і точності отриманих результатів при розв'язанні матричних рівнянь Сільвестра і Ляпунова великої розмірності.

Ключові слова: матричні рівняння, спектральне розкладання матриць, власні числа, власні вектори, лінійний оператор, квазібіортогональність базисів, спряжений оператор.

А. С. КУЦЕНКО, Н. А. ОДАРЧЕНКО

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ СИЛЬВЕСТРА СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Матричные линейные уравнения Сильвестра и Ляпунова широко используются в теории управления и теории устойчивости движения, а также при решении уравнения Риккати в задаче аналитического конструирования оптимальных регуляторов. Особую актуальность проблема решения уравнения Сильвестра приобрела в связи с решением задач синтеза наблюдателей Люенбергера пониженной размерности и задач модального синтеза систем управления линейными автоматическими системами. В работе проведен анализ существующих методов решения матричного уравнения Сильвестра. Обоснована ограниченность основных методов численного решения матричных уравнений, а также отсутствие аналитических методов решения. В работе предложен достаточно простой метод решения линейного матричного уравнения Сильвестра, являющегося обобщением широко известного в теории устойчивости матричного уравнения Ляпунова. В основу метода положено спектральное разложение матричного линейного оператора по его собственным векторам, представляющих собой матрицы, образованные произведениями собственных векторов матриц линейного и сопряженного к нему операторов. В результате получено конструктивное решение матричного уравнения Сильвестра. Рассмотрены случаи как вещественных так и комплексно сопряженных корней характеристических уравнений матриц уравнений Сильвестра. Разработан алгоритм и программное обеспечение для решения матричного уравнения Сильвестра большой размерности. Для реализации метода используются стандартные процедуры решения полной задачи на собственные значения для вещественных матриц. Численные эксперименты подтвердили высокую эффективность предложенного метода как с точки зрения временных затрат так и точности полученных результатов при решении матричных уравнений Сильвестра и Ляпунова большой размерности.

Ключевые слова: матричные уравнения, спектральное разложение матриц, собственные числа, собственные векторы, линейный оператор, квазибиортогональность базисов, сопряженный оператор.

O. S. KUTSENKO, M. A. ODARCHENKO

SOLVING THE SYLVESTER MATRIX EQUATION BY THE SPECTRAL METHOD

The matrix linear equations of Sylvester and Lyapunov are widely used in the control theory and theory of movements sustainability, as well as in solving the Riccati equation in the problem of the analytical construction of optimal controllers. The problem of solving the Sylvester equation has gained particular relevance in connection with the solution of problems of synthesis of low-dimensional Luenberger observers and problems of modal synthesis of control systems for linear automatic systems. The following paper analyzes the existing methods for solving the Sylvester matrix equation. It was justified the limitedness of the basic methods for the numerical solution of matrix equations, as well as the lack of analytical methods for solving. In this paper we propose quite simple method for solving the linear matrix Sylvester equation, which is a generalization of the widely known in the theory of stability of the Lyapunov matrix equation. The method is based on the spectral decomposition of the matrix linear operator in its eigenvectors, which are the matrices formed by the multiplication of the matrices` eigenvectors of the linear and conjugate operators. As a result, an analytical solution of the Sylvester matrix equation is obtained. We consider the cases of both real and complex conjugate roots of the characteristic equations of the matrices of

Sylvester equations. In order to solve the Sylvester matrix equation of a large dimension the algorithm and software have been developed. For the method implementation the standard procedures of solving the complete eigenvalue problem for real matrices are used. After conducting a great number of experiments it was confirmed the high efficiency of the proposed method both in terms of time costs and the accuracy of the results obtained when solving the matrix equations of Sylvester and Lyapunov of large dimension.

Keywords: matrix equations, spectral decomposition of matrices, eigenvalues, eigenvectors, linear operator, quasibiorthogonality of bases, adjoint operator.

Вступ. У задачах аналізу та синтезу систем автоматичного управління методами простору станів широке застосування знайшли матричні лінійні рівняння. Так рівняння Ляпунова дозволяє обчислити величину інтегрального квадратичного критерію якості перехідних процесів систем автоматичного управління [1]. Рівняння Ляпунова є окремим випадком більш широкого класу матричних рівнянь Сільвестра (МРС) [2]. Широко відоме застосування рівняння Сільвестра при синтезі спостерігаючих приладів зниженої розмірності [3]. Значну цікавість викликає застосування МРС у задачі модального синтезу лінійних динамічних систем, що мають заданий набір коренів характеристичного поліному замкненої системи автоматичного управління [4].

