

# УПРАВЛІННЯ В ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

## УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

### CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS

УДК 629.3.017.5

DOI: 10.20998/2079-0023.2021.01.05

*Е. Е. АЛЕКСАНДРОВ, Т. Е. АЛЕКСАНДРОВА, А. Л. ГРИГОРЬЕВ, Я. Ю. МОРГУН*

#### **О ВЛИЯНИИ КОЛЕБАНИЙ ТРАНСПОРТИРУЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ КУРСОМ АВТОМОБИЛЯ**

Рассмотрены существующие работы по оптимизации автомобильных систем курсовой устойчивости. Составлена математическая модель, которая описывает возмущенное движение автомобиля с цистерной. Данная математическая модель позволяет учесть колебания свободной поверхности жидкости и определить их влияние на курсовую устойчивость автомобиля при равномерном движении и во время резкого торможения. Описаны характеристики автомобиля-топливозаправщика, который использовался для проведения расчетов. Разработан алгоритм вывода характеристического уравнения для сложной системы дифференциальных уравнений, описывающей динамические изменения параметров движения автомобиля с цистерной, колебания парциальных слоев жидкости в цистерне, работу электромагнитного привода управляющего клапана и электронного ПИД-регулятора для двухконтурной системы обеспечения курсовой устойчивости. На основе разработанной математической модели исследуется влияние вынужденных колебаний жидкости на область устойчивости системы в плоскости варьируемых параметров регулятора. Показано, что низкочастотные колебания свободной поверхности жидкости приводят к значительному сокращению области устойчивости, что свидетельствует о необходимости учета таких колебаний при решении задач анализа и синтеза этой системы. Установлено, что для автомобиля с цистерной, где происходят низкочастотные поперечные колебания жидкости, которые сопровождаются перераспределением массы, что возмущает движение, увеличение курсовой скорости однозначно приводит к снижению курсовой устойчивости. Это позволило исключить эту скорость из числа варьируемых параметров и существенно упростить решаемую задачу. Проведены расчёты для разных уровней загрузки цистерны. Установлено, что уровень жидкости в цистерне, с учетом его связи со скоростью движения, оказывает неоднозначное влияние на курсовую устойчивость автомобиля, и ограничивать исследования расчетами для случая 50 % загрузки недопустимо. Вместо этого упрощения необходимо находить линию, которая огибает сверху те границы устойчивости, которые соответствуют многим уровням жидкости.

**Ключевые слова:** колебания жидкости; курсовая устойчивость; область устойчивости; цистерна; ПИД-регулятор; параметры.

*Є. Є. АЛЕКСАНДРОВ, Т. Є. АЛЕКСАНДРОВА, О. Л. ГРИГОР'ЄВ, Я. Ю. МОРГУН*

#### **ПРО ВПЛИВ КОЛИВАНЬ ТРАНСПОРТУЄМОЇ РІДИНИ НА ОБЛАСТЬ СТІЙКОСТІ ЗАМКНЕНОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ КУРСОМ АВТОМОБІЛЯ**

Розглянуто існуючі роботи для оптимізації автомобільних систем курсової стійкості. Складено математичну модель, яка описує збурений рух автомобіля з цистерною. Дана математична модель дозволяє врахувати коливання вільної поверхні рідини та визначити їх вплив на курсову стійкість автомобіля під час рівномірного руху та різкого гальмування. Описані характеристики автомобіля-паливозаправника, що використовувався для проведення розрахунків. Розроблено алгоритм побудови характеристичного рівняння для складної системи диференціальних рівнянь, що описує динамічні зміни параметрів руху автомобіля з цистерною, коливання парціальних прошарків рідини у цистерні та роботу електромагнітного приводу керуючого клапана і електронного ПИД-регулятора для двоконтурної системи забезпечення курсової стійкості. На основі розробленої математичної моделі досліджується вплив вимушених коливань рідини на область стійкості системи в площині варіюваних параметрів регулятора. Показано, що низькочастотні коливання вільної поверхні рідини призводять до значного скорочення області стійкості замкненої системи, що свідчить про необхідність врахування таких коливань при вирішенні задач аналізу і синтезу цієї системи. Встановлено, що для автомобіля з цистерною, де відбуваються низькочастотні поперечні коливання рідини, які супроводжуються перерозподілом маси, що збурює рух, збільшення курсової швидкості однозначно призводить до погіршення курсової стійкості. Це дозволило виключити цю швидкість із числа варіюваних параметрів і суттєво спростити вирішувану задачу. Проведені розрахунки для різних рівнів завантаженості цистерни. З'ясовано, що рівень рідини в цистерні, з урахуванням його зв'язку зі швидкістю руху, оказує неоднозначний вплив на курсову стійкість автомобіля, і обмежувати дослідження розрахунками для випадку 50 % навантаження неприпустимо. Замість цього спрощення треба знаходити лінію, яка огинає зверху ті межі, що відповідають багатьом рівням рідини.

**Ключові слова:** коливання рідини; курсова стійкість; область стійкості; цистерна; ПИД-регулятор; параметри.

*Y. Y. ALEKSANDROV, T. Y. ALEKSANDROVA, A. L. GRIGORIEV, Y. Y. MORHUN*

#### **ABOUT THE INFLUENCE OF VIBRATIONS OF THE CONVEYED LIQUID ON THE AREA OF STABILITY OF A CLOSED SYSTEM AUTOMATIC VEHICLE COURSE CONTROL**

The existing publications that investigate vehicle course stability optimization were analyzed. A mathematical model, which describes the disturbed movement of a car with a tank, was compiled. This model allows to consider the liquid free surface oscillations and determine their effect on the car course stability during constant motion or emergency braking. There was described the main information regarding the car that was used to perform

© Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова, А. Л. Григорьев, Я. Ю. Моргун, 2021

mathematical calculations. An algorithm was developed for deriving the characteristic equation for a complex system of differential equations describing dynamic changes in the movement parameters of a car, oscillations of partial layers of liquid in a tank and the operation of an electromagnetic drive of the control valve and an electronic PID controller for a two-circuit system for ensuring course stability. Based on the developed mathematical model, the influence of forced oscillations of the fluid on the stability area of the system built in the plane of variable parameters of the controller is investigated. It is shown that low-frequency oscillations of the free surface of a liquid lead to a significant reduction in the stability area, which indicates the need to consider such oscillations when solving problems of analysis and synthesis of this system. It was found that for a car with a tank, where low-frequency transverse oscillations of the liquid occur, which are accompanied by a redistribution of mass and disturb the movement, an increase of the speed unambiguously leads to a deterioration in directional stability. That enables exclusion of speed from the number of variable parameters and significantly simplify the problem being solved. The calculations for cases with different loading levels were performed. It was found out that the level of liquid in the tank, considering its relationship with the speed, has an ambiguous effect on the car course stability, and it is unacceptable to limit the research calculations to the case with 50 % load. Instead of this, it is necessary to find a line that bends from above the stability boundaries that correspond to many liquid levels.

**Key words:** fluid vibrations; exchange rate stability system; area of stability; tank; PID-controller; parameters.

**Введение.** Обеспечение высоких показателей безопасности движения – одно из основных заданий современного машиностроения. Состояние дорог Украины влечет за собой повышенный уровень аварийности, сравнительно со странами ЕС и США. Режим экстренного торможения при возникновении непредвиденных препятствий может привести к потере сцепления колес с дорогой и отклонению автомобиля от заданной траектории движения.

Поэтому на современных машинах широко распространены системы автоматического управления тормозами, которые содержат две или три параллельно работающие подсистемы:

антиблокировочную систему ABS – препятствует блокировке колес при нажатии на педаль тормоза;

антипробуксовочную систему TRC, которая предотвращает букс ведущих колес при резком нажатии на педаль акселератора;

и систему курсовой устойчивости VSC, которая выполняет стабилизацию заданной траектории движения автомобиля.

Системы курсовой устойчивости VSC могут быть одно- и двухконтурными. В одноконтурных системах выполняется стабилизация направления движения автомобиля, а в двухконтурной системе также минимизируется боковой сдвиг центра масс автомобиля.

Опыт управления автомобилями, оснащенными горизонтальными емкостями для транспортировки жидкостей (цистернами), показывает, что такие автомобили наиболее подвержены потере устойчивости в процессе экстренного торможения, что приводит к тяжелым авариям с выделением в окружающую среду жидких топливных материалов и агрессивных веществ. Целью предлагаемой работы является исследование влияния возмущенных колебаний транспортируемой жидкости на область устойчивости замкнутой системы курсовой устойчивости автомобиля и рекомендации по выбору допустимых значений варьируемых параметров регулятора этой системы, которые необходимо учитывать на этапе оптимизации.

**Анализ последних публикаций.** С начала XXI века наблюдается широкое распространение систем курсовой устойчивости автомобиля корпорациями США, Японии, Южной Кореи и стран ЕС. Параллельно практическим разработкам, проводятся научные исследования таких систем, с целью их усовершенствования [1–3], международные научно-технические конференции [4–8], где обсуждаются результаты последних исследований о разработках электронных систем

распределения тормозных усилий EBD (Electronic Brake Distribution). В работе [9] описана методика вычисления оптимальных значений варьируемых параметров регулятора, которые обеспечивают максимальные запас устойчивости и быстродействие замкнутой системы курсовой устойчивости автомобиля. В работе [10] применен алгоритмический метод параметрического синтеза регулятора системы курсовой устойчивости, обеспечивающий максимальную точность замкнутой системы, а в работе [11], рассматривается задача параметрического синтеза цифрового регулятора системы курсовой устойчивости автомобиля. Статьи [12, 13] посвящены количественной оценке влияния колебаний транспортируемой жидкости на движение машинотракторного агрегата и автомобиля с цистерной. В работах [14, 15] рассматриваются проблемы уменьшения влияния колебаний жидкости, которая транспортируется, на курсовую устойчивость автомобиля-топливозаправщика за счет рационального выбора конструкции цистерны. Однако вопросам влияния возмущенных колебаний жидкости на область устойчивости движения внимание не уделялось.

