

В. И. ТОВАЖНЯНСКИЙ

АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕРЫВИСТЫМ ТЕПЛОВЫМ РЕЖИМОМ ЗДАНИЙ

Рассматривается актуальная задача синтеза оптимального закона управления режимом прерывистого отопления офисных зданий, заключающегося в программном снижении температуры помещений во внерабочее время. Проведенный анализ источников информации показал отсутствие в достаточной мере обоснованных методов решения задачи оптимизации тепловых процессов зданий, обеспечивающих комфортные условия функционирования персонала с одной стороны и экономию расходов на их поддержание, с другой стороны. Сформулирована постановка задачи оптимального управления тепловым состоянием здания, содержащая математическую модель процесса, цель управления, ограничения на управляющие воздействия и интегральный квадратичный критерий качества, включающий отклонения температуры помещения от заданной программы и расхода теплоты. Ограничение по управляющему воздействию учтено методом штрафных функций. В качестве математической модели оптимизируемого теплового процесса принята двумерная управляемая система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, величины которых определяются на основе критериев подобия зданий, что позволяет решать задачу оптимизации в безразмерной форме. Модель включает управляющее воздействие – подводимый тепловой поток и возмущающее воздействие – температуру окружающей среды, изменяющуюся по заданному гармоничному закону. Численное решение задачи оптимального управления реализовано методом последовательных приближений Черноушко. Приведено описание интерфейса пользователя, а также примеры реализации оптимального управления тепловым состоянием. Предложенное программное обеспечение позволяет на этапе проектирования системы теплоснабжения получать экспресс-оценки различных тепловых режимов здания, а также может быть использовано в качестве компьютерного обеспечения автоматизированных индивидуальных тепловых пунктов.

Ключевые слова: режим прерывистого отопления, оптимальное управление, математическая модель, критерий качества управления, ограничения на управление, штрафная функция, последовательные приближения, интерфейс программы, автоматизированный индивидуальный тепловой пункт.

В. І. ТОВАЖНЯНСЬКИЙ

АЛГОРИТМІЧНЕ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ПЕРЕРИВЧАСТИМ ТЕПЛОВИМ РЕЖИМОМ БУДІВЕЛЬ

Розглядається актуальна задача синтезу оптимального закону керування режимом переривчастого опалення офісних будівель, яка полягає в програмному зниженні температури приміщень у позаробочий час. Проведений аналіз джерел інформації показав відсутність в достатній мірі обґрунтованих методів розв'язання задачі оптимізації теплових процесів будівель, що забезпечують комфортні умови функціонування персоналу з одного боку і економію витрат на їх підтримку, з іншого боку. Сформульовано постановку задачі оптимального керування тепловим станом будівлі, яка містить математичну модель процесу, мету управління, обмеження на дії і інтегральний квадратичний критерій якості, що включає відхилення температури приміщення від заданої програми і витрати теплоти. Обмеження по керуючому впливу враховано методом штрафних функцій. В якості математичної моделі теплового процесу, що оптимізується, прийнята двовимірна керована система диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, величини яких визначаються на основі критеріїв подібності будівель, що дозволяє вирішувати задачу оптимізації у безрозмірній формі. Модель включає управлінський вплив – теплової потік, що підводиться, і збурення – температуру навколишнього середовища, що змінюється по заданому гармонійному закону. Чисельне рішення задачі оптимального управління реалізовано методом послідовних наближень Черноушко. Наведено опис інтерфейсу користувача, а також приклади реалізації оптимального управління тепловим станом. Запропоноване програмне забезпечення дозволяє на етапі проектування системи теплостачання отримувати експрес-оцінки різних теплових режимів будівлі, а також може бути використано в якості комп'ютерного забезпечення автоматизованих індивідуальних теплових пунктів.

Ключові слова: режим переривчастого опалення, оптимальне управління, математична модель, критерій якості управління, обмеження на управління, штрафна функція, послідовні наближення, інтерфейс програми, автоматизований індивідуальний тепловий пункт.