Методам рішення матричних лінійних рівнянь Сільвестра присвячено багато публікацій [5–9]. Фундаментальні основи обґрунтування існування рішення можна знайти в [10].

Найпростішим шляхом розв’язання МРС є перетворення його до системи лінійних рівнянь на основі кронекерівських множень матриць [11]. При цьому розмірність системи дорівнює множенню розмірностей матриць, що входять у МРС. Ряд методів чисельного розв’язання МРС оснований на інтегруванні матричної функції, побудованої на основі матричних експонент [1].

Майже «аналітичний» розв’язок МРС наведено в [12]. Запропонований алгоритм достатньо складний, але наділений тією перевагою, що розрахунки проводяться у просторі матриць вихідної розмірності.

Окрім перерахованих вище підходів до розв’язання МРС існує ряд асимптотичних методів розв’язку, збіжність яких залежить від множини різних факторів, що ускладнює їх реальне застосування на практиці.

Із наведеного огляду досліджень у даному напрямку можна зробити висновок про відсутність аналітичних методів розв’язання МРС, що гарантують високу точність результатів.

Метою даної статті є розробка достатньо простого аналітичного методу розв’язання МРС, заснованого на спектральному розкладу матриць, що задають лінійний матричний оператор.

Спектральний метод розв’язку лінійних операторних рівнянь. Розглянемо загальний підхід до розв’язку лінійних операторних рівнянь виду

$$A(x) = y, \tag{1}$$

де $x \in R^n, y \in R^n$ – вектори n–вимірного лінійного простору, $A(x)$ – лінійний оператор, що діє в R^n.

Якщо y заданий вектор, то основна задача полягає у знаходженні вектору (або множини векторів) x, що задовольняють операторному рівнянню (1). У найпростішому випадку, коли $A(x) = Ax$ – матричний оператор, задача зводиться до класичної задачі розв’язку лінійної системи рівнянь. У більш важкому випадку, коли оператор $A(x)$ представляє собою лінійний матричний оператор (2)

$$\hat{A}(x) = AX + XB, \tag{2}$$

що діє у просторі прямокутних матриць, задача розв’язання матричного рівняння виду

$$\hat{A}(x) = Q \tag{3}$$

значно ускладнюється. Для дослідження загальної структури розв’язку (1) приймемо твердження, що оператор $A(x)$ має просту структуру, тобто має n лінійно незалежних векторів $z_1, \dots, z_n$, що утворюють базис в R^n:

$$A(z_k) = \lambda_k z_k, \tag{4}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – власні числа оператора A.

Нехай $A^*(x)$ спряжний до $A(x)$оператор. Тоді його спектр співпадає зі спектром оператора A, а власні вектори $z_1^*, \dots, z_n^*$ також утворюють базис в R^n. Базиси $Z = [z_1, \dots, z_n]$ та $Z^* = [z_1^*, \dots, z_n^*]$ квазібіортогональні, тобто задовольняють після відповідного нормування умові

$$(z_i, z_k^*) = \delta_{ik}, \tag{5}$$

де δ_{ik} – символ Кронекера.

Будемо далі вважати, що в базисні системи Z та Z^* нам відомі, і будемо шукати вектор x в (1) у вигляді лінійної комбінації

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i z_i \tag{6}$$

Підставляючи (6) в операторне рівняння (1), отримаємо

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A(z_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \lambda_i z_i = y. \tag{7}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів ξ_i розкладу вектора x по базису Z помножимо скалярно співвідношення (7) послідовно на спряжні вектори $z_k^*, (k = \overline{1,n})$. У результаті, враховуючи (5), отримаємо

$$\xi_k \lambda_k = (z_k^*, y), k = \overline{1,n} \tag{8}$$

з чого, як наслідок, отримаємо кінцевий вираз для шуканого вектору x у відповідності з (6):

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} (z_k^*, y) z_k. \tag{9}$$

Отримане співвідношення для розв’язку лінійної системи рівнянь є достатньо загальним, але для його реалізації необхідне розв’язання повної проблеми власних значень для оператора A, а також находження власних векторів спряжного оператора A^* на основі властивості біортогональності (5).