**Математическая модель возмущенного движения автомобиля с цистерной.** Согласно работам [12, 13], математическая модель возмущенного движения замкнутой двухконтурной системы курсовой устойчивости автомобиля в процессе торможения с учетом поперечных и крутящих колебаний жидкости в цистерне, а также бокового смещения шин и поворота корпуса в поперечной плоскости, может быть описана так:

$$J_z \ddot{\psi} = -0.5Bk_{\Gamma} \Delta p - f_c(Z_r B \varphi + f_r \dot{\varphi}) - \xi M_{\text{ж}}^{(1)} - \xi M_{\text{ж}}^{(2)}; \quad (1)$$

$$\ddot{\psi}_l + \varepsilon_l \dot{\psi}_l + \omega_l^2 \psi_l = -\ddot{\psi}, \quad (l \in \overline{1,3}); \quad (2)$$

$$\dot{y} = -V\psi; \quad (3)$$

$$\ddot{y}_l + \varepsilon_l \dot{y}_l + \omega_l^2 y_l = V\dot{\psi} - \Delta L \ddot{\psi} - \delta - h_l^* \varphi, \quad (l \in \overline{1,3}); \quad (4)$$

$$M \ddot{\delta} + f_{\delta} \dot{\delta} + Z_{\delta} \delta = Mg\varphi + MV\dot{\psi} + F_{\text{ж}}, \quad (5)$$

$$J_x^* \ddot{\varphi} + f_r \dot{\varphi} + Z_r B \varphi = Mg h_{\text{цм}} \varphi + h_{\text{цм}} MV\dot{\psi} - M_{\text{ж}}^{(3)} + M_{\text{ж}}^{(4)}; \quad (6)$$

$$J_x^* = J_x + h_{\text{цм}}^2 M;$$

$$J_k \Delta \ddot{p} + f_k \Delta \dot{p} + c_k \Delta p = k_n R_{об} I; \quad (7)$$

$$\Lambda_{об} \dot{I} + R_{об} I = U; \quad (8)$$

$$U = K_\psi \psi + K_\omega \dot{\psi} - K_y y; \quad (9)$$

где  $B$  – ширина колеи;

$k_\Gamma, k_n$  – коэффициенты пропорциональности;

$\Delta p$  – разница давлений тормозной жидкости в магистралях правого и левого бортов автомобиля;

$f_c$  – приведенное значение коэффициента сопротивления качению всех колес автомобиля;

$Z_\Gamma$  – суммарный коэффициент радиальной жесткости шин одного борта;

$\varphi, \delta$  – угол наклона и боковое смещение автомобиля в следствии упругости шин;

$f_r, f_\delta$  – коэффициенты диссипации энергии при радиальных и боковых деформациях шин;

$M, J_z, J_x$  – масса и моменты инерции загруженного автомобиля относительно его собственных вертикальной и горизонтальной осей;

$\psi$  – угловое отклонение собственной продольной оси автомобиля относительно заданной траектории;

$y$  – боковое отклонение центра масс от заданной траектории движения в режиме торможения;

$\Delta L$  – расстояние между центром масс автомобиля и вертикальной осью цистерны (рис. 1);

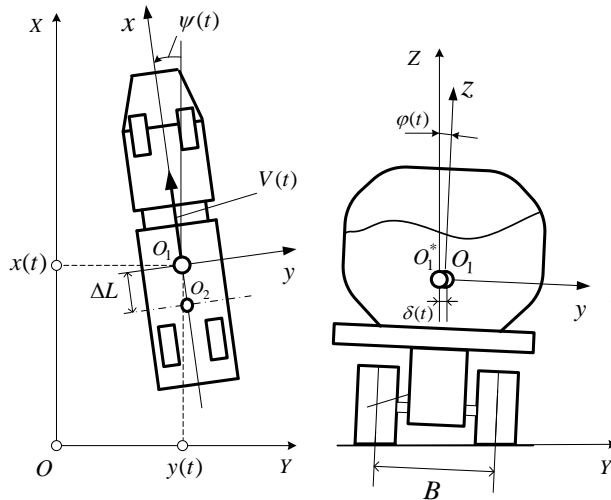


Рис. 1. Системы координат:  $OXY$  – инерциальная;  $O_1xy$  – связанная с центром масс автомобиля;  $O_2$  – центр цистерны;  $O_1^*$  – положение центра масс при условии отсутствия бокового смещения шин

$Z_\delta$  – суммарный коэффициент боковой жесткости всех шин автомобиля;

$V$  – курсовая скорость движения центра масс;

$t$  – время;

$h_{цм}$  – подъем центра масс  $O_1$  относительно коленной оси;

$K_\psi, K_\omega, K_y$  – коэффициенты принятого ПИД-закона регулирования, которые принимают положительные значения (при отсутствии регулирования равны нулю);

$U(t), I(t)$  – напряжение и электрический ток в цепи управления, которые вырабатываются системой курсовой устойчивости автомобиля;

$\Lambda_{об}, R_{об}$  – индуктивность катушки и электрическое сопротивление цепи;

$J_k$  – момент инерции коромысла электромагнита (ЭМ) в электромагнитном усилителе (ЭМУ);

$f_k$  – коэффициент вязкого трения в оси коромысла;

$c_k$  – коэффициент жесткости пружины, которая фиксирует коромысло в нейтральном положении;

$F_ж$  – вес жидкости в цистерне с учетом поперечных смещений:

$$F_ж = \sum_{l=1}^3 m_l \ddot{y}_l;$$

$M_ж$  – масса жидкости в цистерне:

$$M_ж = \rho abh;$$

$$M_ж^{(1)} = \Delta L \sum_{l=1}^3 m_l \ddot{y}_l;$$

$$M_ж^{(2)} = \sum_{l=1}^3 J_l \ddot{\psi}_l;$$

$$M_ж^{(3)} = \sum_{l=1}^3 m_l \ddot{y}_l (H_n + h_l); \quad (10)$$

$$M_ж^{(4)} = \sum_{l=1}^3 g m_l y_l \quad (11)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;

$a, b$  – длина и ширина цистерны;

$y_l(t), \psi_l(t)$  – поперечное и угловое смещение центров масс парциальных осцилляторов (относительно вертикальной оси цистерны);

$m_l, J_l$  – их массы и моменты инерции:

$$m_l = M_ж \frac{2th(\lambda_l h)}{\pi^2 \lambda_l h (l - 0.5)^2};$$

$$J_l = m_l c_*^2, (l \in \overline{1,3});$$

$g$  – ускорение свободного падения;

$h$  – уровень жидкости в цистерне;

$\lambda_l, \omega_l, \varepsilon_l$  – волновые числа, собственные частоты и коэффициенты диссипации осцилляторов, которые определяются формулами:

$$\lambda_l = \frac{\pi(2l - 1)}{b}, \quad (12)$$

$$\omega_l = \sqrt{g \lambda_l th(\lambda_l h)}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_l = \omega_l^y \frac{\Delta f}{\pi}, \quad (14)$$

где  $\Delta f$  – логарифмический декремент затухания колебаний жидкости;

$c$  – расстояние между вертикальной осью цистерны и центром ее крутящей массы,

$$c^2 = \frac{a^2 + ab + 2b^2}{12};$$

$$c_*^2 = \frac{a-b}{b} c^2;$$

$\xi$  – эффективный коэффициент передачи усилия

$$\xi = \frac{1}{1 + \frac{4}{B^2} \sum_{j=1}^3 A_j^2 \times \frac{n_j}{\sum_{j=1}^3 n_j}} - f_c,$$

где  $A_j, n_j, j \in \overline{1,3}$  – длина от центра масс  $O_1$  к мостам автомобиля и соответствующие количества шин.

В формулах (10) и (11) величины  $H_n, h_l$  – это расстояния от колесной оси к дну цистерны и от дна цистерны к центру масс  $l$ -й парциальной прослойки,

$$h_l = h - \frac{\text{th}\left(\frac{\lambda_l h}{2}\right)}{\lambda_l};$$

$$h_l^* = h_l - h_{\text{цм}}.$$

Заметим, что в случае, когда односекционная цистерна имеет внутренние негерметичные перегородки, уменьшающие колебания жидкости, то формулы (10–14) требуют корректировки:

$$M_{\text{ж}}^{(4)} = \frac{1}{1 + n_y} \sum_{l=1}^3 g m_l y_l;$$

$$\lambda_l = (1 + n_y) \frac{(2l - 1)\pi}{b},$$

где  $n_y$  – количество продольных перегородок.

Особенно подчеркнем обстоятельство, что описанная математическая модель не является замкнутой, так как у нее отсутствуют уравнения, описывающие изменение курсовой скорости  $V(t)$ . После учета влияния продольных колебаний жидкости эти уравнения будут такими:

$$M\dot{V} = -2k_{\Gamma} p_0 - F_{\text{ж}}^x - f_c M g; \quad (15)$$

$$\ddot{x}_k + \varepsilon_k^x \dot{x}_k + (\omega_k^x)^2 x_k = -\dot{V}(k \in \overline{1,3}); \quad (16)$$

$$F_{\text{ж}}^x = \sum_{l=1}^3 m_k \ddot{x}_k;$$

$$\lambda_k^x = \frac{\pi(2k - 1)}{a};$$

$$\omega_k^x = \sqrt{g \lambda_k^x \text{th}(\lambda_k^x h)};$$

$$\varepsilon_k^x = \omega_k^x \frac{\Delta f}{\pi};$$

$$m_k^x = M_{\text{ж}} \frac{2 \text{th}(\lambda_k^x h)}{\pi^2 \lambda_k^x h (k - 0.5)^2}, (k \in \overline{1,3});$$

где  $k_{\Gamma}, p_0$  – площадь тормозных поршней и давление в тормозах.

На рис. 2 показан результат интегрирования уравнений (15), (16) для моделирования экстренного торможения. Параметры автомобиля и цистерны (рис. 3) приведены в табл. 1. Скорость падает монотонно, но ускорения имеют существенные колебания.

