ISSN 2079-0023 (print), ISSN 2410-2857 (online)

УДК 519.854.2 **DOI: 10.20998/2079-0023.2021.01.04**

О. А. ПАВЛОВ, О. В. ВОЗНЮК, О. Г. ЖДАНОВА

ЗАДАЧА ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Розглядається задача дробово-лінійного програмування в умовах невизначеності. Під невизначеністю у роботі розуміється неоднозначність значень коефіцієнтів функціонала оптимізації. Наведено дві математичні постановки задачі: в першій задачі невизначеність відноситься до чисельника – є кілька наборів коефіцієнтів цільової функції, кожен з яких може визначати чисельник критерію задачі на етапі реалізації її розв'язку, у другій – невизначеність відноситься до знаменника функціоналу. У роботі пропонується кілька компромісних критеріїв оцінки розв'язків даної задачі. Детально розглянуто два з них: 1) знаходження компромісного розв'язку, у якого значення часткових функціоналів відхиляються від їх оптимальних значень в заданих межах; 2) знаходження компромісного розв'язку за критерієм мінімізації сумарного зваженого перевищення значень часткових функціоналів відповідно заданих допустимих відхилень від їх оптимальних значень (величин поступок). Для знаходження компромісного розв'язку задач дробово-лінійного програмування за цими двома критеріями сформульована допоміжна задача лінійного програмування, обмеження якої залежать від напрямку оптимізації вихідної задачі. Для дослідження властивостей задачі були проведені серії експериментів чотирьох типів, метою яких було: 1) дослідження впливу зміни величин встановлених допустимих відхилень часткових цільових функцій на величини фактичних відхилень і на величини поступок; 2) дослідження впливу зміни експертних ваг часткових цільових функцій на величини фактичних відхилень і на величини поступок, що відповідають отриманим компромісним розв'язкам. В роботі запропоновані схеми експериментів і представлені їх результати в графічному вигляді. При цьому було встановлено, що отримані залежності залежать від напрямку оптимізації вихідної задачі.

Ключові слова: оптимізація, невизначеність, згортка, дробово-лінійне програмування, задача лінійного програмування, компромісний розв'язок.

А. А. ПАВЛОВ, А. В. ВОЗНЮК, Е. Г. ЖДАНОВА

ЗАДАЧА ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассматривается задача дробно-линейного программирования в условиях неопределенности. Под неопределенностью в работе понимается неоднозначность значений коэффициентов функционала оптимизации. Приведены две математические постановки задачи: в первой задаче неопределенность относится к числителю – имеются несколько наборов коэффициентов целевой функции, каждый из которых может определять числитель критерия задачи на этапе реализации ее решения, во второй – неопределенность относится к знаменателю функционала. В работе предлагается несколько компромиссных критериев оценки решений рассматриваемой задачи. Детально рассмотрены два из них: 1) нахождение компромиссного решения, у которого значения частных функционалов отклоняются от их оптимальных значений в заданных пределах; 2) нахождение компромиссного решения по критерию минимизации суммарного взвешенного превышения значений частных функционалов относительно заданных допустимых отклонений от их оптимальных значений (величины уступок). Для нахождения компромиссного решения задач дробно-линейного программирования по этим двум критериям сформулирована вспомогательная задача линейного программирования, ограничения которой зависят о направления оптимизации исходной задачи. Для исследования свойств задачи были проведены серии экспериментов четырех типов, целью которых было: 1) исследование влияния изменения величин установленных допустимых отклонений частных целевых функций на величины фактических отклонений и на величины уступок; 2) исследование влияния изменения экспертных весов частных целевых функций на величины фактических отклонений и на величины уступок получаемых компромиссных решений. В работе предложены схемы экспериментов и представлены их результаты в графическом виде. При этом было установлено, что полученные зависимости зависят от направления оптимизации исходной задачи.

Ключевые слова: оптимизация, неопределенность, свертка, дробно-линейное программирование, задача линейного программирования, компромиссное решение.

A. A. PAVLOV, O. V. VOZNIUK, O. G. ZHDANOVA

THE LINEAR-FRACTIONAL PROGRAMMING PROBLEM UNDER UNCERTAINTY CONDITIONS

This paper addresses the problem of linear-fractional programming under uncertainty. The uncertainty here is understood as the ambiguity of the coefficients' values in the optimized functional. We give two mathematical formulations of the problem. In the first one, the uncertainty refers to the numerator: there are several sets of objective function coefficients, each coefficient can determine the numerator of the problem's criterion at the stage of its solution implementation. The uncertainty in the second formulation refers to the denominator of the functional. We propose several compromise criteria for evaluating solutions to the problem we consider. We study the following two criterions in detail: 1) finding a compromise solution in which the deviation of the values of the partial functionals from their optimal values is within the specified limits; 2) finding a compromise solution according to the criterion of minimizing the total weighted excess of the values of partial functionals in relation to the specified feasible deviations from their optimal values (the values of concessions). We formulate an auxiliary linear programming problem to find a compromise solution to the linear-fractional programming problems by these two criteria. The constraints of the auxiliary problem depend on the optimization direction in the original problem. We carried out a series of experiments of four types to study the properties of the problem. The purposes of the experiments were: 1) to study how changes in the values of the specified feasible deviations of partial objective functions impact the values of actual deviations and the values of concessions; 2) to study how changes in the expert weights of partial objective functions impact the values of actual deviations and the values of concessions for the compromise solutions we obtain. We propose in this work the schemes of experiments and present their results in graphical form. We have found that the obtained relations depend on the optimization direction in the original problem.

Keywords: optimization, uncertainty, convolution, linear-fractional programming, linear programming problem, compromise solution.

Вступ. Проблема прийняття рішень в умовах невизначеності займає важливе місце в загальній проблемі прийняття рішень. Успішне її вирішення в даний час неможливо без застосування нових інформаційних технологій, складовою частиною яких математичні методи прийняття рішень (ПР) [1].

Ускладнює вирішення задач ПР різні трактування поняття «невизначеність». Автор [2] розрізняє ситуаційну і інформаційну невизначеність (в останньому випадку передбачається, що прийняття рішень проводиться в умовах неповної інформації). Якщо невизначеність інформації становить від 20% і більше, застосовують так званий «сірий» аналіз. Методи сірого аналізу допускають завдання декількох критеріїв оптимальності і рішення декількох задач управління, з урахуванням можливої зміни ситуації і можливого переходу від однієї задачі управління до іншої, при цьому розв'язок задачі є множинним, а не поодиноким.