Проаналізуємо детальніше вираз (9). Він складається з окремих доданків, кожному з яких відповідає власне число λ. Якщо λ – дійсне число, то дійсна пара власних векторів z та z^*, а, як наслідок, дійсний і відповідний доданок.

Інакша справа у тому випадку, коли власне число λ комплексне тобто $\lambda = a + i\beta$. У цьому випадку відповідні власні вектори z та z^* також будуть комплексними $z = a + ib, z^* = c + id$. З іншого боку у спектрі оператора A, що діє у дійсному просторі, присутнє спряжне до λ власне значення $\bar{\lambda} = a - i\beta$, якому відповідають спряжні z та z^* власні вектори $\bar{z} = a - ib, \bar{z}^* = c - id$. Після підстановки λ, $\bar{\lambda}$, z, $\bar{z}$, z^*, $\bar{z}^*$ у вираз (9) отримаємо

$$x + \bar{x} = \frac{1}{a^2 + \beta^2}[(\alpha c + \beta d, y)a + (\beta c - ad)b] \quad (10)$$

тобто кожній комплексно спряжній парі власних значень відповідає один дійсний доданок виду (10). Таким чином, у випадку, якщо спектр оператора A має структуру виду $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\ a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \dots, a_l \pm ib_l$, то йому відповідає наступний розв'язок рівняння (1):

$$x = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda_k}(z_k^*, y)z_k + \\ + \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{a_k^2 + \beta_k^2}[(f_k, y)a_k + (h, y)b_k], \quad (11)$$

де $f_k = \alpha_k c_k + \beta_k d_k$, $h_k = \beta_k c_k - \alpha_k d_k$, а $\alpha_k, \beta_k, c_k, d_k$- дійсні та уявні компоненти власних векторів.

Розв'язання рівняння Сільвестра спектральним методом. Скористаємося методом спряжних операторів для отримання загального виду розв'язку матричного рівняння Сільвестра $AX + XB = Q$. У цьому випадку лінійний оператор $P_{AB}(x)$, що діє у просторі прямокутних матриць $m \times n$, має вид

$$P_{AB}(X) = AX + XB. \quad (12)$$

де A і B – квадратні матриці розміру $m \times m$ та $n \times n$ відповідно, а шукана матриця X має розмір $m \times n$, як і матриця Q.

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – власні числа матриці A, а $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ – власні числа матриці B, серед яких можуть бути комплексно спряжні власні числа.

Припустимо, що кожному власному числу λ_i матриці A відповідає правий власний вектор u_i, а кожному власному числу μ_j матриці B – лівий власний вектор v_j^T. Тобто

$$\begin{aligned} Au_i &= \lambda_i u_i, \\ v_j^T B &= \mu_j v_j^T. \end{aligned} \quad (13)$$

Тоді виконується наступне співвідношення

$$Au_i v_j^T + u_i v_j^T B = \lambda_i u_i v_j^T + u_i v_j^T \mu_j \quad (14)$$

із якого слідує, що оператор P_{AB} має власний вектор $R_{ij} = u_i v_j^T$, який відповідає власному числу $v_{ij} = \lambda_i + +\mu_j$. Неважко показати, що матричний лінійний оператор, спряжений до P_{AB}, має вигляд

$$\hat{P}_{AB}(X) = A^T X + XB^T. \quad (15)$$

По аналогії з (12) та (13) власні вектори оператора $\hat{P}_{AB}$, які відповідають власним числам v_{ks}, мають вигляд $S_{ks} = \overline{u_k}\bar{v}_s^T$, де $\overline{u_k}$ і $\bar{v}_s^T$ праві та ліві власні вектори матриць A^T і B^T відповідно.

Неважко показати, що $R_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ та $S_{ks}, k = \overline{1, m}, s = \overline{1, n}$ квазібіортогональні та відповідають умовам

$$(R_{ij}, S_{ks}) = \delta_{ij.ks} = \begin{cases} 1, & i = k \vee j = s, \\ 0, & i \neq k \wedge j \neq s. \end{cases} \quad (16)$$

Останнє є наслідком квазібіортогональності векторних систем $u_i(i = \overline{1,m})$ та $v_j(j = \overline{1,n})$, а також спряжних векторних систем $\overline{u_k}(k = \overline{1,m})$ та $\bar{v}_s$ $(s = \overline{1,n})$.