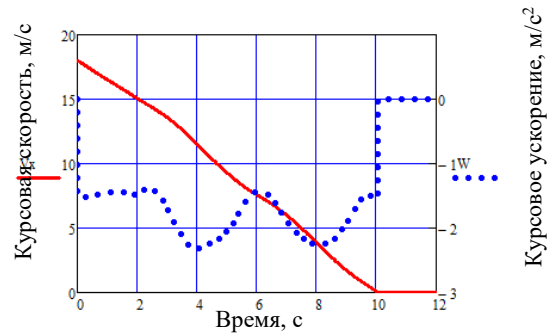


Рис. 2. Параметры торможения топливозаправщика КраЗ-63221 с цистерной АПС-20



Рис. 3. Топливозаправщик КраЗ-63221 с цистерной АПС-20

Таблица 1 – Основные технические и некоторые динамические параметры топливозаправщика КраЗ-63221

Параметр	Величина
Сухая масса, кг	10700
Максимальный вес груза, кг	18000
Размеры цистерны $a \times b \times H$ , м	$6 \times 2.4 \times 1.4$
Ширина колеи, м	2
Максимальная скорости при перевозке $10\text{ м}^3$ топлива, м/с	18
Моменты инерции при загрузке на 50 %: $J_z, \text{кгм}^2$ $J_x, \text{кгм}^2$	$1.48 \times 10^5$ $3 \times 10^4$
Радиальная жесткость шины, Н/м	$10^6$
Боковая жесткость шины, Н/м	$2.5 \times 10^5$
Коэффициент сопротивления качению колес $f_c$	0.09
Частота колебаний наклона, Гц	2...5
Коэффициент диссипации для колебаний наклона $f_{\Gamma}, \text{Нмс}$	$1 \cdot 10^5$
Частота колебаний смещения, Гц	1.5...2.2
Коэффициент диссипации для колебаний смещения $f_{\delta}, \text{Нс}$	$5 \times 10^3$
Собственные частоты парциальных осцилляторов, Гц	рис. 4
Относительные массы парциальных осцилляторов	рис. 5
Логарифмический декремент затухания колебаний парциальных осцилляторов, $\Delta f$	0.05

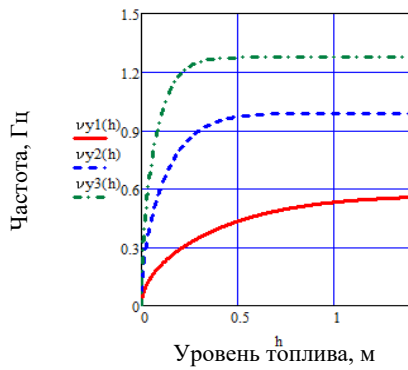


Рис. 4. Зависимость собственных частот первых трех осцилляторов от уровня жидкости в цистерне

Однако в случае использования этих уравнений, модель возмущенного движения стает нелинейной (в следствии связи (3)), что существенно усложняет исследование ее асимптотической устойчивости. Поэтому переменную скорости  $V(t)$  в дальнейшем будем считать постоянным параметром  $V$ , который в конкретном расчёте «замораживается», но его значения варьируются в заданных пределах [16]. Несколько упрощая реальные зависимости, верхнюю границу скорости автомобиля будем определять, при условии наличия нагрузки цистерны, по формуле:

$$V_0(h) = V_0^* \frac{M(h_*)}{M(h)},$$

где  $V_0^*$  – максимальная скорость при уровне жидкости  $h_*$ , для которого она известна (табл. 1).

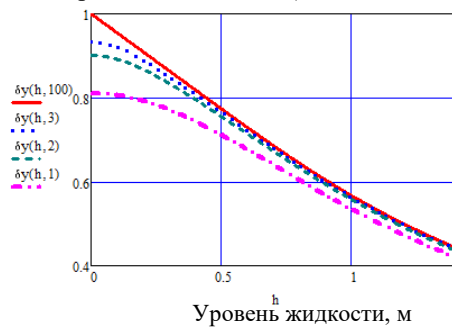


Рис. 5. Зависимость относительной массы жидкости, которая двигается в одной, двух и трёх первых парциальных прослойках, от уровня жидкости в цистерне

Заметим, что от уровня жидкости  $h$  зависят координаты центра масс и другие величины (см. рис. 4, 5), которые по-разному влияют на колебания и выполнение условия курсовой устойчивости. Поэтому исследование асимптотической устойчивости движения мы вынуждены проводить при разных уровнях загрузки цистерны.

**Построение характеристического уравнения математической модели.** Ввиду линейности и однородности математической модели, применим к ее уравнениям метод комплексных амплитуд, когда каждая переменная величина  $f(t)$  подается в виде:

$$f(t) = f_* \exp(pt),$$

где  $p$  – комплексное число,  $p = d\omega + i\omega$ ;  
 $\omega$  – действительная частота колебаний;  
 $d$  – действительный декремент затухания (или

увеличения) амплитуды колебаний;

$$i = \sqrt{-1};$$

$f_*$  – начальная амплитуда колебаний, «звездочками» в обозначении будем пренебрегать.

Понятно, что  $p$  – характеристическое число системы дифференциальных уравнений (1–9), и, ввиду общего порядка системы, таких чисел, при каждом наборе параметров  $h$  и  $V$ , насчитывается более 20.

Начнем с уравнения (3), которое принимает вид:

$$y = -V\psi/p \tag{17}$$

Как результат, уравнения (7–9) приводят к:

$$(J_k p^2 + f_k p + c_k) \Delta p = k_n (1 + \tau_{об} p) \left( K_\psi + K_\omega p + \frac{K_y V}{p} \right) \psi, \tag{18}$$

где  $\tau_{об}$  – постоянная времени ЭМ,  $\tau_{об} = \frac{\Lambda_{об}}{R_{об}}$ .

Значения констант ЭМУ приведены в табл. 2.

Как видим, в отличии от классического ПИД-закона интегральное звено при разных курсовых скоростях имеет разные коэффициенты, и это обстоятельство, безусловно, повлияет на результаты управления режимом экстренного торможения.

Выполним аналогичные преобразования для дифференциальных уравнений (2) и (4),

$$\varphi_l = \frac{-p^2 \psi}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}, (l \in \overline{1,3}); \tag{19}$$

$$y_l = \frac{(Vp - \Delta L p^2) \psi - p^2 \delta - h_l^* \varphi}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}, (l \in \overline{1,3}), \tag{20}$$

и, с учетом этих формул, для уравнений (5), (6):

$$\begin{aligned} (M p^2 + f_\delta p + Z_\delta) \delta &= M g \varphi + M V \psi p + \\ &+ \sum_{l=1}^3 m_l p^2 \frac{(Vp - \Delta L p^2) \psi - p^2 \delta - h_l^* \varphi}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}; \\ (J_x^* p^2 + f_x p + Z_r B) \varphi &= M g h_{цм} \varphi + \\ &+ h_{цм} M V \psi p + \sum_{l=1}^3 m_l [g - (H_n + h_l) p^2] \times \\ &\times \frac{(Vp - \Delta L p^2) \psi - p^2 \delta - h_l^* \varphi}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}. \end{aligned}$$

Запишем эти зависимости в виде системы двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,1}(p) \delta + a_{1,2}(p) \varphi = b_1(p) \psi; \\ a_{2,1}(p) \delta + a_{2,2}(p) \varphi = b_2(p) \psi, \end{cases} \tag{21}$$

$$a_{1,1} = M p^2 + f_\delta p + Z_\delta + F_\varphi p^4;$$

$$a_{1,2} = -M g + p^2 M_\varphi;$$

$$a_{2,1} = F_\psi p^2;$$

$$a_{2,2} = J_x^* p^2 + f_x p + Z_r B - M g h_{цм} + M_\psi;$$

$$b_1 = M V + (V - \Delta L p) p^3 F_\varphi;$$

$$b_2 = h_{цм} M V p + p(V - \Delta L p) F_\psi;$$

$$F_{\psi}(p) = \sum_{l=1}^3 m_l \frac{g - (H_n + h_l)p^2}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2};$$

$$F_{\phi}(p) = \sum_{l=1}^3 \frac{m_l}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2};$$

$$M_{\psi} = \sum_{l=1}^3 m_l h_l^* \frac{g - (H_n + h_l)p^2}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2};$$

$$M_{\phi} = \sum_{l=1}^3 \frac{m_l h_l^*}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}.$$

Систему (21) решим методом определителей:

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}} = \Delta(p)\psi; \quad (22)$$

$$\phi = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}} = \Phi(p)\psi. \quad (23)$$

Выполним аналогичное преобразование для (1)

$$J_z p^2 \psi = -0.5B k_{\Gamma} \Delta p - f_c (Z_r B + f_r p) \phi + \xi \sum_{l=1}^3 \frac{J_l p^2 \psi - m_l p^2 \Delta L [p(V - \Delta L p) \psi - p^2 \delta - h_l^* \phi]}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2},$$

и используем формулы (22) и (23):

$$J_z p^2 \psi = -0.5B k_{\Gamma} \Delta p - f_c (Z_r B + f_r p) \Phi \psi + \xi p^2 \sum_{l=1}^3 m_l \frac{c_*^2 p^2 - \Delta L (V p - \Delta L p^2 - p^2 \Delta - h_l^* \Phi)}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2} \psi,$$

откуда получим:

$$C(p)\psi = -0.5B k_{\Gamma} \Delta p$$

$$C(p) = J_z p^2 + (f_c (Z_r B + f_r p) + \xi p^2 M_{\phi}(p)) \Phi(p) - \xi p^3 [c_*^2 p - \Delta L (V - \Delta L p - p \Delta(p))] F_{\phi}(p). \quad (24)$$

Заметим, что при условии высокой жесткости шины (как это бывает на высоконагруженных грузовиках, табл. 1) функция  $C(p)$  упрощается к виду:

$$C(p) = J_z p^2 + \frac{f_c (M_0 + M_{43}) + \xi M_{12}}{(1 - k_{\phi})(1 + k_{\delta})}, \quad (25)$$

$$M_0 = h_{\text{цм}} M V p;$$

$$M_{43} = p(V - \Delta L p)(g F_{\phi} - p^2 M_{\phi});$$

$$M_{12} = p^3 [(V - \Delta L p) \Delta L - c_*^2 p] F_{\phi};$$

$$k_{\delta} = \frac{F_{\phi} p^4}{M p^2 + f_{\delta} p + Z_{\delta}};$$

$$k_{\phi} = \frac{M g h_{\text{цм}} - M_{\psi}}{J_x^* p^2 + f_x p + Z_r B}.$$

Если жидкость потеряла возможность двигаться (напр., фактически или условно замерзла в цистерне), то эта формула становится достаточно простой:

$$C(p) = J_z p^2 + \frac{f_c M g h_{\text{цм}} V p}{1 - k_{\phi}}, \quad (26)$$

$$k_{\phi} = \frac{M g h_{\text{цм}}}{J_x^* p^2 + f_x p + Z_r B}.$$

Понятно, что в этом случае исследования на устойчивость движения возможно проводить аналитическими методами, которые недопустимы для цистерны с жидкостью и при условии допустимого упрощения математической модели (напр., уменьшение количества парциальных осцилляторов или пренебрежение упругостью шин). Поэтому мы не занимались упрощением модели, так как неизвестно как они повлияют на границу области устойчивости.