Серед відомих методів та підходів до прийняття рішень найбільший інтерес являють ті, що дають можливість враховувати багатокритеріальність [3] та невизначеність, а також дозволяють обирати розв'язки з множини альтернатив різного типу при наявності критеріїв, що мають різні типи шкал вимірювання.

Згідно [4], за типами експертної інформації виділяють наступні методи вирішення задач в умовах невизначеності:

1) методи з дискретизацією невизначеності, що використовуються коли в постановці задачі відсутня інформація про уподобання і є кількісна і/або інтервальна інформація про наслідки [5];

2) стохастичне домінування [6], методи прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності на основі глобальних критеріїв, метод аналізу ієрархій [7], методи теорії нечітких множин [8], що використовуються коли в постановці задачі надана якісна інформація про переваги та кількісна про наслідки;

3) метод практичного прийняття рішень та методи вибору статистично ненадійних рішень, які використовуються коли надана якісна (порядкова) інформація про уподобання і наслідки;

4) методи кривих байдужості для прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності, методи дерев рішень та декомпозиційні методи теорії очікуваної корисності, які використовуються коли надана кількісна інформація про уподобання та наслідки.

На вибір метода вирішення задач в умовах невизначеності суттєво впливає обраний критерій оптимальності. У роботах [9, 10] були викладені основи конструктивної теорії знаходження компромісного розв'язку для класу задач комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності виду:

$$\underset{\sigma\epsilon\Omega}{\text{extremum}} \sum_{i=1}^{s} \omega_i k_i(\sigma), \tag{1}$$

де ω_i – числа;

$k_i(\sigma)$ – i-та довільна числова характеристика допустимого розв'язку σ $(i = 1,\dots,s)$;

$\boldsymbol{\Omega}$ – множина допустимих розв'язків.

Під невизначеністю тут розуміється невизначеність значень коефіцієнтів ω_i $(i = 1,\dots,s)$. В [11] підтверджена ефективнсть цих теоретичних положень на прикладі однопродуктової і багатопродуктової задачі. В цій роботі отримані в [9–11] результати розповсюджуються на задачу дробово- лінійного програмування, де величини ω_i і $k_i(\sigma)$ $(i = 1,\dots,s)$ зв'язані нелінійно і формально не належать до класу задач комбінаторної оптимізації (1).

Постановка задачі. Задача дробово-лінійного програмування (ЗДЛП) у детермінованій постановці має вигляд:

$$\underset{x}{\text{extremum}} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0, \tag{3}$$

де $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$ – дійсні числа;

$\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_m)^{\mathrm{T}}$ – дійсні числа;

$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ – дійсні числа;

$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ – змінні задачі.

Для того, щоб при поясненнях уникнути необхідності розгляду множини різних можливих варіантів, припустимо, що на x_i накладаються такі обмеження, при яких знаменник в (2) строго додатній для всіх допустимих значень x_i, а також, що максимум $c(x)$ є скінченним [12]:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_i \neq 0, \sum_{i=1}^{n} d_i x_i > 0.$$

Перша постановка задачі дробово-лінійного програмування в умовах невизначеності (ЗДЛПУН). Існує R наборів коефіцієнтів $\boldsymbol{c^r} = (c_1^r, \dots, c_n^r)^{\mathrm{T}}, r = 1, \dots, R$ можливих значень коефіцієнтів c_i, $i = 1, \dots, n$. Тоді задача (2)–(3) перетворюється на ЗДЛПУН. За наявності невизначеності ставиться задача знаходження так званого компромісного розв'язку цієї задачі.

Друга постановка задачі дробово-лінійного програмування в умовах невизначеності. Існує R наборів коефіцієнтів $\boldsymbol{d^r} = (d_1^r, \dots, d_n^r)^{\mathrm{T}}$, $r = 1, \dots, R$ можливих значень коефіцієнтів d_i, $i = 1, \dots, n$. При цьому для допустимих розв'язків, що задовольняють обмеженням (3), мають місце наступні умови:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0, \ \forall\, r \sum_{i=1}^{n} d_i^r x_i > 0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i < +\infty, \ \forall\, r \sum_{i=1}^{n} d_i^r x_i < +\infty\,.$$

За наявності невизначеності ставиться задача знаходження так званого компромісного розв'язку задачі (2)–(3).

В даній роботі буде показано, що усі результати, отримані в [9, 10] для класу задач комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності виду (1) (для якої існує R наборів ваг $\{\omega_i^r, i = 1, \dots, s\}, r = 1, \dots, R$ кожний з яких може бути набором коефіцієнтів $\omega_1, \dots, \omega_s$ задачі (1) на етапі реалізації її розв'язку) можуть застосовуватися і для задачі дробово-лінійного програмування (2)–(3) в умовах невизначеності (перша і друга постановки). Хоча остання задача формально не належить до класу задач комбінаторної оптимізації (1), в силу специфіки одного із приведених в [9, 10] компромісних критеріїв має місце більш ефективний метод розв'язання.

Критерії оцінки розв'язків для першої постановки ЗДЛПУН. Оскільки в умовах невизначеності досить складно визначити чіткі критерії ефективності розв'язання, у цій роботі пропонується декілька компромісних критеріїв оцінки розв'язку задачі, що розглядається.

Критерій 1. Знайти компромісний розв'язок $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, що задовольняє обмеженням задачі (2)–(3) і для якого виконується

$$\underset{x}{\text{extremum}} \sum_{r=1}^{R} \omega_r \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^r x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i} - f_{\text{opt}}^r \right), \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0,$$

де $\omega_r > 0,\ r = 1, \ldots, R$ – експертні вагові коефіцієнти;

$f_{\text{opt}}^r = \underset{x}{\text{extremum}} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^r x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i}$.