Згідно з формулою (9) шукана матриця X розв'язку МРС має вигляд

$$X = \sum_{i,j} \frac{1}{\lambda_i + \mu_j}(Q, S_{ij})R_{ij}. \quad (17)$$

Якщо власні числа λ_i та μ_j дійсні, то і власні вектори S_{ij} та R_{ij}, які їм відповідають, також дійсні. Таким чином, складові X_{ij} розв'язку (17) для дійсних λ_i та μ_j мають вигляд

$$X_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \mu_j} R_{ij} \operatorname{tr}(Q^T S_{ij}). \quad (18)$$

Якщо хоча би одне із λ_i чи μ_j є комплексним, то і відповідні власні вектори будуть комплексними:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= A_{ij} + iB_{ij}, \\ S_{ij} &= C_{ij} + iD_{ij}, \end{aligned} \quad (19)$$

де A_{ij} і C_{ij} – дійсні, а B_{ij} і D_{ij} – уявні частини.

Оскільки в спектрі оператора P_{AB} присутні комплексно спряжні власні числа $\alpha \pm i\beta$, то і відповідні власні вектори спряжного оператора $\hat{P}_{AB}$ також комплексно спряжні

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ij} &= A_{ij} - iB_{ij}, \\ \bar{S}_{ij} &= C_{ij} - iD_{ij}. \end{aligned} \quad (20)$$

Після підстановки (19) та (20) в (18) отримаємо суму двох компонент розв'язку МРС, яке відповідає комплексно спряжним власним числам

$$X_{ij} + \bar{X}_{ij} = \frac{2}{\alpha_{ij}^2 + \beta_{ij}^2}(\alpha_{ij} M_{ij} + \beta_{ij} N_{ij}), \quad (21)$$

де $M_{ij} = A_{ij}F_{ij} - B_{ij}G_{ij}$, $N_{ij} = B_{ij}F_{ij} + A_{ij}G_{ij}$, $F_{ij} = \operatorname{tr}(Q^T C_{ij})$, $G_{ij} = \operatorname{tr}(Q^T D_{ij})$.

Остаточно аналітичний розв'язок МРС має вигляд

$$X = \sum_{i,j} \frac{1}{\lambda_i + \mu_j} R_{ij} \operatorname{tr}(Q^T S_{ij}) + \\ + \sum_{i,j} \frac{2}{\alpha_{ij}^2 + \beta_{ij}^2}(\alpha_{ij} M_{ij} + \beta_{ij} N_{ij}), \quad (22)$$

де перший доданок відповідає дійсним λ_i та μ_j, а другий – комплексно спряжним $\alpha_{ij} \pm i\beta_{ij}$ власним числам.

Алгоритм та програмне забезпечення. Алгоритм розв'язання МРС, який засновано на спектральному методі, має такі основні кроки:

1. Введення вихідних даних, які включають матриці A, B, Q та їх розміри. Якщо B не введена, то замість рівняння Сільвестра вирішується рівняння Ляпунова.

2. Вирішення повної проблеми власних значень для матриць A і B.

3. Знаходження власних векторів матриць A^T і B^T на основі властивості квазібіортогональності власних векторів матриць A і A^T, B і B^T.

4. Побудова власних векторів (матриць) S_{ij} та R_{ks}, операторів P_{AB} та $\hat{P}_{AB}$ відповідно.

5. Отримання остаточного рішення МРС відповідно з формулою (22).

Список літератури

1. Андреев Ю. Н. *Управление конечномерными линейными объектами*. Москва: Наука, 1976. 424 с.
2. Демиденко Г. В. *Матричные уравнения*. Новосибирск: Изд. Новосибирского университета, 2009. 203 с.
3. Кузовков Н.Т. *Модальное управление и наблюдающие устройства*. Москва: Машиностроение, 1976. 184 с.
4. Белонин Н.А. *Новый курс теории управления движением*. СПб: Изд. С.-Петербург. Университета, 2000. 160 с.
5. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. Москва: Наука, 1984. 192 с.
6. Чуйко С. М. О решении линейных матричных уравнений. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Сер. «Математика, прикладна математика і механіка»*. 2015. Т. 82. С. 27–33.
7. Ветошкин А. М., Шум А. А. Решение матричных уравнений Сильвестра в случае коммутирующих коэффициентов. *Лесной вестник*. 2018. Т. 22, № 2. С. 140–143.
8. Симонян С. О., Айвазян А. А. К решению однопараметрических матричных уравнений типа AX+XB=C. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2016. № 4. С. 44–53.
9. Зыбин Е. Ю. [и др.] Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2017. №1. С 5–22.
10. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. Москва: Физматлит, 1954. 575 с.
11. Беллман Р. *Введение в теорию матриц*. Москва: Наука, 1969. 376 с.
12. Шестопал В. Е. Решение матричного уравнения AX+XB=C. – *Мат. Заметки*. 1976. Т. 19, №3. С. 449–451.