Таблица 2 – Основные параметры ЭМ привода

Параметр	Величина
Индуктивность катушки $\Lambda_{\text{об}}$ , Ом × с	0.15
Сопrotивление цепи $R_{\text{об}}$ , Ом	30
Константа времени для ЭМ $\tau_{\text{об}}$ , с	0.005
Момент инерции коромысла $J_{\text{к}}$ , кгм <sup>2</sup>	$0.98 \times 10^{-2}$
Коэффициент жесткости пружины коромысла, $c_{\text{к}}$ , Нм	$1.01 \cdot 10^2$
Коэффициент трения в опоре коромысла $f_{\text{к}}$ , Нмс	0.55
Собственная частота колебаний коромысла, Гц	16
Логарифмический декремент затухания колебаний в ЭМУ	1.7
Коэффициент усиления $\kappa_{\text{и}}$ , НмПаВ <sup>-1</sup>	$10^6$

В завершении рассмотрим систему уравнений (18), (26) и увидим, что для ее совместности необходимо выполнение следующего условия:

$$K_{\psi} + K_{\omega} p + \frac{K_y V}{p} = \Psi(p). \quad (27)$$

$$\Psi(p) = -\frac{2C(p)}{\kappa_{\text{и}} B k_{\Gamma}} (J_k p^2 + f_k p + c_k) (1 + \tau_{\text{об}} p), \quad (28)$$

где  $C(p)$  – мелко-рациональная функция, заданная формулами (24) или (25), или (26).

Равенство (27) – целевое характеристическое уравнение возмущенного движения автомобиля с цистерной, который оснащен двухконтурной системой курсовой устойчивости.

**Алгоритм и результаты исследования устойчивости системы. Этап 1: одноконтурное регулирование.** Заметим, что в равенстве (28) можно избавиться от знаменателей, и, не смотря на высокую степень полинома, найти все его корни  $p_j, j \in \overline{1, 22}$ , используя для этого стандартные компьютерные программы. По расположению этих корней в комплексной плоскости можно сделать вывод про асимптотическую устойчивость системы, и получить ценную, исчерпывающую информацию о поведении ее отдельных звеньев. Но этот путь решения является предельно неэффективным, и мы поступим иначе.

На первом этапе расчетного исследования выберем для интегрального коэффициента регулятора значение  $K_y = 0$  и подставим в уравнение

$$K_\psi + K_\omega p = \Psi(p)$$

мнимое характеристическое число  $p = \omega i$ :

$$K_\psi + K_\omega \omega i = \Psi(\omega i) \tag{29}$$

Равенство (29) эквивалентно системе двух равенств:

$$\begin{cases} K_\psi = \text{Re}[\Psi(\omega i)] \\ K_\omega = \text{Re} \left[ \frac{\Psi(\omega i)}{\omega i} \right], \end{cases} \tag{30}$$

где  $\text{Re}[p]$  – действительная часть комплексного числа  $p$ .

В работе [8] для подобной задачи действительная часть функции отделялась аналитическими методами, но теперь функция стала сложнее, поэтому поручим эту работу (как и предыдущую) компьютеру.

С помощью компьютерной программы меняем значение круговой частоты  $\omega: 0 \rightarrow \infty$  и на экране компьютера в координатах  $K_\psi, K_\omega$  изображаем траекторию движения точки, т.е. формулы (30) описывают эту траекторию в параметрической форме. Общий вид этой траектории для топливозаправщика КраЗ-63221 показан на рис. 6, а ее нижней границы – на рис. 7, 8. Для сравнения на рис. 9 приведены графики, которые соответствуют так называемому «замороженному грузу», который потерял возможность двигаться в цистерне.

Нижняя граница области устойчивости отвечает диапазону частот 0–10 Гц, а верхняя граница –

диапазону 10–15 Гц. При еще больших частотах граница уходит в зону отрицательных значений коэффициента  $K_\psi$ , где ограничение теряет актуальность.

Как видно на рис. 6, расположение верхней границы зависит от загруженности автомобиля, и при высоких частотах больше вес, тем легче обеспечить его курсовую устойчивость за счет регулирующего влияния на тормозную систему. Если груз закреплен, то и на низких частотах действует аналогичное правило (см. рис. 9).

Но, если в цистерне транспортируется жидкость, то на низких частотах (рис. 7) более важную роль имеет скорость автомобиля, которая, при граничном уменьшении нагрузки, увеличивается до 25 м/с, а при полной нагрузке цистерны жидкостью уменьшается до 12 м/с. К тому же, свой вклад делают парциальные осцилляторы, которые имеют низкий декремент затухания и резонируют при частотах, которые изображены на рис. 4, а также колебания смещения (их собственная частота приведена в табл. 1, а логарифмический декремент затухания при отсутствии амортизаторов равен 0.08, т.е. он тоже минимальный).

В результате на рис. 7 можно увидеть два узла колебаний, причиной создания первого узла (если их считать слева направо) и едва заметной «колебательной дорожки» после него являются парциальные осцилляторы, а второй, более масштабный, узел связан с развитием колебаний смещения.

Заметим, что пучок приближенно прямых линий (рис. 9), определяет общий тренд для направления границы каждой области устойчивости, изображенной на рис. 7, и этот тренд можно увидеть на рис. 8.

Каждая траектория, которая отвечает принятому уровню нагрузки, при некоторой частоте колебаний

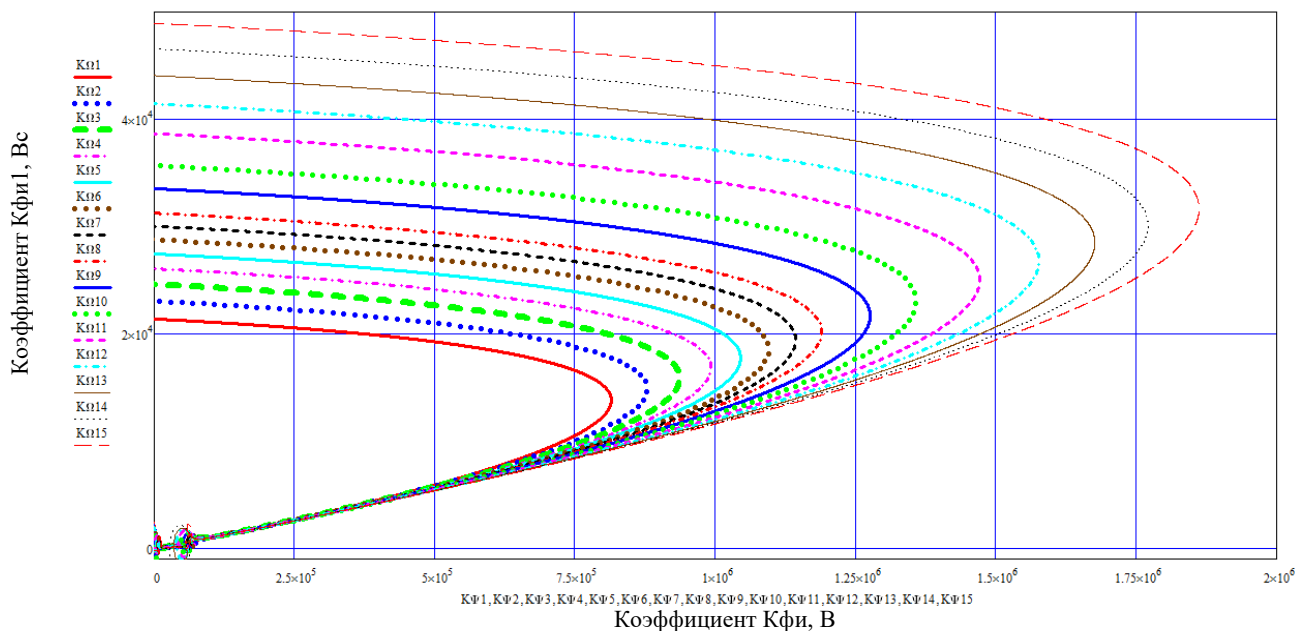


Рис. 6. Общий вид области курсовой устойчивости. Обозначение Кфи отвечает коэффициенту  $K_\psi$ , а обозначение Кфи1 – коэффициенту  $K_\omega$ . Номер границы тут и дальше отвечает следующим уровням жидкости: 1 – 0.05; 2 – 0.10; 3 – 0.15; 4 – 0.20; 5 – 0.25; 6 – 0.30; 7 – 0.35; 8 – 0.40; 9 – 0.50; 10 – 0.60; 11 – 0.75; 12 – 0.90; 13 – 1.05; 14 – 1.20; 15 – 1.35 м