Критерій 2. Введемо випадкову величину $F = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i x}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i} - \bar{f}_{\text{opt}}$, де $(n+1)$-вимірна дискретна випадкова величина $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n, \bar{f}_{\text{opt}}$, задається таблицею

$$\{c_1^r, \ldots, c_n^r, f_{\text{opt}}^r\},$$

$$p_r > 0,\ r = 1, \ldots, R,\ \textstyle\sum_r p_r = 1.$$

Знайти компромісний розв'язок $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, що задовольняє обмеженням задачі (2)–(3) і для якого виконується

$$\min M\, F = \min_{x} \sum_{r=1}^{R} p_r \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^r x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i} - f_{\text{opt}}^r \right).$$

Критерій 3. Знайти компромісний розв'язок $\boldsymbol{x} == (x_1, \ldots, x_n)^T$, що задовольняє обмеженням задачі (2)–(3) і для якого виконується

$$\Delta_i \leq l_i,\ l_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, R, \qquad (5)$$

де для задачі на мінімум:

$$\Delta_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^r x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i} - f_{\text{opt}}^r, r = 1, \ldots, R,$$

а для задачі на максимум відповідно:

$$\Delta_r = f_{\text{opt}}^r - \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^r x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i}, r = 1, \ldots, R.$$

Зміст величин $l_r, r = 1, \ldots, R$: допустимі відхилення значень часткових функціоналів компромісного розв'язку від їх оптимальних значень.

Критерій 4. Якщо компромісного розв'язку, що задовольняє критерію 3 не існує, то знайти $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, що задовольняє обмеженням задачі (2)–(3) і на якому досягається

$$\min_{x} \sum_{r=1}^{R} \omega_r \max\{\, 0; \Delta_r - l_r\},$$

де $\omega_r > 0,\ r = 1, \ldots, R$ – експертні вагові коефіцієнти;

Критерій 5. Для одного з наборів вагів $c^r, r \in \{1, \ldots, R\}$ знайти оптимальний розв'язок задачі

$$\underset{x}{\text{extremum}} \sum_{r=1}^{R} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^r x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i},$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0,$$

якому відповідало б

$$\min_{x} \sum_{j=1}^{R} \omega_j\, \Delta_j, j \neq r,$$

де $\omega_r > 0,\ r = 1, \ldots, R$ – експертні вагові коефіцієнти;

Критерії оцінки розв'язків для другої постановки ЗДЛПУН. Так як у другій постановці невизначеність відноситься до значень компонент вектору $\boldsymbol{d}$, критерії для цієї задачі відрізняються від критеріїв 1–5 тим, що вираз $\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^r x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i}$ замінюється на $\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i^r x_i}$, а максимізація/мінімізація функціоналу $\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^r x_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i}$ замінюється на мінімізацію/максимізацію.

Побудова компромісного розв'язку. Перша постановка ЗДЛПУН. Як відомо [12], задача (2)–(3) зводиться до задачі лінійного програмування (ЗЛП) наступним чином. Введемо нові змінні:

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i}, y_i = k\boldsymbol{x}, i = 1, \ldots, n.$$

Тоді задача (2)–(3) прийме вигляд:

$$\underset{y,k}{\text{extremum}} \sum_{i=1}^{n} c_i y_i, \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{Ay} = k\boldsymbol{b}, \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i y_i = 1, \boldsymbol{y} \geq 0, \qquad (8)$$

де $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$.

По розв'язку ЗЛП (6)–(8) знаходиться оптимальний розв'язок задачі (2)–(3): $x_i = \frac{y_i}{k}$, $i = 1, \ldots, n.$ При цьому оптимальне значення функціоналів (2) і (8) приймають однакове значення.

ЗЛП (6)–(8) належить класу (1) і, таким чином, усі результати [9, 10] можуть бути застосовані до цієї ЗЛП і, як результат, до задачі (2)–(3) у випадку, коли коефіцієнти $d_i,\ i = 1, \ldots, n$ задані, а невизначеність відноситься тільки до $c_i, i = 1, \ldots, n.$ Таким чином, ми довели наступні твердження.

Твердження 1. Для довільних $q_r > 0, r = 1, \ldots, R$, справедливо

$$\arg\underset{x}{\text{extremum}} \sum_{r=1}^{R} q_r \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^r x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i} - f_{\text{opt}}^r \right) = \arg\underset{x}{\text{extremum}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sum_{r=1}^{R} q_r c_i^r}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i} \right) x_i,$$

$$\boldsymbol{A x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0.$$

Твердження 2. Нехай $x(\omega_1, \ldots, \omega_R, \Delta_1, \ldots, \Delta_R)$ – розв'язок задачі

$$\min_x \frac{\sum_{i=1}^{n} (\sum_{r=1}^{R} \omega_r c_i^r) x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i},$$

$$\boldsymbol{A x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0,$$

де $\Delta_r > 0, r = 1, \ldots, R$ визначаються виразом (4), тоді якщо $\omega_j' > \omega_j$, то для має місце $x(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_j', \omega_{j+1}, \ldots, \omega_R, \Delta_1', \ldots, \Delta_R')$

$$(\omega_j' - \omega_j)(\Delta_j' - \Delta_j) \leq 0.$$

Твердження 2 очевидним способом виникає із наслідка 4 твердження 5 в [9].

Наслідок 1. Якщо $\left| f_{\text{opt}}^r \right| < \infty, r = 1, \ldots, R$, то в силу того, що множина вершин многогранника ЗЛП (6)–(8) кінцева, завжди існує таке $\omega_j^* > 0$ величина якого залежить від значень $\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_R$, що для всіх значень $\widehat{\omega}_j > \omega_j^*$ у розв'язку

$$x_i(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \widehat{\omega}_j, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_R), i = 1, \ldots, R \quad (9)$$

Величина Δ_j дорівнює нулю, тобто розв'язок (9) є оптимальним для задачі (2)–(3) з коефіцієнтами $a_i = a_i^r, i = 1, \ldots, n$, причому цьому розв'язку відповідає мінімум виразу

$$\min_x \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{R} \omega_r \left(\frac{E}{F} - f_{\text{opt}}^r \right),$$

де

$$E = \sum_{i=1}^{n} c_i^r x_i(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \bar{\omega}_j, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_R, \Delta_1', \ldots, \Delta_{j-1}', 0, \Delta_{j+1}', \ldots, \Delta_R'),$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \bar{\omega}_j, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_R, \Delta_1', \ldots, \Delta_{j-1}', 0, \Delta_{j+1}', \ldots, \Delta_R').$$

Наслідок 2. В силу результатів, що викладені в [1,2], для задачі

$$\min_x \frac{\sum_{i=1}^{n} (\sum_{r=1}^{R} q_r c_i^r) x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i},$$

$$\boldsymbol{A x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0.$$

має місце очевидний аналог твердження 2 і його наслідків.