V. I. TOVAZHNYANSKYI

ALGORITHMS AND SOFTWARE OF BUILDINGS INTERMITTENT THERMAL CONDITIONS OPTIMAL CONTROL

The actual problem of synthesizing the optimal control law for the intermittent heating mode of office buildings is considered, which consists in the programmed reduction of the room temperature during off-hours. The analysis of information sources showed the absence of sufficiently justified methods for solving the problem of optimizing the thermal processes of buildings, which provide comfortable conditions for the functioning of personnel, on the one hand, and save costs for buildings maintenance, on the other hand. The statement of the building thermal state optimal control problem is formulated, which contains a mathematical model of the process, a control goal, constraints on control actions and an integral quadratic quality criterion, including deviations of the room temperature from a given program and heat consumption. The limitation on the control action is taken into account by the method of penalty functions. As a mathematical model of the optimized thermal process, a two-dimensional controlled system of differential equations with constant coefficients is applied. The values of these coefficients are determined on the basis of building similarity criteria, which allows solving the optimization problem in a dimensionless form. The model includes a control action - the supplied heat flux, and a disturbing action - the ambient temperature, changing according to a given harmonious law. The numerical solution of the optimal control problem is implemented by the Chernous'ko method of successive approximations. A description of the user interface is given, as well as examples of the implementation of the thermal state optimal control. The proposed software allows on the stage of designing the heating system to obtain express assessments of various thermal modes of the building, and can also be used as computer support for automated individual heating points.

Keywords: intermittent heating mode, optimal control, mathematical model, control quality criterion, control constraints, penalty function, successive approximations, program interface, automated individual heating point.

Введение. Эффективное теплоснабжение жилых, производственных и офисных помещений является одной из основных проблем Украины имеющей

первостепенное социальное, экономическое и политическое значение. Эффективность теплоснабжения можно оценить двумя компромиссными критериями:

© В. И. Товажнянский, 2021

расходом тепловой энергии и температурным режимом помещений. Противоречие заключается в том, что экономия тепловой энергии приводит к снижению температуры внутри помещений, т. е. нарушению условий, обеспечивающих комфортное существование человека. Данное противоречие в условиях централизованной системы теплоснабжения с качественным регулированием отпуска теплоты по температурному графику приводит к дисбалансу в количестве потребляемой тепловой энергии и условий комфортности внутри помещений различных зданий, и времени суток.

Одним из путей комплексного решения указанной проблемы, является локальная децентрализация теплоснабжения на основе оснащения многоэтажных строений автоматизированными индивидуальными тепловыми пунктами (АИТП). На АИТП возлагается функция поддержания заданной температуры внутри помещения в зависимости от конструктивных параметров здания внешних погодных условий и параметров теплоносителя, генерируемого центральной котельной установкой.

Для большинства офисных и производственных зданий, театров, школ и т. д. с целью экономии расходов теплоты в течение части суток допускается некоторое снижение температуры помещений ниже нормативного значения. Такой режим «прерывистого» отопления позволяет экономить расходы теплоты при выполнении требований по комфортности в заданных интервалах суток.

Таким образом, возникает задача управления теплоподводом к зданию, обеспечивающего близкое к программному изменение температуры помещения при минимальных затратах тепловой энергии. Решение этой актуальной задачи и составляет цель настоящего исследования.

Обзор и анализ источников информации.

Одним из эффективных методов, направленным на экономию тепловой энергии, является снижение или полное отключение подачи теплоносителя в производственные или офисные здания в нерабочее время, и восстановление к моменту начала рабочего дня комфортного температурного режима помещений восстанавливается. Анализ источников информации [1–4] дает основание предполагать, что режим прерывистого отопления (РПО) позволяет экономить тепловую энергию до 35% в год. Очевидно, что РПО может быть реализован только на АИТП, поскольку здания имеют различные статические и динамические характеристики.

В работах [2–9] рассмотрены некоторые подходы к реализации РПО, а также оценке его энергоэффективности, основанные на математическом и компьютерном моделировании процессов теплоснабжения зданий. Несмотря на высокий научный уровень этих исследований им, как и любым другим научным исследованиям, присущ ряд допущений и недостатков. Так в основополагающей работе [2] при рассмотрении процесса разогрева здания или натопа не учитываются динамические характеристики ограждений и внутренних аккумулирующих элементов (перегородок,