References (transliterated)

1. Andreev Yu. N. *Upravlenie konechnomernymi lineynimi ob'ektami* [Management of finite-dimensional linear objects]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 424 p.
2. Demidenko G. V. *Matrichnye uravneniya* [Matrix equations]. Novosibirsk, Novosibirsk University Publ., 2009. 203 p.
3. Kuzovkov N. T. *Modal'noe upravlenie I nablyudayuschie ustroystva* [Modal control and monitoring devices]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 184 p.
4. Belonin N. A. *Novyy kurs teorii upravleniya dvizheniem* [New course in motion control theory]. St. Petersburg, St. Petersburg University Publ., 2000. 160 p.
5. Ikramov Kh. D. *Chislennoe reshenie matrichnykh uravnenij* [Numerical solution of matrix equations]. Moscow, Nauka Publ., 1954. 575 p.
6. Chujko S. M. O reshenii linejnykh matrichnykh uravnenij [On the solution of linear matrix equations]. *Visnik Kharkivskogo naczionalnogo universitetu imeni V.N. Karazina. Ser. «Matematika, prikladna matematika i mekhanika»* [Bulletin of the Kharkiv National Karazin University. Avg. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"]. 2015, vol. 82, pp. 27–33.
7. Vetoshkin A. M., Shum A. A. Reshenie matrichnykh uravnenij Silvestra v sluchae kommutiruyushhikh koefficzientov [Solution of Sylvester matrix equations in the case of commuting coefficients]. *Lesnoj vestnik* [Forest Herald]. 2018, vol. 22, no. 2, pp. 140–143.
8. Simonyan S. O., Ajvazyan A. A. K resheniyu odnoparametricheskikh matrichny`kh uravnenij tipa AX+XB=C [To the solution of one-parameter matrix equations of the type AX+XB=C]. «Radioelektronika, informatika, upravlinnya» [Radio Electronics, Informatics, Management]. 2016, no. 4, pp. 44–53.
9. Zybin E. Yu. [at al.] Obshhie analiticheskie formy resheniya uravnenij Silvestra i Lyapunova dlya nepreryvnykh i diskretnykh dinamicheskikh sistem [General analytical forms for solving the Sylvester and Lyapunov equations for continuous and discrete dynamical systems]. Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya [Proceedings of the RAS. Theory and control systems]. 2017, no. 1, pp. 5–22.
10. Gantmakher F. R. Teoriya matricz [Matrix theory]. Moscow: Fizmatlit, 1954. 575 p.
11. Bellman R. *Vvedenie v teoriyu matric* [Introduction to matrix theory]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 376 p.
12. Shestopal V. E. Reshenie matrichnogo uravneniya AX+XB=C [Solution of the matrix equation AX+XB=C]. – *Mat. Zametki* [Math notes]. 1976, vol. 19, no. 3, pp. 449–451.

Надійшла (received) 05.09.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Куценко Олександр Сергійович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідуючий кафедри Системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій; м. Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6059-3694; e-mail: kuzenko@kpi.kharkov.ua

Одарченко Микита Андрійович – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри Системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій; м. Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3854-3524; e-mail: odarchenko.na21@gmail.com

Куценко Александр Сергеевич – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», заведующий кафедры Системного анализа и информационно-аналитических технологий; г. Харьков, Украина; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6059-3694; e-mail: kuzenko@kpi.kharkov.ua

Одарченко Никита Андреевич – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», аспирант кафедры Системного анализа и информационно-аналитических технологий; г. Харьков, Украина; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3854-3524; e-mail: odarchenko.na21@gmail.com

Kutsenko Oleksandr Sergiyovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Head of the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies; Kharkiv city, Ukraine; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6059-3694; e-mail: kuzenko@kpi.kharkov.ua

Odarchenko Mykyta Andriyovich – National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», graduate student of the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies; Kharkiv city, Ukraine; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3854-3524; e-mail: odarchenko.na21@gmail.com