Далі для першої постановки ЗДЛПУН будуть детально розглянуті критерії 3 та 4.

Знаходження компромісного розв'язку за критеріями 3 та 4. Компромісний розв'язок ($x_i = \frac{y_i}{y_0}$, $i = 1, \ldots, n$) за критеріями 3 та 4 (якщо за критерієм 3 розв'язку не існує) знаходиться за розв'язком наступної ЗЛП:

$$z = \min_{y,z,k} \sum_{r=1}^{R} \omega_r z_r, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{A y} = y_0 \boldsymbol{b}, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i y_i = 1, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^r y_i - z_r \leq f_{\text{opt}}^r + l_r, r = 1, \ldots, R. \quad (13)$$

Якщо вихідна задача (2)–(3) є задачею на максимум, то в задачі (10)–(13) нерівності (13) мають вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^r y_i + z_r \geq f_{\text{opt}}^r - l_r, r = 1, \ldots, R.$$

Зміст величин z_r, $r = 1, \ldots, R$: величина, яка показує наскільки ми повинні "посунутися" (поступитись) від встановленого допустимого відхилення від найкращого значення r-го часткового функціоналу у випадку якщо не задовольняються обмеження (5).

Примітка: ЗЛП, що відповідають компромісним розв'язкам за критеріями 1, 2 та 5 формулюються аналогічно з використанням результатів, отриманими в [10].

Експериментальне дослідження. Метою експериментів є дослідження залежності вихідних даних задачі від зміни деяких вхідних параметрів. Далі будуть представлені результати експериментів для задач розмірності $n = 5, m = 5, R = 5$, а величини $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ розподілені рівномірно.

Експеримент типу 1. Мета – дослідження того, як впливає зміна величин встановлених допустимих відхилень часткових цільових функцій l_r від їх оптимальних значень на змінні задачі z_r, $r = 1, \ldots, R$. Для деякої ЗДЛПУН ініціалізуються значення l_r, а потім ці значення змінюються з певним кроком і для кожного набору $l_r, r = 1,\dots, R$ розв'язується ця задача. Нижче наведено приклад схеми експерименту типу 1.

Згенерувати індивідуальну ЗДЛПУН Р.

Встановити $l_1 = 1, l_2 = 1, l_3 = 200, l_4 = 502, l_5 = 102$.

for N:= 1 to 500

Розв'язати задачу Р з параметрами l_1, l_2, l_3, l_4, l_5

$l_1 := l_1 + 0.00001$
$l_2 := l_2 + 0.000015$
$l_3 := l_3 + 0.00002$
$l_4 := l_4 - 0.002$
$l_5 := l_5 - 0.0015$

На рис. 1 та 2 наведені результати експерименту. З них видно, що як у випадку максимізації так і у випадку мінімізації має місце чітка закономірність – при збільшенні величин $l_r, r = 1,\dots, R$ величини $z_r, r = 1,\dots, R$ зменшуються або залишаються сталими на певний інтервал і навпаки.

Експеримент типу 2. Мета – дослідження того, як впливає зміна величин експертних ваг часткових цільових функцій ω_r на змінні задачі z_r. Для деякої ЗДЛПУН ініціалізуються значення ω_r, а потім ці значення змінюються з певним кроком і для кожного набору ω_r, $r = 1,\dots, R$ розв'язується ця задача. Нище наведено приклад схеми експерименту типу 2.

Згенерувати індивідуальну ЗДЛПУН Р.

Встановити $\omega_1 = 1, \omega_2 = 1, \omega_3 = 200, \omega_4 = 502, \omega_5 = 102$.

for N:= 1 to 500

Розв'язати задачу Р з параметрами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$

$\omega_1 := \omega_1 + 0.00001$
$\omega_2 := \omega_2 + 0.000015$
$\omega_3 := \omega_3 + 0.00002$
$\omega_4 := \omega_4 - 0.002$
$\omega_5 := \omega_5 - 0.0015$

На рис. 3 та 4 бачимо як для задачі на максимум так і на мінімум чітку закономірність – при збільшенні величин $\omega_r, r = 1,\dots, R$ зменшуються або залишаються сталими на певний інтервал величини $z_r, r = 1,\dots, R$ і навпаки. Також слід зазначити, що дані залежності мають ступіньчасту форму. Це означає, що існує така комбінація значень параметрів $\omega_r, r = 1,\dots, R$ при яких величини $z_r, r = 1,\dots, R$ різко або зменшують або збільшують свое значення. В усіх інших варіантах існують інтервали при яких значення $z_r, r = 1,\dots, R$ будуть залишатися сталими не дивлячись на зміну параметрів $\omega_r, r = 1,\dots, R$.

Експеримент типу 3. Мета – дослідження того, як впливає зміна величин встановлених допустимих відхилень значень часткових цільових функцій l_r на величини Δ_r. Нище наведено приклад схеми експерименту типу 3.

Згенерувати індивідуальну ЗДЛПУН Р.

Встановити $l_1 = 1, l_2 = 1, l_3 = 200, l_4 = 502, l_5 = 102$.

for N:= 1 to 500

Розв'язати задачу Р з параметрами l_1, l_2, l_3, l_4, l_5

$l_1 := l_1 + 0.00001$
$l_2 := l_2 + 0.000015$
$l_3 := l_3 + 0.00002$
$l_4 := l_4 - 0.002$
$l_5 := l_5 - 0.0015$

На рис. 5 та 6 бачимо, що збільшення або зменшення величин $l_r, r = 1,\dots, R$ не гарантують нам зменшення або збільшення $\Delta_r, r = 1,\dots, R$ відповідно. Це зумовлене тим, що на величину $\Delta_r, r = 1,\dots, R$ впливають не тільки параметри $l_r, r = 1,\dots, R$, а також і $\omega_r, r = 1,\dots, R$ і якщо якийсь $\omega_r, r = 1,\dots, R$ є достатньо малим в порівнянні з іншими, то не дивлячись на те, що ми встановимо мале значення $l_r, r = 1,\dots, R$, то все одно отримаємо достатньо велике $\Delta_r, r = 1,\dots, R$.