мебели, оборудования и пр.). В то же время, нетрудно убедиться в том, что постоянная времени процесса нагревания внутреннего воздуха пренебрежимо мала по сравнению с постоянными времени тепловых процессов ограждений и внутренних аккумуляторов теплоты. Таким образом, быстродействие процесса натопа определяется не нагреванием воздуха, а нагревом конструктивных элементов здания. Этот недостаток также отмечается авторами [3], которые попытались сформулировать алгоритм прерывистого отопления, как задачу оптимального управления по критерию экономии тепловой мощности на заданном временном интервале. Следует отметить ряд неточностей в [3] при постановке задачи оптимального управления. Так минимальная мощность системы отопления в процессе управления определяется как мощность обеспечивающая температуру внутреннего воздуха на уровне 12°C. В то же время, выполнение этого условия осуществляется при различных мощностях системы отопления в зависимости от внешних условий. Кроме того, совершенно необоснованным выглядит утверждение о равенстве интервалов минимальной и максимальной мощностей системы отопления. На интуитивном уровне режим прерывистого управления, соответствующий основным положениям теории оптимального управления, описан в работе [4]. Из всех работ в этом направлении можно выделить исследование [5], в котором наиболее удачно отражены основные ключевые моменты постановки задачи оптимального управления РПО. Так в [5] в качестве математической модели процесса рассматривается конечномерная модель теплопроводности через многослойное ограждение, а также сосредоточенные динамические модели внутреннего воздуха и перегородок здания. Несколько неточным представляется выбор минимизируемого функционала, включающего квадратичную штрафную функцию на правом конце от температуры внутреннего воздуха. Дело в том, что требуемая температура воздуха может быть достигнута и тогда, когда все остальные температуры, определяющие полный вектор состояния системы будут иметь значения, отличные от номинальных значений, что приведет к последующему изменению температуры воздуха в помещении. Кроме того применение прямых методов оптимизации вряд ли следует признавать оправданным, поскольку приводит к нахождению локального экстремума. Это привело к ошибочному результату, в то время как принцип максимума для данной постановки задачи дает очевидное решение на границах области допустимых управлений [6].

В работе [6] на основе упрощенной математической модели тепловых процессов зданий, полученной в предположении больших различий в постоянных времени нагрева (охлаждения) внешнего ограждения, внутреннего заполнения и внутреннего воздуха на основе принципа максимума получены оптимальные законы управления тепловой мощностью системы отопления, позволяющие оптимизировать тепловую эффективность режима прерывистого отопления. Полученные результаты по экономии

теплоты на множестве параметров, характеризующих РПО, подтвердили снижение расходов теплоты на 1,5–20% по сравнению с соответствующим стационарным режимом. Т. е. экономия теплоты в период снижения уровня тепловой мощности выше чем ее расход в период последующего выхода на стационарный режим. Существенным недостатком работы [6] можно считать пренебрежение аккумулярующими качествами внутренних перегородок, а также предположении об отсутствии суточного изменения температуры окружающего воздуха.

Таким образом, целью настоящей работы является синтез оптимального закона управления тепловой мощностью с учетом приведенных выше недостатков.

Постановка задачи исследования. Будем характеризовать РПО здания программной функцией переключения (ПФП), предоставляющей собой желаемый температурный график изменения температуры помещения $T_b^*(t)$.

ПФП имеет структуру периодической функции, состоящей из последовательности прямоугольных импульсов с заданными максимальным \bar{T}_b и минимальным \underline{T}_b уровнями температуры воздуха помещения.

$$T_b^*(t) = \begin{cases} \bar{T}_b & \text{при } \varphi(t) = 1, \\ \underline{T}_b & \text{при } \varphi(t) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ – временная функция переключений режимов прерывания отопления

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } \forall t \in (T_b^*(t) = \bar{T}_b), \\ 0 & \text{для } \forall t \in (T_b^*(t) = \underline{T}_b). \end{cases} \quad (2)$$

В качестве математической модели теплового процесса здания будем рассматривать модель в безразмерных параметрах подобия и времени [10], имеющей вид:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\vartheta} &= -bT + \rho T_a + q + cT_{oc}, \\ \frac{dT_a}{d\vartheta} &= \zeta T - \zeta d T_a + \zeta q + \zeta \omega T_{oc}, \\ T_b &= a(q + T + \rho T_a + \omega T_{oc}), \end{aligned} \quad (3)$$

где T , T_a , T_b и T_{oc} – температуры внешнего ограждения, внутренних перегородок, внутреннего воздуха и окружающей среды соответственно.