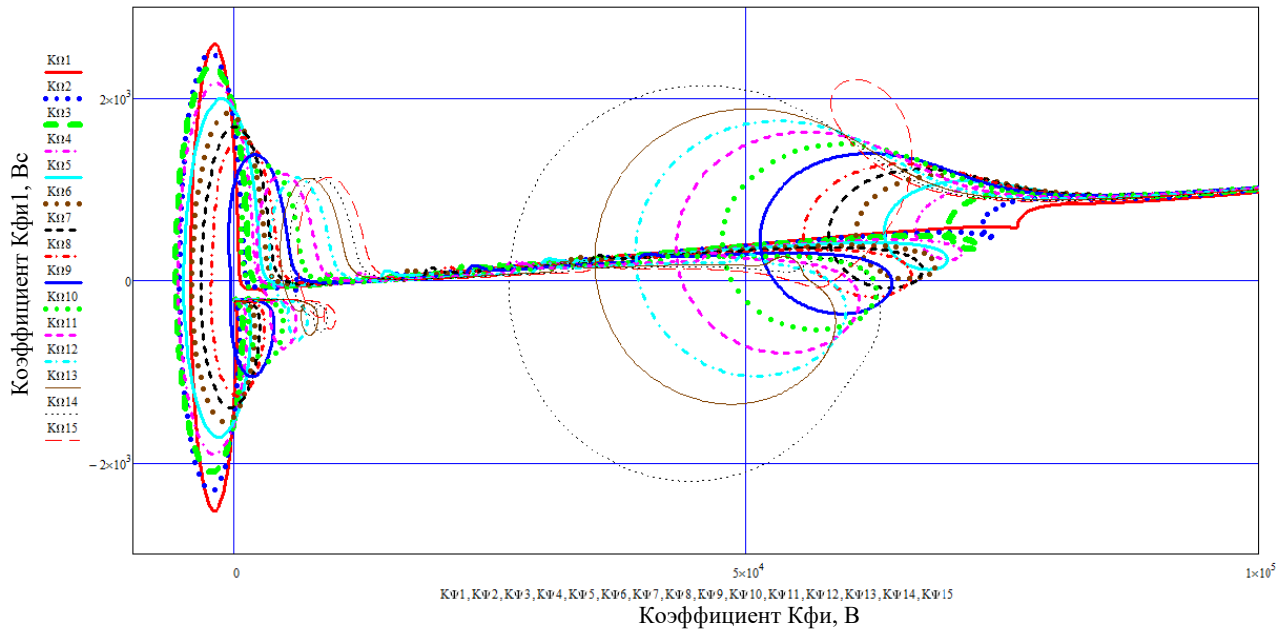
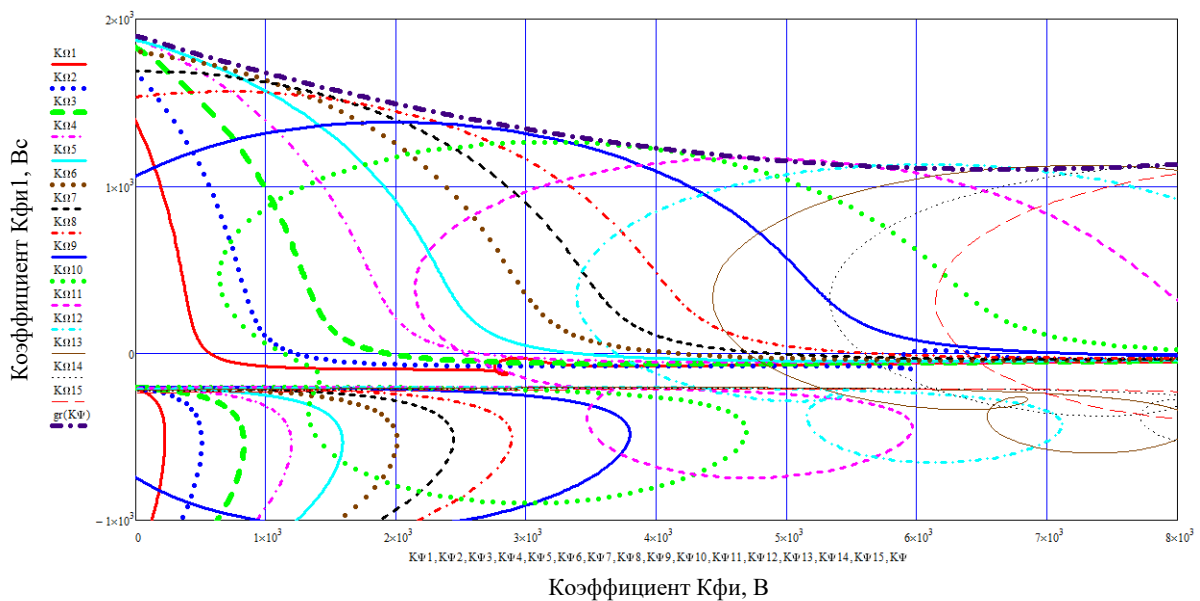


Рис. 7. Общий вид нижней границы области курсовой устойчивости при частотах 0–2 Гц

Рис. 8. Актуальный участок нижней границы области курсовой устойчивости при частотах 0–0.4 Гц и коэффициенте  $K_y = 0$ . Штрихпунктирная линия огибает все траектории сверху и становится границей этой области

выходит из общего пучка, и, при большей частоте, возвращается к этому пучку. В результате, отклоняясь от общего тренда, она создает в плоскости параметров  $K_\psi, K_\omega$  несколько последовательных петель.

Детальное исследование первой петли, которая проходит возле нулевой точки и при малых нагрузках огибает ее (рис. 8) показало, что асимптотическая устойчивость наблюдается при условии расположения параметра  $K_\omega$  выше этой петли.

Это соответствует правилу штриховки области устойчивости, примененному в работе [8].

Однако, по причине присутствующего усложнения общей картины, изображенной на рис. 7, 8, в

сравнении с классическими параболой рис. 6, асимптотическая устойчивость потребовала конкретной проверки.

Как видим, между жидким и «отвердевшим» грузом проявляется качественное различие: если отключить ПИД-регулятор, то у автомобиля с закрепленным грузом после действия кинематического или силового возбудителя курсовой угол выравнивается самостоятельно, без вмешательства водителя (рис. 9), а у автомобиля с цистерной (при нагрузке менее 40 % от полной, рис. 8) такого свойства нет.

Однако, это не касается курсового смещения, для ликвидации которого, в этих случаях, необходимо



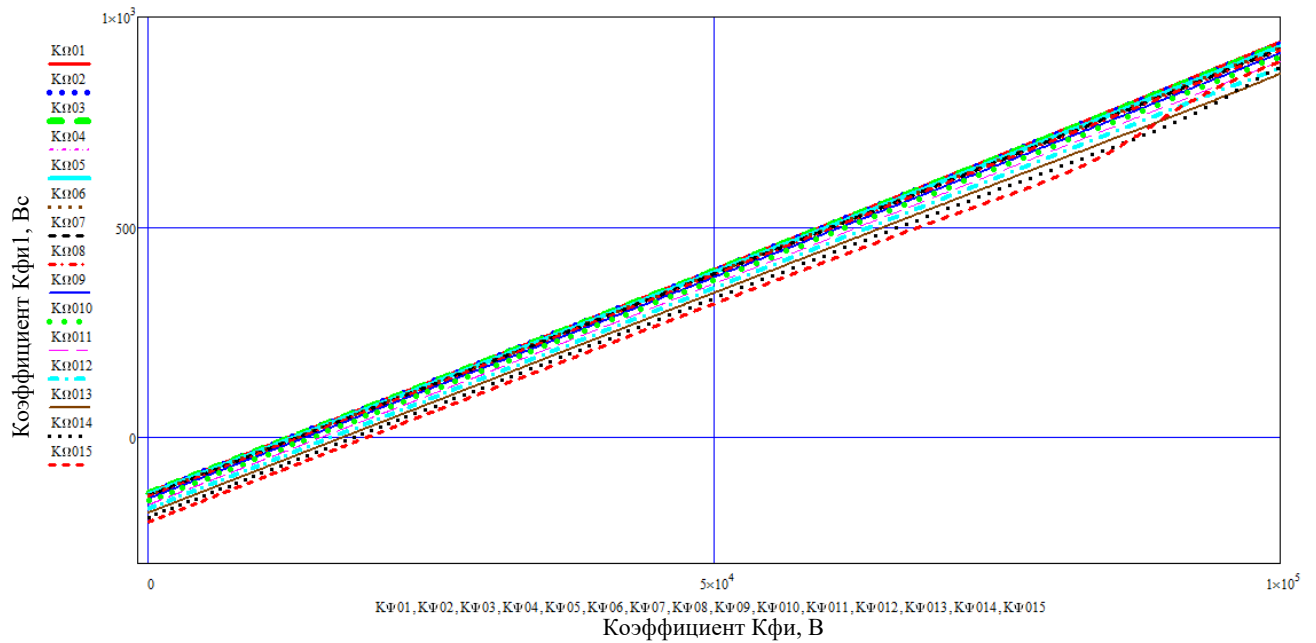


Рис. 9. Актуальный участок нижней границы области курсовой устойчивости при частотах 0–0.4 Гц и коэффициенте  $K_y = 0$  для автомобиля с «затвердевшим» грузом.

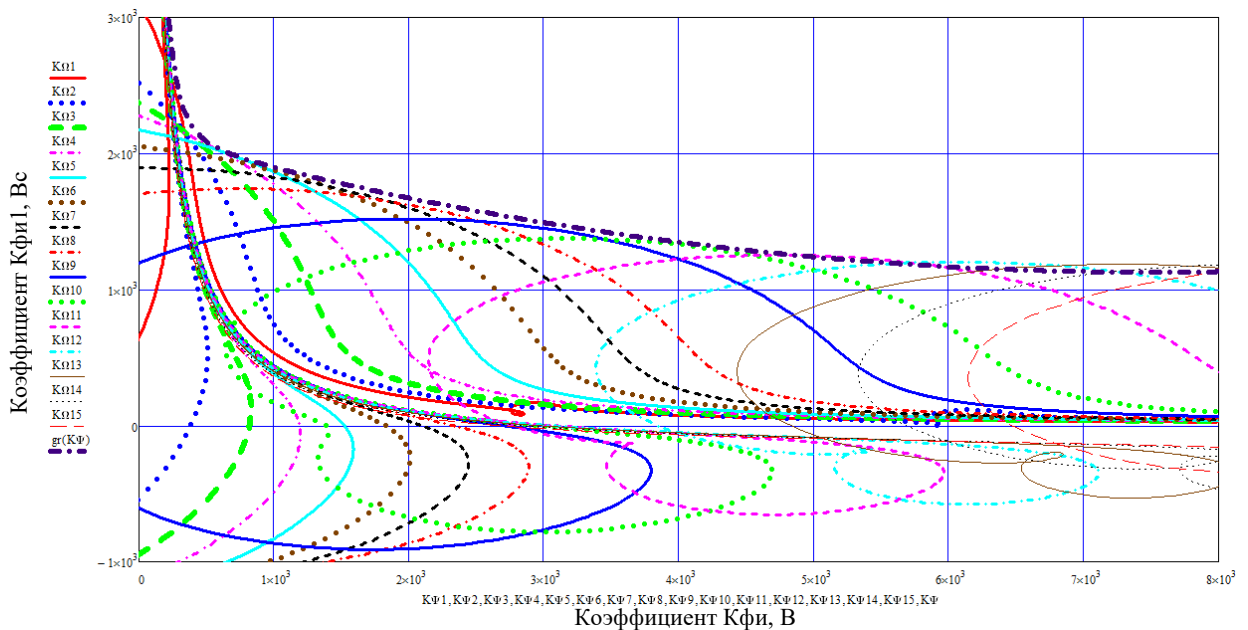


Рис. 10. Актуальный участок нижней границы области курсовой устойчивости при частотах 0–0.4 Гц и значении коэффициента  $K_y = 50 \text{Вм}^{-1}$ . Штрихпунктирная линия огибает все траектории сверху и создает указанную границу

иметь двухконтурный регулятор с рациональной настройкой коэффициентов усиления.