Експеримент типу 4. Мета – дослідження того, як впливає зміна величин встановлених допустимих відхилень значень часткових цільових функцій ω_r на змінні задачі Δ_r. Для деякої ЗДЛПУН ініціалізуються значення ω_r, а потім ці значення змінюються з певним кроком і для кожного набору ω_r, $r = 1,\dots, R$ розв'язується ця задача. Нище наведено приклад схеми експерименту типу 4.

Згенерувати індивідуальну ЗДЛПУН Р.

Встановити $\omega_1 = 0.00001, \omega_2 = 0.00001, \omega_3 = 0.00001, \omega_4 = 0.001, \omega_5 = 0.001$.

for N:= 1 to 500

Розв'язати задачу Р з параметрами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$

$\omega_1 := \omega_1 + 0.00001$
$\omega_2 := \omega_2 + 0.000015$
$\omega_3 := \omega_3 + 0.00002$
$\omega_4 := \omega_4 - 0.002$
$\omega_5 := \omega_5 - 0.0015$

На рис. 7 та 8 бачимо чітку закономірність – при збільшенні величин $\omega_r, r = 1,\dots, R$ зменшуються або залишаються сталими на певний інтервал величини $\Delta_r, r = 1,\dots, R$ і навпаки. Також слід зазначити, що дані залежності мають ступіньчасту форму. Це означає, що існує така комбінація значень параметрів $\omega_r, r = 1,\dots, R$ за яких величини $\Delta_r, r = 1,\dots, R$ різко або зменшують або збільшують свое значення. В усіх інших варіантах існують інтервали за яких значення $\Delta_r, r = 1,\dots, R$ будуть залишатися сталими не дивлячись на зміну параметрів $\omega_r, r = 1,\dots, R$.

Висновки. В роботі вперше розглянуто дві задачі дробово-лінійного програмування в умовах невизначеності та п'ять компромісних критеріїв оцінки їх розв'язків. Для задачі дробово-лінійого програмування, де невизначеність відноситься до чисельника детально розглянуто два з них:

1) знаходження компромісного розв'язку, у якого значення часткових функціоналів відхиляються від їх оптимальних значень в заданих межах;

2) знаходження компромісного розв'язку за критерієм мінімізації зваженої суми величин поступок.

Для знаходження компромісного розв'язку сформульована допоміжна задача лінійного програмування.