Коэффициенты в системе уравнений (3) вычисляются в виде

$$\begin{aligned} a &= (1 + \rho + \omega), \quad b = 1 + 2(\rho + \omega), \\ c &= 1 + \rho + 2\omega, \quad d = 1 + \omega. \end{aligned} \quad (4)$$

$\vartheta = t/\tau/(1 + \rho + \omega)$ – безразмерное время, τ – постоянная времени внешнего ограждения, ρ – отношение тепловых сопротивлений ограждения и внутренних перегородок, ω – отношение тепловых сопротивлений ограждения и остекления, ζ – отношение постоянных времени ограждения и перегородок, q – тепловой поток отопительных приборов, выраженный в перепаде температур на тепловом сопротивлении внешнего ограждения.

Как видно из (3) и (4), математическая модель исследуемого теплового процесса представляет собой линейную стационарную систему дифференциальных уравнений 2-го порядка, со скалярными управлением $q(t)$ и возмущением $T_{oc}(t)$.

Критерий качества управляемого процесса выберем в виде

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [(T_b - T_b^*)^2 + \mu q^2] dt, \quad (5)$$

где μ – весовой коэффициент.

Критерий (5) учитывает два первичных критерия: точность выполнения заданной программы T_b^* по температуре воздуха в помещении, и затраты тепловой энергии на ее выполнение.

Изменение температуры окружающей среды в первом приближении будем предполагать гармоническим:

$$T_{oc}(\vartheta) = \bar{T}_{oc} + \Delta T \sin \Omega \vartheta \quad (6)$$

где круговая частота Ω определяется соотношением между реальным t и безразмерным ϑ временем

$$\Omega = 2\pi l,$$

где l – количество суток в интервале, соответствующем единице безразмерного времени ϑ .

В качестве ограничений будем рассматривать ограничение на максимальную тепловую мощность

$$0 \leq q \leq q_{\max}. \quad (7)$$

Таким образом, необходимо найти закон управления $q(t)$, удовлетворяющий ограничению (7) и минимизирующий критерий (5).

Синтез оптимального закона управления. Для решения поставленной задачи воспользуемся стандартной процедурой принципа максимума [11]. Представление задачи оптимизации как задачи со свободным правым концом позволяет воспользоваться одним из самых эффективных методов численного решения задачи оптимизации управления методом Черноусько [12]. Ограничение на управление (7) учитывалось методом штрафных функций. В качестве штрафной функции была выбрана функция вида

$$\Phi(q) = \left(\frac{2q - q_{\max}}{q_{\max}} \right)^{2M}, \quad (8)$$

где M – большое положительное целое число.

Включение дифференцируемой штрафной функции (8) в критерий качества (5) позволило решать задачу максимизации гамильтониана простыми аналитическими методами отыскания безусловного экстремума.

Начальные условия для интегрирования системы (3) в прямом времени выбирались исходя из статической модели

$$\begin{aligned} T(t_0) &= \frac{1}{2}(T_b^*(t_0) - T_{oc}(t_0)), \\ T_a(t_0) &= T_b^*(t_0), \end{aligned}$$

с последующим итерационным уточнением по соответствию начальных и конечных значений

$T(t_0) = T(t_1)$, $T_a(t_0) = T_a(t_1)$ в силу периодичности программной функции $T_B^*(t)$ и возмущающего воздействия $T_{oc}(t)$.

Программное обеспечение. Для решения задач оптимизации прерывистого режима процесса отопления разработано и реализовано программное обеспечение, основанное на итерационном методе последовательных приближений. Программа позволяет решать задачу оптимизации для произвольного набора параметров подбора здания, требований к суточной программе изменения температуры, к параметрам закона изменения температуры окружающей среды, а также максимально допустимой величине тепловой мощности. Основной интерфейс программы представлен на рис. 1