**Алгоритм и результаты исследования на этапе 2: двухконтурное регулирование.** Зафиксируем коэффициент  $K_y$  на некотором положительном уровне, и вместо (30) получим новые параметрические уравнения:

$$\begin{cases} K_\psi = \text{Re}[\Psi(\omega i)] \\ K_\omega = \text{Re}\left[\frac{\Psi(\omega i)}{\omega i}\right] + \frac{K_y V}{\omega^2} \end{cases} \quad (31)$$

Из содержания параметрических уравнений (31) можно понять, что коррекция области устойчивости будет выполняться только для диапазона малых частот, что подтверждается графиками (рис. 10).

На рис. 11, а графики функции  $K_\omega = \text{Gr}(K_\psi, K_y)$  описывают нижние пределы области устойчивости при разных значениях коэффициента  $K_y$  от 0 до  $100 \text{Вм}^{-1}$ , который соответствует возможностям используемого ЭМУ.

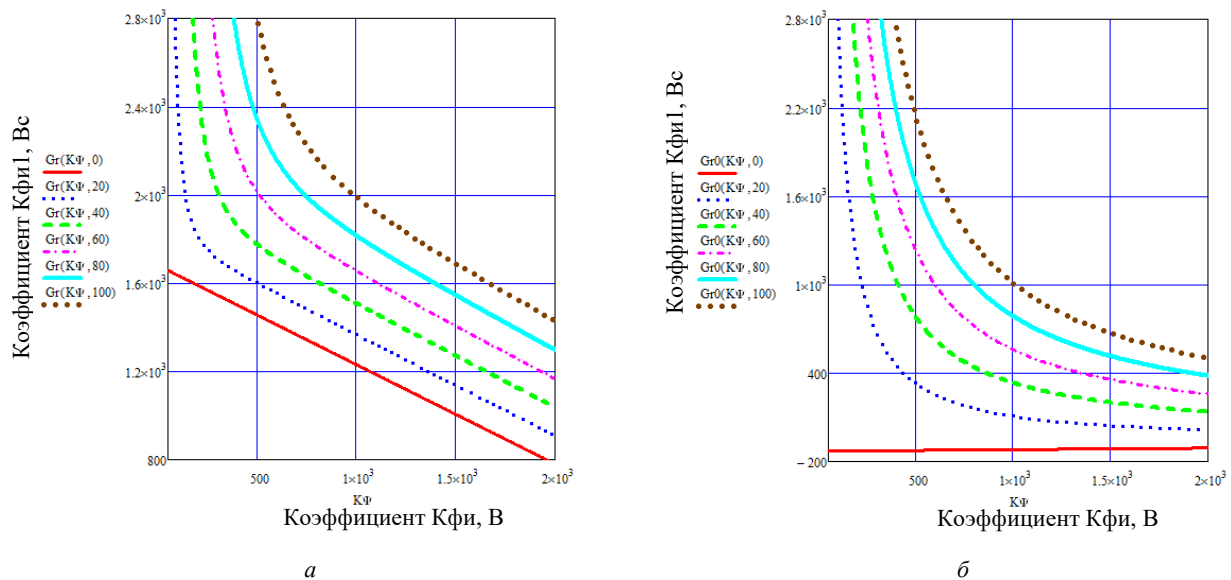


Рис. 11. Изменения нижней границы области устойчивости в зависимости от выбора интегрального коэффициента  $K_\gamma$ :  $a$  – для жидкого груза предел описывается  $K_\omega = Gr(K_\psi, K_\gamma)$ ;  $b$  – для «отвердевшего» груза граница описывается  $K_\omega = Gr0(K_\psi, K_\gamma)$

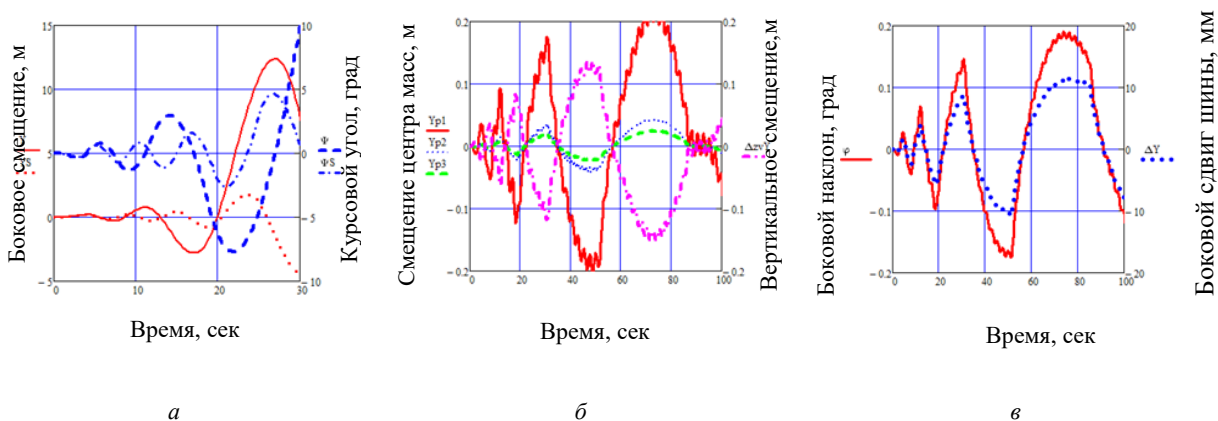


Рис. 12. Неустойчивый процесс движения при  $K_\psi = 1000B, K_\omega = 300Bs, K_\gamma = 50Bm^{-1}$ :  $a$  – изменение курсовых параметров (буква  $S$  соответствует «отвердевшему» грузу);  $b$  – колебания парциальных осцилляторов;  $c$  – боковые колебания корпуса автомобиля

Форма границы для «отвердевшего» груза задает новую линию тренда, ниже которой амплитуды колебаний курсовых параметров автомобиля носят растущий характер (рис. 12). В зазоре между соответствующими линиями, взятыми с графиков на рис. 11,  $a$  и рис. 11,  $b$  при одинаковых значениях, движение жидкости в цистерне представляет собой автоколебания малой амплитуды (рис. 13), а выше границы устойчивости все колебания затухают (рис. 14).

Графики функции  $K_\omega = Gr0(K_\psi, K_\gamma)$  на рис. 11,  $b$  описывают нижние границы области автоколебаний для автомобиля с жидким грузом в цистерне.

Расчеты (рис. 12–14) были выполнены с использованием математической модели, описанной ранее; для возмущения колебаний использовался одинаковый импульс давления  $\Delta P$  в системе управления тормозами, который имел треугольную форму.

Уровень жидкости в цистерне был выбран  $0.5\text{ м}$ , для которого максимальная скорость топливозаправщика КраЗ-63221 равна  $20\text{ м/с}$ . Этому уровню нагрузки и скорости на рис. 10 соответствует петля синего цвета с номером 9.

Как видим, при принятом для этих расчетов значениях коэффициентов  $K_\psi = 1000B, K_\gamma = 50Bm^{-1}$  линия тренда имеет ординату  $K_\omega = 400Bs$ , а на границе устойчивости имеем  $K_\omega = 1300Bs$ . Таким образом, данные, которые представлены на рис. 12–14, совпадают с теми, которые были получены при анализе характеристического уравнения, а проанализированные три переходные процесса, как это и предусматривалось теорией, действительно находятся в зоне неустойчивости, в зоне автоколебаний (где асимптотически неустойчивыми являются колебания жидкости) и в зоне асимптотической устойчивости движения исследуемой системы.