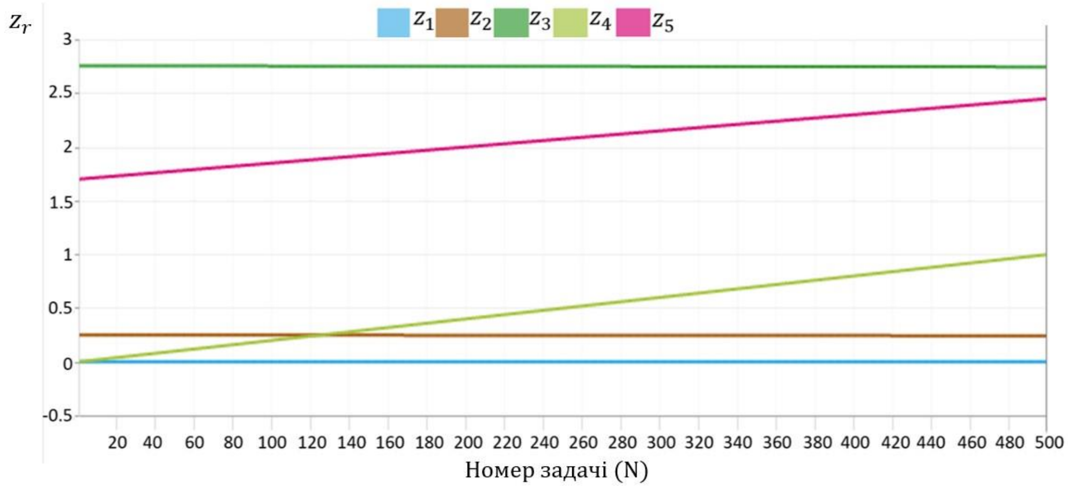

Рис. 1. Результати експерименту типу 1 для задачі на максимум

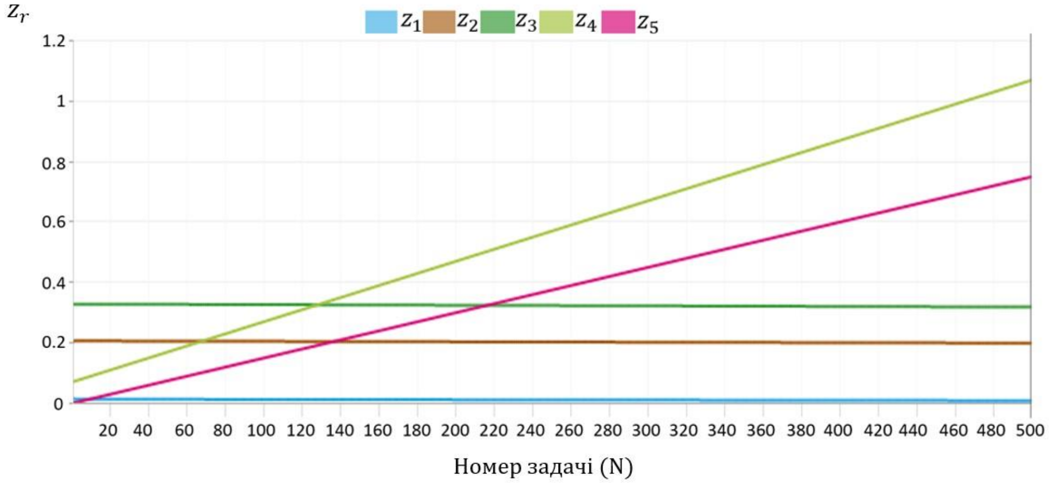

Рис. 2. Результати експерименту типу 1 для задачі на мінімум

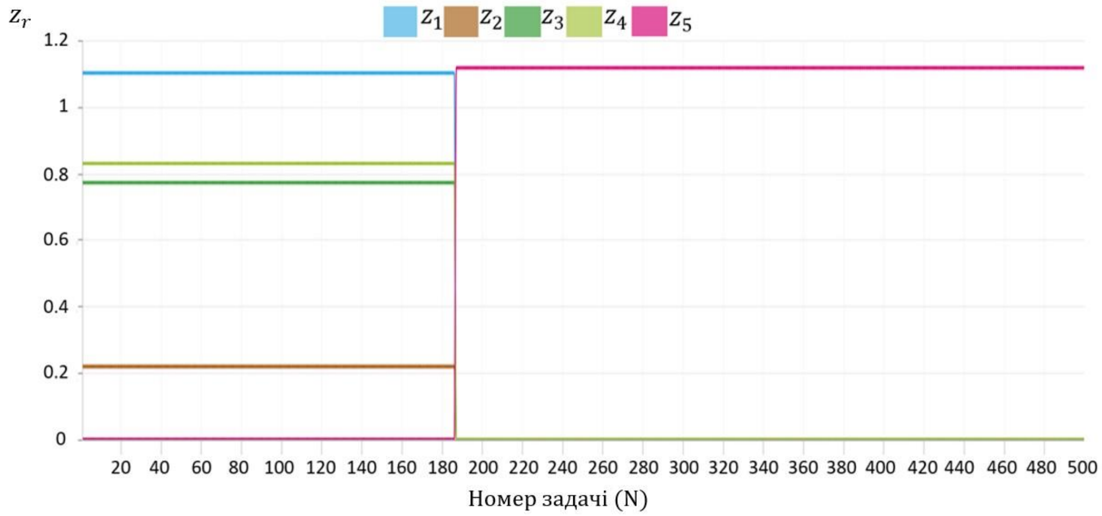

Рис. 3. Результати експерименту типу 2 для задачі на максимум

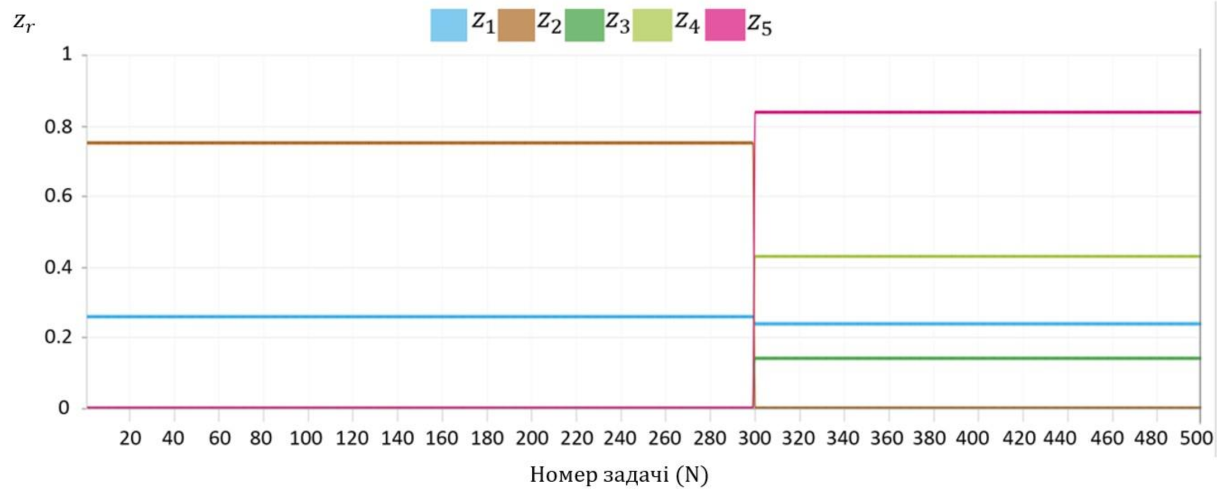

Рис. 4. Результати експерименту типу 2 для задачі на мінімум

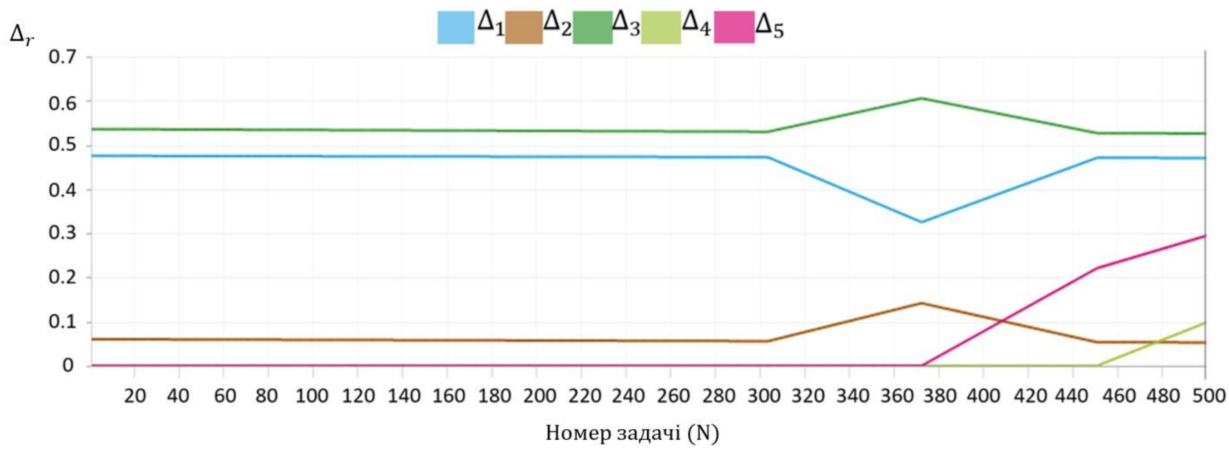

Рис. 5. Результати експерименту типу 3 для задачі на максимум

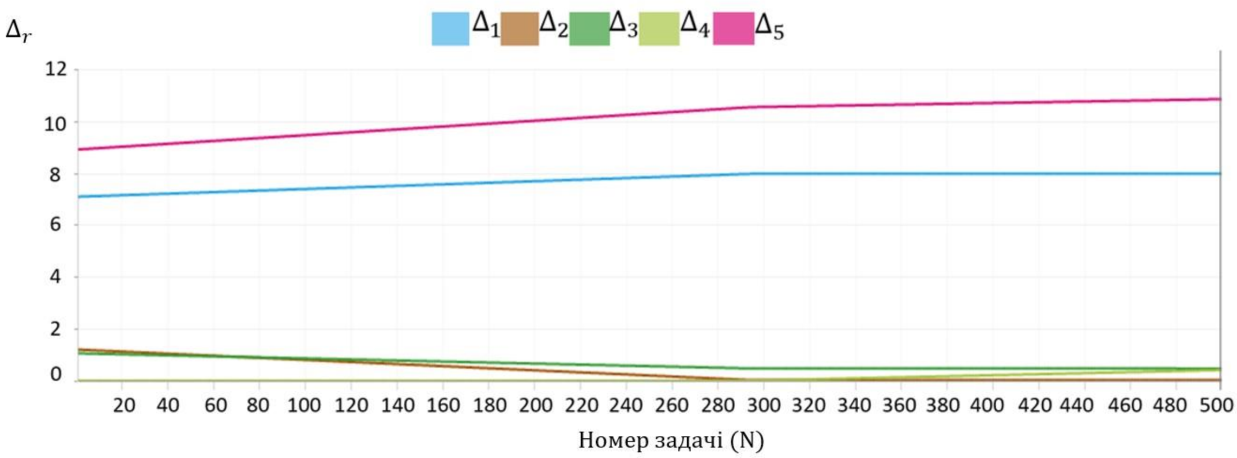

Рис. 6. Результати експерименту типу 3 для задачі на мінімум

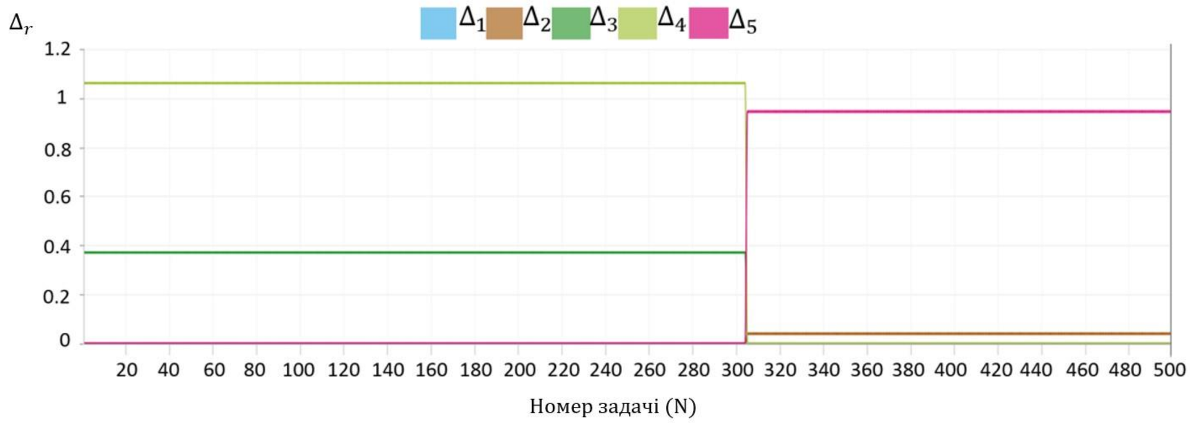

Рис. 7. Результати експерименту типу 4 для задачі на максимум

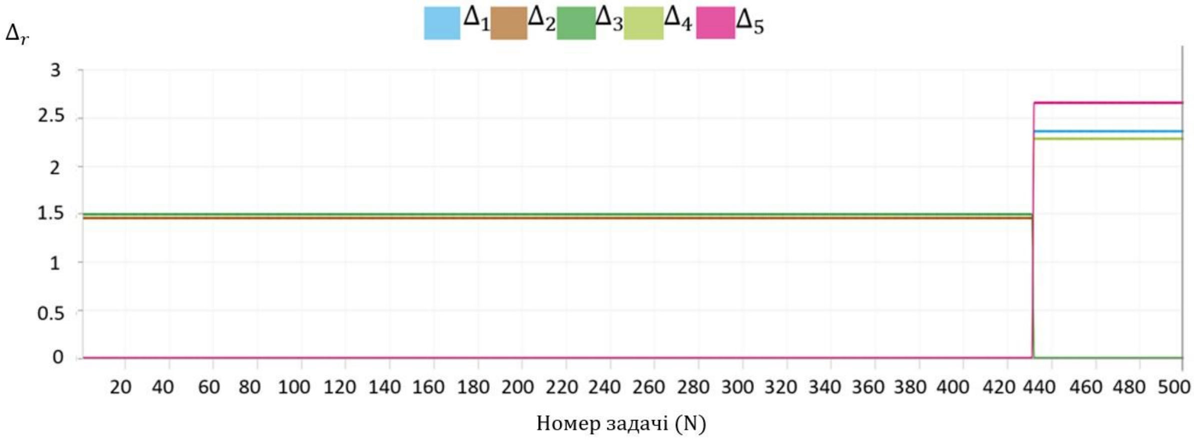

Рис. 8. Результати експерименту типу 4 для задачі на мінімум

Були проведені експерименти чотирьох типів, метою яких було дослідження впливу зміни величин встановлених допустимих відхилень часткових цільових функцій та експертних ваг на величини фактичних відхилень і на величини поступок. Аналіз результатів описаних експериментів показав, що отримані залежності відповідають теоретичному матеріалу. А саме підтверджено, що встановлені допустимі відхилення значень часткових цільових функцій та вагові коефіцієнти впливають на величину поступок. Також підтверджено, що вагові коефіцієнти впливають на значення різниці між значенням часткової цільової функції та оптимумом всієї задачі. Виявлено, що графіки описаних залежностей часто мають ступіньчасту форму і це в свою чергу потребує більш детального дослідження. Також, є цікавим той факт, що для задач на пошук максимума і мінімума як правило не співпадає кількість "сходинок" і інтервали за яких величини, що спостерігаються, мають одне і те ж саме значення.