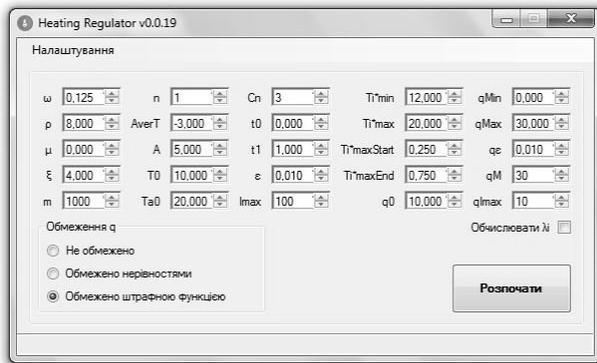


Рис. 1. Основной интерфейс

Кроме перечисленных параметров расчетного РПО необходимо ввести ряд параметров, регулирующих сходимость процесса оптимизации таких как степень штрафной функции M , стартовые значения температур охлаждения и перегоронок, точность замыкания цикла РПО по начальным и конечным значениям температур, шаг интегрирования и ряд других параметров.

Программа имеет режим настроек, позволяющий выводить на экране необходимые графики, выбирать язык интерфейса, а также размеры графиков.

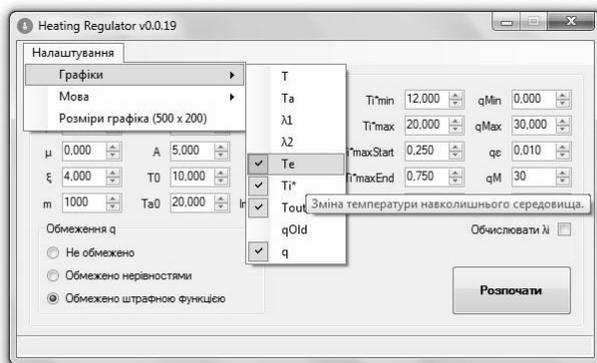


Рис. 2. Меню настроек программы

Результаты вычислений заносятся в электронную таблицу рис. 3, а также представлены в виде графиков рис. 4–7.