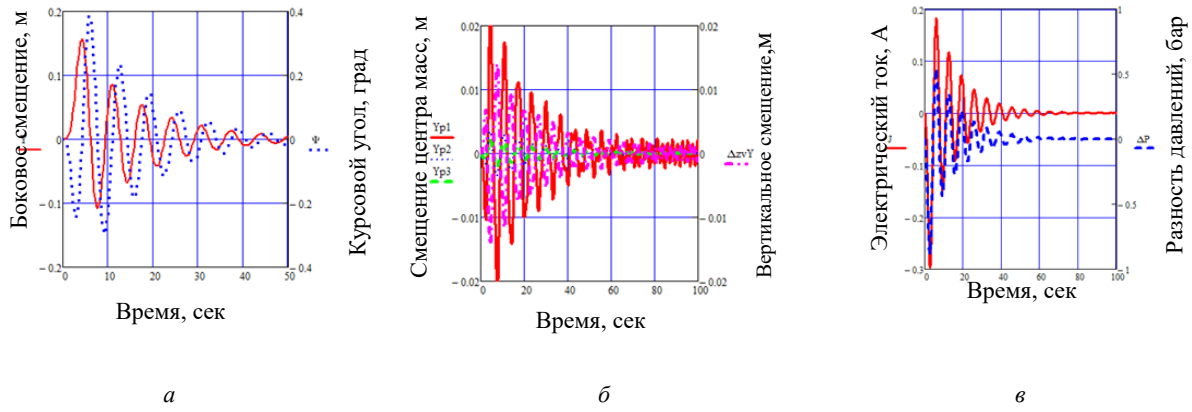


Рис. 13. Медленные переходные процессы при  $K_{\psi} = 1000\text{В}, K_{\omega} = 1000\text{Вс}, K_{\gamma} = 50\text{Вм}^{-1}$ : а – изменение курсовых параметров; б – колебания парциальных осцилляторов; в – колебания параметров регулятора

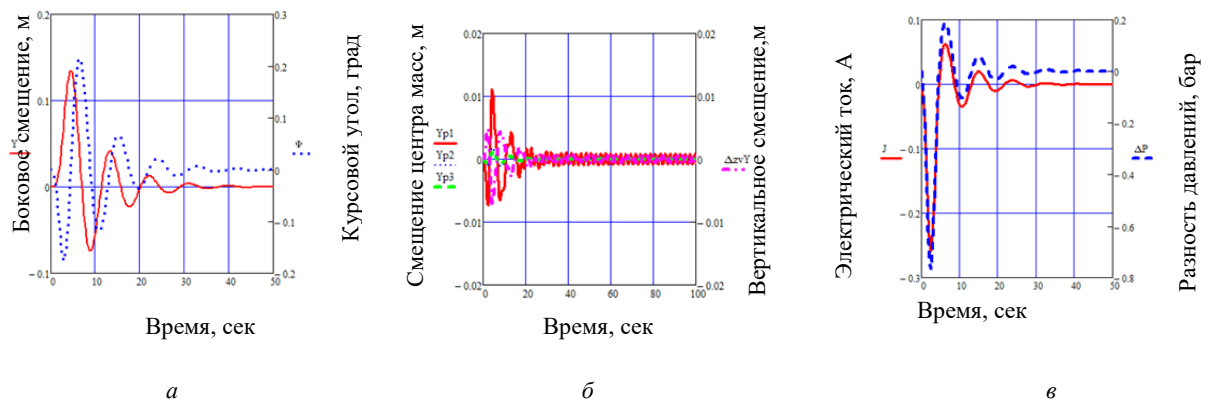


Рис.14. Быстрое восстановление курса при  $K_{\psi} = 1000\text{В}, K_{\omega} = 2000\text{Вс}, K_{\gamma} = 50\text{Вм}^{-1}$  а – изменение курсовых параметров; б – колебания парциальных осцилляторов; в – колебания параметров регулятора

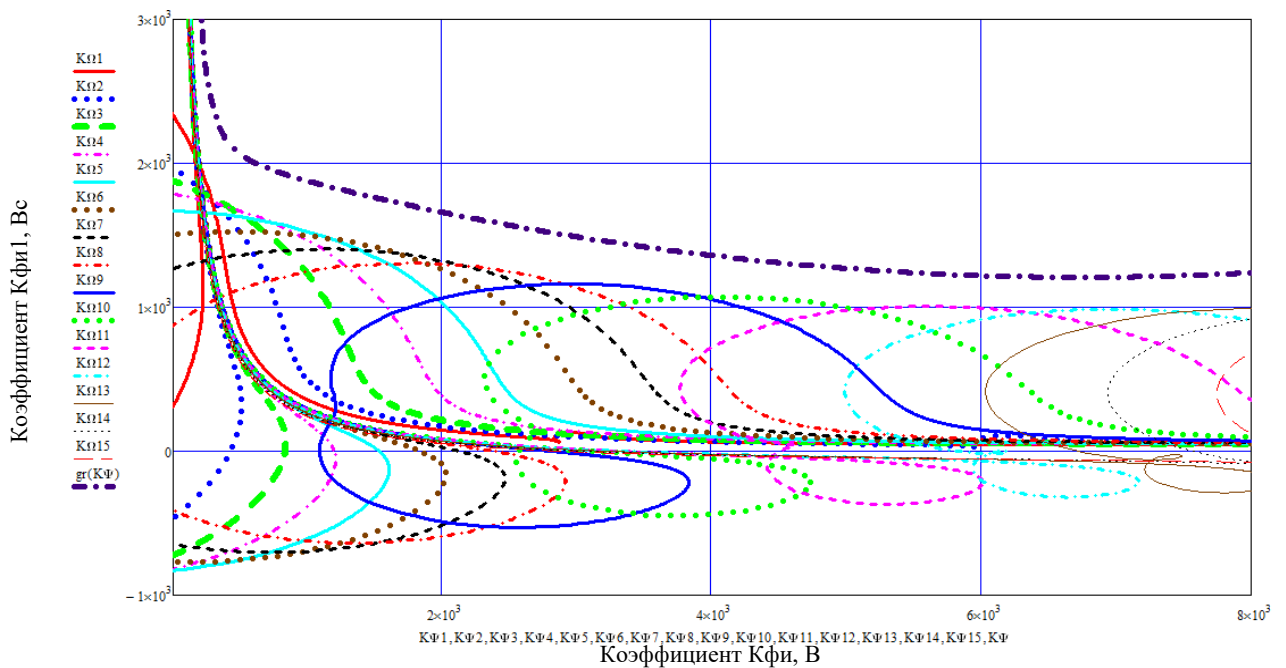


Рис.15. Актуальный участок нижней границы области курсовой устойчивости при частотах 0–0.4 Гц и значении  $K_{\gamma} = 50\text{Вм}^{-1}$ . Пре среднем уровне жидкости  $h_* = 0.7\text{м}$  скорость автомобиля снижена до 12м/с, а штрихпунктирная линия является границей области устойчивости для  $V_* = 18\text{м/с}$

На основе анализа результатов другого расчетного исследования (см. рис. 15) установлено, что увеличение курсовой скорости однозначно приводит к подъему нижней границы устойчивости движения, причем на втором этапе этот эффект усиливается за счет формул (21). Что позволяет при решении поставленной задачи исключить курсовую скорость  $V$  из числа варьированных параметров, а ее расчетное значение установить максимально возможным для принятого уровня загрузки цистерны автомобиля.

Поскольку разные точки предела курсовой устойчивости отвечают разным уровням жидкости  $h$ , необходимость рассматривать равные, выбранные со всего диапазона  $0 \dots H$ , остается неизменной и для второго этапа решения задачи. Иначе, ограничиваясь, как это принято, средним уровнем жидкости, можна допустить серьезные ошибки.

**Выводы.** Составлена математическая модель, описывающая возмущенное движение автомобиля с цистерной, которая позволяет учесть колебания свободной поверхности жидкости и определить их влияние на курсовую устойчивость автомобиля при стабильном движении и при экстренном торможении.

Разработан алгоритм построения характеристического уравнения для сложной системы дифференциальных уравнений, которое описывает динамические изменения параметров движения автомобиля с цистерной, колебания парциальных прослоек жидкости в цистерне и работу электромагнитного привода управляющего клапана и электронного ПИД-регулятора для двухконтурной системы обеспечения курсовой устойчивости.

Показано, что низкочастотные колебания свободной поверхности жидкости приводят к существенному сокращению области устойчивости замкнутой системы курсовой устойчивости автомобиля, что свидетельствует о необходимости учета таких колебаний при решении задач анализа и синтеза этой системы.

Установлено, что для автомобиля с цистерной, где происходят низкочастотные поперечные колебания жидкости, которые сопровождаются перераспределением массы и возбуждают движение, увеличение курсовой скорости однозначно приводит к ухудшению курсовой устойчивости. Что позволило исключить эту скорость из числа варьированных параметров и существенно упростить задачу.

Было выяснено, что уровень жидкости в цистерне, с учетом его связи с максимальной скоростью движения, оказывает неоднозначное влияние на курсовую устойчивость автомобиля, и ограничивать исследование только лишь расчетами для случая 50 % нагрузки недопустимо. Вместо этого традиционного упрощения нужно искать линию, которая огибает сверху те границы, которые соответствуют многим уровням жидкости из диапазона их изменений.

#### Список литературы

1. Tavernini D., Velenis E., Longo S. Feedback Brake Distribution Control for Minimum Pitch. *Vehicle System Dynamics*. 2017. Vol. 55, issue 6. pp. 902–923.