Список літератури

1. Демидова Л. А., Кираковский В. В., Пылькин А. Н. *Принятие решений в условиях неопределенности*. Москва: Горячая линия – Телеком, 2015. 283 с.
2. Розенберг И. Н. Управление в условиях неопределенности. *Современные технологии управления*. 2017. № 7 (79).
3. Ehrgott M. *Multicriteria Optimization*. Berlin: Springer, 2005. 323 p.
4. Полтавский А. В., Семенов С. С., Крянев А. В., Маклаков В. В. Стохастическое доминирование в условиях рисковости разных степеней. *Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления*. Москва: ИПУ РАН, 2014. С. 8101–8124.
5. Броневич Ф. Г., Каркищенко А. Н., Лепский А. Е. *Анализ неопределенности виделения информативных признаков и представлений изображений.* Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
6. Арефьева И. Ю. Анализ методов принятия решений при разработке сложных технических систем. *Вестник Санкт–петербургского университета Сер. 10*. 2009. Вып. 4 С. 25–32.
7. Саати Т. *Принятие решений. Метод анализа иерархий*. Москва: Радио и связь, 1993. 278 с.
8. Зайченко Ю. П. *Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах*. Киев: Слово, 2008. 344 с.
9. Pavlov A. A. Optimization for one class of combinatorial problems under uncertainty. *Адаптивні системи автоматичного управління*. 2019, № 34. С. 81–89.
10. Pavlov A. A. Models and algorithms of multipurpose linear programming. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. Vol. 52, issue 11. P. 48–59
11. Pavlov A. A, Zhdanova E. G. The Transportation Problem under Uncertainty. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. Vol. 52. issue 4. P. 1–13.
12. Вагнер Г. *Основы исследования операций*. *Том 2*. Москва: Мир, 1973. 489 с.

References (transliterated)

1. Demidova L. A., Kirakovsky V. V., Pylkin A. N. *Prinyatiye resheniy v usloviyakh neopredelennosti* [Decision making under uncertainty]. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom Publ., 2015. 283 p.

2. Rozenberg I. N. Upravleniye v usloviyakh neopredelennosti [Management in the face of uncertainty]. *Sovremennyye tekhnologii upravleniya* [Modern control technologies]. 2017. № 7 (79).
3. Ehrgott M. *Multicriteria Optimization*. Berlin: Springer, 2005. 323 p.
4. Poltavskiy A. V., Semenov S. S., Kryanev A. V., Maklakov V. V. Stokhasticheskoye dominirovaniye v usloviyakh riskovosti raznykh stepeney [Stochastic dominance in terms of riskiness of different degrees]. *Trudy XII Vserossiyskogo soveshchaniya po problemam upravleniya* [Proceedings of the XII All–Russian Meeting on Management Problems]. Moscow: IPU RAN Publ., 2014. P. 8101–8124.
5. Bronevich F. H., Karkischenko A. N., Lepsky A. E. *Analiz neopredelennosti videleniya informativnykh priznakov i predstavleniy izobrazheniy* [Uncertainty analysis of the vision of informative features and representations of images]. Moscow: FIZMATLIT Publ., 2013. 320 p.
6. Arefieva I. Y. Analiz metodov prinyatiya resheniy pri razrabotke slozhnykh tekhnicheskikh system [Analysis of decision–making methods in the development of complex technical systems]. *Vestnik Sankt–peterburgskogo universiteta Ser* [Saint Petersburg University Bulletin Ser. 10]. 2009. Ed. 4 P. 25–32.
7. Saati T. *Prinyatiye resheniy. Metod analiza iyerarkhiy* [Making decisions. Hierarchy analysis method]. Moscow: Radio and communication Publ., 1993. 278 p.
8. Zaichenko Y. P. *Nechetkiye modeli i metody v intellektual'nykh sistemakh* [Fuzzy models and methods in intelligent systems]. Kyiv: Slovo Publ., 2008. 344 p.
9. Pavlov A. A. Optimization for one class of combinatorial problems under uncertainty. *Adaptyvni systemy avtomatychnoho upravlinnya* [Adaptive automatic control systems]. 2019, № 34. P. 81–89.
10. Pavlov A. A. Models and algorithms of multipurpose linear programming. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. Vol. 52. Iss. 11. P. 48–59
11. Pavlov A. A, Zhdanova E. G. The Transportation Problem under Uncertainty. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. Vol. 52, issue 4, pp. 1–13.
12. Wagner H. *Osnovy issledovaniya operatsiy* [Operations research fundamentals]. Moscow: Mir Publ., 1973, vol. 2. 489 p.

Надійшла (received) 22.04.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Павлов Олександр Анатолійович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», завідувач кафедри автоматизованих систем обробки інформації та управління; м. Київ, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000–0002–6524–6410; e–mail: alexanderpavlov1944@gmail.com.

Вознюк Олександра Віталіївна – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», студентка кафедри автоматизованих систем обробки інформації та управління; м. Київ, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000–0002–1422–027X; e–mail: 16alexandra09@gmail.com.

Жданова Олена Григорівна – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», доцент кафедри автоматизованих систем обробки інформації та управління; м. Київ, Україна; ORCID: https:// orcid.org/ 0000–0002–8787–846X; e–mail: Zhdanova.Elena@hotmail.com.

Павлов Александр Анатольевич – доктор технических наук, профессор, Национальний технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», заведующий кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления; г. Киев, Украина; ORCID: https://orcid.org/0000–0002–6524–6410; e–mail: alexanderpavlov1944@gmail.com.

Вознюк Александра Витальевна – Национальний технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», студентка кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления; г. Київ, Украина; ORCID: https://orcid.org/0000–0002–1422–027X; e–mail: 16alexandra09@gmail.com.

Жданова Елена Григорьевна – кандидат технических наук, доцент, Национальний технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», доцент кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления; г. Киев, Украина; ORCID: https:// orcid.org/ 0000–0002–8787–846X; e–mail: Zhdanova.Elena@hotmail.com.

Pavlov Oleksandr Anatoliyovych – doctor of technical sciences, professor, National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Head of the Department of Computer–Aided Management and Data Processing Systems; Kyiv city, Ukraine; ORCID: https://orcid.org/0000–0002–6524–6410; e–mail: alexanderpavlov1944@gmail.com.

Vozniuk Oleksandra Vitaliyivna – National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», student of the Department of Computer–Aided Management and Data Processing Systems; Kyiv city, Ukraine; ORCID: https://orcid.org/0000–0002–1422–027X; e–mail: 16alexandra09@gmail.com.

Zhdanova Olena Grygorivna – PhD, Associate Professor, National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Associate Professor of the Department of Computer–Aided Management and Data Processing Systems; Kyiv city, Ukraine; ORCID: https:// orcid.org/ 0000–0002–8787–846X; e–mail: Zhdanova.Elena@hotmail.com.