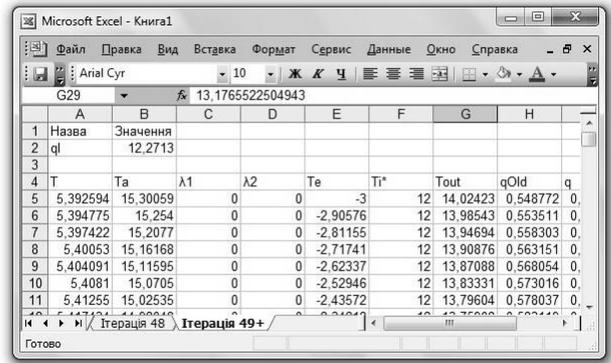


Рис. 3. Меню настроек программы

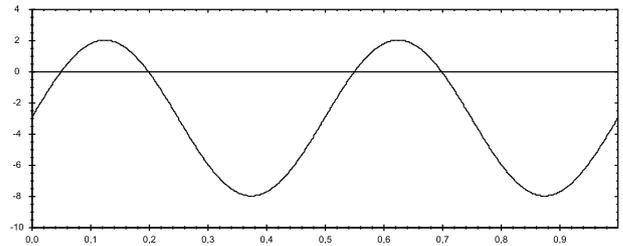


Рис. 4. График изменения температуры окружающей среды

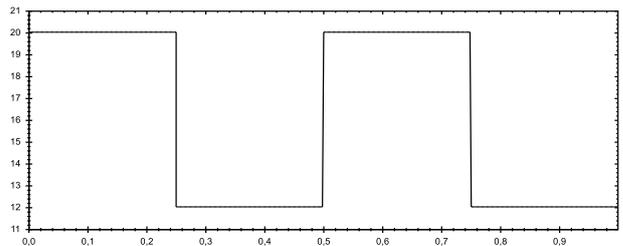


Рис. 5. Температурная программа РПО

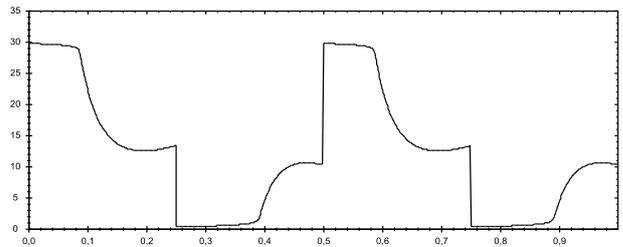


Рис. 6. Оптимальный режим изменения тепловой мощности при РПО

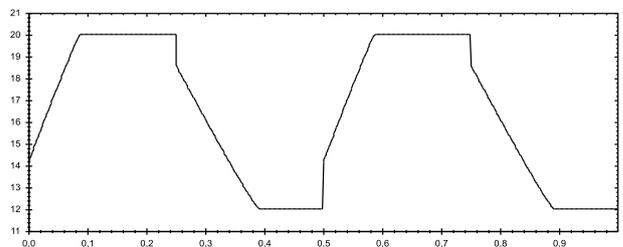


Рис. 7. График изменения температуры помещений

Заключение. Предложенное в работе программное обеспечение позволяет получать экспресс-оценки эффективности РПО. Высокая скорость вычислений, а

также наглядный интерфейс с широкими возможностями представления результирующей информации позволяют пользоваться настоящей программой на этапе предварительного выбора параметров конструируемого помещения, обеспечивающего наилучшие сочетания параметров подобия здания по критериям комфортности и энергоэффективности. Полученные результаты компьютерного моделирования ориентированы на использование в автоматизированных индивидуальных пунктах.

Список літератури

1. Чекинато Л., Гастальделло А., Скибуола Л. Современная система управления температурным режимом отапливаемых помещений. *Энергосбережение*. 2007. № 6. С. 74–78.
2. Табуншиков Ю. А., Бродач М. М. Математическое моделирование и оптимизация тепловой эффективности зданий. Москва: АВОК-ПРЕСС, 2002. 194 с.
3. Панферов В. И., Анисимова Е. Ю. Анализ возможности экономии тепловой энергии при прерывистом режиме отопления. *Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура»*. 2008. Вып. 6, № 12. С. 30–37.
4. Гершкович В. Ф. О возможности практической реализации регулирования теплоснабжения зданий методом периодического прерывания потока теплоносителя. *Новости теплоснабжения*. 2000. № 10. С. 16–23.
5. Васильев Г. П., Личман В. А., Песков Н. В. Численный метод оптимизации прерывистого режима отопления. *Математическое моделирование*. 2010. Том 22, № 11. С. 123–130.
6. Куценко А. С., Коваленко С. В., Товажнянский В. И. Анализ энергоэффективности прерывистого режима отопления здания. *Ползуновский вестник*. Барнаул: Из-во Алтайского государственного технического университета им. И. И. Ползунова. 2014. № 1. С. 75–82.
7. Анисимова Е. Ю. Энергоэффективность теплового режима здания при использовании оптимального режима прерывистого отопления. *Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура»*. 2017. Вып. 15. С. 55–59.
8. Дацок Т. А., Ивлев Ю. П., Пухкал В. А. Моделирование теплового режима жилых помещений при прерывистом отоплении. *Современные проблемы науки и образования*. 2017. № 5. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=14698> (дата обращения: 10.04.2021)
9. Мишин М. А. Тепловой режим зданий. *Ползуновский вестник*. Барнаул: Из-во Алтайского государственного технического университета им. И. И. Ползунова. 2011. № 1. С. 104–115.
10. Куценко А. С., Товажнянский В. И. Комбинированная система автоматического управления тепловым состоянием здания с прогнозирующей моделью. *Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПИ»: зб. наук. пр. Сер.: Системний аналіз, управління та інформаційні технології*. Харків: НТУ «ХПИ», 2017. № 51(1272). С. 3–7.
11. Болтянский В. Г. *Математические методы оптимального управления*. Москва: Наука, 1966. 308 с.
12. Черноусько Ф. Л. *Вариационные задачи механики и управления*. Москва: Наука, 1973. 238 с.

References (transliterated)

1. Ceckinato L., Gastaldello A., Skibuola L. Sovremennaya sistema upravleniya temperaturnym rezhimom otaplivaemykh pomeshchenii

[Modern control system for the temperature mode of heated rooms]. *Energoberezhnie* [Energy saving], 2007, no. 6, pp. 74–78 p.