2. Fujimoto H., Harada S. Model-based Range Expansion Control System for Electric Vehicles With Front and Rear Driving-Braking Force Distribution. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2015. Vol. 62, issue 5. P. 3245–3254. doi: 10.1109/TIE.2015.2402634.
3. Gong X., Qian L., Ge W., Yan J. Research on Electronic Brake Force Distribution and Anti-Lock Brake of Vehicle Based on Direct Drive Electro Hydraulic Actuator. *International Journal of Automotive Engineering*. 2020. Vol. 11, no. 2. P. 22–29. doi: 10.20485/ijae.11.2.22.
4. Tavernini D., Velenis E., Longo S. Model-Based Active Brake Force Distribution for Pitch Angle Minimization. *IEEE 54th Conference on Decision and Control (December 15–18, 2015, Osaka)*. Osaka: IEEE, 2015. P. 197–202. doi: 10.1109/CDC.2015.7402108.
5. Nakamura E., Soga M., Sacai A., Otomo A., Kobayashi T. Development of Electronically Controlled Brake System for Hybrid Vehicle. *SAE 2002 World Congress (March 4–7, 2002, Detroit)*. Detroit: SAE, 2002. 6 p. doi: 10.4271/2002-01-0300.
6. Park G., Coi S. B. Optimal Brake Distribution for Electronic Stability Control Using Weighted Least Square Allocation Method. *16th International Conference on Control "Automation and Systems" (October 16–19, 2016, Gyeongju)*. Gyeongju: IEEE, 2016. pp. 1420–1425. doi: 10.1109/ICCAS.2016.7832492.
7. Xinyu Wu. Control Strategy and Algorithm Study on Light Vehicle Electronic Mechanical Braking System. *5th International Conference on Education, Management, Information and Medicine (April 24–26, 2015, Shenyang)*. Shenyang, 2015. P. 1453–1458. doi: 10.2991/emim-15.2015.282.
8. Her H., Cho W., Yi K. Vehicle Stability Control Using Individual Break Force Based on Tire Force Information. *14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (October 5–7, 2011, Washington)*. Washington: IEEE, 2011. P. 22–29.
9. Aleksandrov Y., Aleksandrova T., Morhun Y. Parametric Synthesis of the Electronic Control Unit of the Course Stability System of the Car. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. Vol. 6, no. 9 (102). P. 39–45.
10. Aleksandrov Y., Aleksandrova T., Kostianyk I., Morhun Y. Parametric Synthesis a Non-Stationary Automatic Control System of the Course Stability of the Car. *Сучасні Інформаційні Системи*. 2020. Т. 4, №. 2. С. 51–59. doi: 10.20998/2522-9052.2020.2.10.
11. Александров Е. Е., Александрова Т. Е., Костяник И. В., Моргун Я. Ю. Параметрический синтез цифровой системы курсовой устойчивости автомобиля. *Автомобіль і електроніка. Сучасні технології*. 2020. № 17. С. 69–76.
12. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Математичне моделювання низкочастотних коливань в'язкої рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. Харків: НТУ «ХПІ». 2018. № 3 (1271). С. 41–51.
13. Александров Е. С., Григор'єв О. Л., Моргун Я. Ю. Про вплив коливань верхньої поверхні транспортуємої рідини на курсову стійкість автомобіля, що оснащений цистерною з рідким наповнювачем. *Автомобіль і електроніка. Сучасні технології. Тези доповідей VII Міжнародної науково-технічної Інтернет-конференції (23–24 листопада 2020 р., Харків)*, Харків: ХНАДУ, 2020. С. 88–90.
14. Высоцкий М. С., Плесакевичский Ю. М., Шимановский А. О., Кузнецова М. Г. Обеспечение безопасности движения автоцистерн на основе оптимизации конструкции кузова. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2012. № 3 (20), № 4(21). С. 142–148.
15. Шимановский А. О. Конструктивные решения, обеспечивающие безопасность движения цистерн (обзор). *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 2009. № 1. С. 44–59.
16. Александров Е. С. Основы автомобильной автоматизации: навчально-методичний посібник. Харків: ХНАДУ, 2010. 172 с.

#### References (transliterated)

1. Tavernini D., Velenis E., Longo S. Feedback Brake Distribution Control for Minimum Pitch. *Vehicle System Dynamics*, 2017. Vol. 55, issue 6. pp. 902–923.
2. Fujimoto H., Harada S. Model-based Range Expansion Control System for Electric Vehicles With Front and Rear Driving-Braking Force Distribution. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*.

2015. Vol. 62, issue 5. pp. 3245–3254. doi: 10.1109/TIE.2015.2402634.
3. Gong X., Qian L., Ge W., Yan J. Research on Electronic Brake Force Distribution and Anti-Lock Brake of Vehicle Based on Direct Drive Electro Hydraulic Actuator. *International Journal of Automotive Engineering*. 2020. Vol. 11, no. 2. pp. 22–29. doi: 10.20485/jsaej.11.2.22.
  4. Tavernini D., Velenis E., Longo S. Model-Based Active Brake Force Distribution for Pitch Angle Minimization. *IEEE 54th Conference on Decision and Control (December 15–18, 2015, Osaka)*. Osaka, IEEE Publ., 2015. pp. 197–202. doi: 10.1109/CDC.2015.7402108.
  5. Nakamura E., Soga M., Sacai A., Otomo A., Kobayashi T. Development of Electronically Controlled Brake System for Hybrid Vehicle. *SAE 2002 World Congress (March 4–7, 2002, Detroit)*. Detroit, SAE Publ., 2002. 6 p. doi: 10.4271/2002-01-0300.
  6. Park G., Choi S.B. Optimal Brake Distribution for Electronic Stability Control Using Weighted Least Square Allocation Method. *16th International Conference on Control "Automation and Systems" (October 16–19, 2016, Gyeongju)*. Gyeongju: IEEE Publ., 2016, pp. 1420–1425. doi: 10.1109/ICCAS.2016.7832492.
  7. Xinyu Wu. Control Strategy and Algorithm Study on Light Vehicle Electronic Mechanical Braking System. *5th International Conference on Education, Management, Information and Medicine (April 24–26, 2015, Shenyang)*. Shenyang, 2015. pp. 1453–1458. doi: 10.2991/emim-15.2015.282.
  8. Her H., Cho W., Yi K. Vehicle Stability Control Using Individual Break Force Based on Tire Force Information. *14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (October 5–7, 2011, Washington)*. Washington, IEEE Publ., 2011. pp. 22–29.
  9. Alexandrov Y., Alexandrova T., Morhun Y. Parametric Synthesis of the Electronic Control Unit of the Course Stability System of the Car. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. Vol. 6, no. 9 (102). pp. 39–45.
  10. Alexandrov Y., Alexandrova T., Kostianyk I., Morhun Y. Parametric Synthesis of a Non-Stationary Automatic Control System of the Course Stability of the Car. *Suchasni Informatsiyini Systemy*. [Advanced Information Systems]. 2020. vol. 4, no. 2. pp. 51–59. doi: 10.20998/2522-9052.2020.2.10.
  11. Alexandrov Ye. Ye., Alexandrova T. Ye., Kostyanik I. V., Morhun Ya. Yu. Parametricheskii sintez tsifrovoy sistemy kursovoy ustoychivosti avtomobilya [Parametric synthesis of the digital system of course stability of the car]. *Avtomobil' i elektronika. Suchasni tekhnolohiyi* [Vehicle and electronics. The modern technologies]. 2020. no. 17. pp. 69–76.
  12. Kozhushko A. P., Hryhor'yev O. L. Matematychnye modelyuvannya nyz'kochastotnykh kolyvan' v'yazkoyi ridyny v horyzontal'niy yemnosti z vil'noyu poverkhneyu [Mathematical modeling of low-frequency oscillations of a viscous fluid in a horizontal container with a free surface]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Thematic issue: Mathematical modeling in machinery and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018. no. 3 (1271). pp. 41–51.
  13. Aleksandrov Ye. Ye., Hryhor'yev O. L., Morhun Ya. Yu. Pro vplyv kolyvan' verkh'noyi poverkhni transportuyemoyi ridyny na kursovu stiykist' avtomobilya, shcho osnashcheny tsystemoyu z ridkym napovnyuvachem [On the influence of oscillations of the upper surface of the transported liquid on the course stability of a car equipped with a tank with liquid filler]. *Avtomobil' i elektronika. Suchasni tekhnolohiyi. Tezy dopovidey VII Mizhnarodnoyi naukovotekhnichnoyi Internet-konferentsiyi (23–24 lystopada 2020 r., Kharkiv)* [Vehicle and electronics. The modern technologies. Theses of VII International scientific and technical Internet conference (23–24 November 2020, Kharkiv)], Kharkiv, KNAHU Publ., 2020. pp. 88–90.
  14. Vysockij M. S., Pleskachevskij Yu. M., Shimanovskij A. O., Kuznecova M. H. Obespechenie bezopasnosti dvizheniya avtotsistern na osnove optimizatsii konstruktivnykh kuzova [Ensuring the safety of road tankers based on optimization of the body structure]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms, and materials]. 2012. no. 3(20), no. 4(21). pp. 142–148.
  15. Shimanovskij A. O. Konstruktivnye resheniya, obespechivayushchie bezopasnost' dvizheniya tsistern (obzor) [Constructive solutions ensuring the safety of tank cars (overview)]. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii* [Mechanical engineering and automation problems]. 2009. no. 1. pp. 44–59.
  16. Aleksandrov Ye. Ye. *Osnovy avtomobil'noyi avtomatyky: navchal'no-metodychnyy posibnyk* [Fundamentals of automotive automation: a textbook]. Kharkiv: KNAHU Publ., 2010. 172 p.

Надійшло (received) 03.04.2021

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Александров Евгений Евгеньевич** – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, професор кафедри автомобілів ім. А. Б. Гредескула; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7525-6383>; e-mail: [aleksandrov.ye.ye@gmail.com](mailto:aleksandrov.ye.ye@gmail.com).

**Александрова Тетяна Євгенівна** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9596-0669>; e-mail: [aleksandrova.t.ye@gmail.com](mailto:aleksandrova.t.ye@gmail.com).

**Григор'єв Олександр Львович** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри вищої математики; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0155-1694>; e-mail: [kpi.mmtt@gmail.com](mailto:kpi.mmtt@gmail.com).

**Моргун Ярослав Юрійович** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7399-4937>; e-mail: [yarki95@gmail.com](mailto:yarki95@gmail.com).

**Александров Евгений Евгеньевич** – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, професор кафедри автомобілів ім. А. Б. Гредескула; г. Харьков, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7525-6383>; e-mail: [aleksandrov.ye.ye@gmail.com](mailto:aleksandrov.ye.ye@gmail.com).

**Александрова Татьяна Евгеньевна** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій; г. Харьков, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9596-0669>; e-mail: [aleksandrova.t.ye@gmail.com](mailto:aleksandrova.t.ye@gmail.com).

**Григорьев Александр Львович** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор вищої математики; г. Харьков, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0155-1694>; e-mail: [kpi.mmtt@gmail.com](mailto:kpi.mmtt@gmail.com).

**Моргун Ярослав Юрьевич** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант, г. Харьков, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7399-4937>; e-mail: [yarki95@gmail.com](mailto:yarki95@gmail.com).

**Aleksandrov Yevgen Yevgenovich** – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, professor of the Department of Automobiles named after A. B. Hredeskul; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7525-6383>; e-mail: [aleksandrov.ye.ye@gmail.com](mailto:aleksandrov.ye.ye@gmail.com).

**Aleksandrova Tetyana Yevhenivna** – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", professor of the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9596-0669>; e-mail: [aleksandrova.t.ye@gmail.com](mailto:aleksandrova.t.ye@gmail.com).

**Grigoriev Alexander Lvovich** – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", professor of the Department of Higher Mathematics; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0155-1694>; e-mail: [kpi.mmtt@gmail.com](mailto:kpi.mmtt@gmail.com).

**Morghun Yaroslav Yuriyovich** – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Postgraduate Student, Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7399-4937>; e-mail: [yarki95@gmail.com](mailto:yarki95@gmail.com).