2. Tabunshchikov Yu. A., Brodach M. M. *Matematicheskoe modelirovaniye i optimizatsiya teplovoi effektivnosti zdaniy* [Mathematical modeling and optimization of thermal efficiency of buildings]. Moskva : AVOK-PRESS Publ., 2002. 194 p.
3. Panferov V. I., Anisimova E. Yu. Analiz vozmozhnosti ekonomii teplovoi energii pri preryvistom rezhime otopeniya [Analysis of the possibility of saving thermal energy with intermittent heating]. *Vestnik YuUrGU. Seriya "Stroitel'stvo i arkhitektura"* [Bulletin of SUSU. Series "Construction and Architecture"], 2008, issue 6, no 12, pp. 30–37.
4. Gershkovich V. F. O vozmozhnosti prakticheskoi realizatsii regulirovaniya teplopotrebleniya zdaniy metodom periodicheskogo preryvaniya potoka teplonositelya [On the possibility of practical implementation of the regulation of heat consumption in buildings by the method of periodic interruption of the heat carrier flow.]. *Novosti teplosnabzheniya* [Heat supply news], 2000, no 10, pp. 16–23.
5. Vasil'ev G. P., Lichman V. A., Peskov N. V. Chislennyi metod optimizatsii preryvistogo rezhima otopeniya [Numerical optimization method for intermittent heating]. *Matematicheskoe modelirovaniye* [Mathematical modeling], 2010, issue 22, no 11, pp. 123–130.
6. Kutsenko A. S., Kovalenko S. V., Tovazhnyanskyy V. I. Analiz energoeffektivnosti preryvistogo rezhima otopeniya zdaniya [Energy efficiency analysis of intermittent heating of a building]. *Polzunovskii vestnik* [Polzunovsky Bulletin]. Barnaul: Polzunov Altai State Technical University Publ., 2014, no 1. pp. 75–82.
7. Anisimova E. Yu. Energoeffektivnost' teploвого rezhima zdaniya pri ispol'zovaniya optimal'nogo rezhima preryvistogo otopeniya [Energy efficiency of the thermal regime of the building using the optimal intermittent heating regime]. *Vestnik YuUrGU. Seriya "Stroitel'stvo i arkhitektura"* [Bulletin of SUSU. Series "Construction and Architecture"], 2017, no. 15, pp. 55–59.
8. Datsyuk T. A., Ivlev Yu. P., Pukhkal V. A. Modelirovaniye teploвого rezhima zhilykh pomeshchenii pri preryvistom otopenii [Modeling the thermal mode of residential buildings with intermittent heating]. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern problems of science and education]. 2017, no 5. Available at: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=14698> (accessed 10.04.2021).
9. Mishin M. A. Teplovoi rezhim zdaniy [Thermal mode of buildings]. *Polzunovskii vestnik* [Polzunovsky Bulletin]. Barnaul: Polzunov Altai State Technical University Publ., 2011, no 1. pp. 104–115.
10. Kutsenko A. S., Tovazhnyanskyy V. I. Kombinirovannaya sistema avtomaticheskogo upravleniya teplovym sostoyaniem zdaniya s prognoziruyushchei model'yu [Combined system of automatic control of the thermal state of a building with a predictive model]. *Vestnik Nats. tekhn. un-ta "KhPI": sb. nauch. tr. Temat. vyp.: Sistemnyy analiz, upravlenie i informatsionnyye tekhnologii* [Bulletin of the National Technical University "KhPI": a collection of scientific papers. Thematic issue: System analysis, management and information technology]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2017, no. 51 (1272), pp. 3–7.
11. Boltyanskii V. G. *Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya* [Optimal control mathematical methods]. Moscow: Nauka Publ., 1966. 308 p.
12. Chernous'ko F. L. *Variatsionnyye zadachi mekhaniki i upravleniya* [Variational problems of mechanics and control]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 238 p.

Поступила (received) 22.04.2021

Відомості про автора / Сведения об авторе / About the Author

Товажнянський Володимир Ігорович – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант; м. Харків, Україна; ORCID: 0000-0002-8293-4047; e-mail: vtovazhnianskyi@gmail.com.

Товажнянский Владимир Игоревич – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», аспирант; г. Харьков, Украина; ORCID: 0000-0002-8293-4047; e-mail: vtovazhnianskyi@gmail.com.

Tovazhnyanskyy Vladimir Igorovich – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", graduate student; Kharkiv, Ukraine; ORCID: 0000-0002-8293-4047; e-mail: vtovazhnianskyi@gmail.com