

*Т. А. ЗАЙЦЕВА, І. І. ШМЕЛЬОВ*

### СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ВТИСНЕННЯ ДВОЗВ'ЯЗНОГО ШТАМПУ В ПРУЖНИЙ ПІВПРСТІР

Робота присвячена розв'язанню задачі про вдавнення в пружний півпростір циліндричного штампу з плоскою основою під дією вертикальної сили, лінія дії якої проходить через центр основи. Поперечний перетин штампу займає двозв'язну область, обмежену двома концентричними лініями. Зроблено стислий огляд методів розв'язання задачі аналізу контактної взаємодії між циліндричним штампом та пружним півпростором. Застосовано розв'язок задачі у вигляді розкладення за малим параметром для випадка коли рівняння граничних кривих залежать від одного і того ж малого параметра. Для цього у кожному наближенні задача про вдавнення штамп з двозв'язною площадкою контакту у формі некругового кільця зводиться до аналогічної задачі про вдавнення штамп з площадкою контакту у формі кругового кільця. Розроблено програмне забезпечення на мові Java для обробки аналітичного розв'язку за отриманими розрахунковими формулами. За допомогою програмного пакету ANSYS створено скінчено-елементну модель контактної взаємодії абсолютно жорсткого штамп з пружним півпростором. Чисельне моделювання відбувалося із застосуванням ліцензованої версії, яка надається безкоштовно. Розв'язана низка задач для квадратних кілець різної ширини. Отримано розподіл тиску під штампом у різних перерізах та заглиблення штамп. Побудовані графіки розподілу тиску. При розв'язанні низки тестових задач з метою оцінки адекватності скінчено-елементної моделі, було проведено порівняння чисельних результатів з результатами, отриманими аналітичним шляхом. Отримана модель може бути використана для аналізу та прогнозування навантаження, зносу та руйнування контактної ділянки. До перспектив дослідження можуть бути віднесені розв'язання низки задач аналізу напружено-деформованого стану взаємодії штамп складної форми з пружним півпростором, а також групи штампів складної форми, та аналіз поведінки моделі в залежності від властивостей та особливостей пружного півпростору.

**Ключові слова:** контактна задача, штамп, напружено-деформований стан, моделювання, мова JAVA, скінчено-елементний аналіз, програмний комплекс ANSYS.

*Т. А. ЗАЙЦЕВА, И. И. ШМЕЛЁВ*

### СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ ДВУСВЯЗНОГО ШТАМПА В УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Работа посвящена решению задач о вдавливания в упругое полупространство цилиндрического штампа с плоским основанием под действием вертикальной силы, линия действия которой проходит через центр основания. Поперечное сечение штампа занимает двусвязную область, ограниченную двумя концентрическими линиями. Сделан сжатый обзор методов решения задач анализа контактного взаимодействия цилиндрических штампов с упругим полупространством. Использовано решение задачи в виде декомпозиции по малому параметру для случая, когда уравнение предельных кривых зависит от одного и того же малого параметра. Для этого в каждом приближении задача о вдавливании штампа с двусвязной площадкой контакта в форме некругового кольца сводится к аналогичной задаче о вдавливании штампа с площадкой контакта в форме кругового кольца. Разработано программное обеспечение на языке Java для обработки аналитического решения по полученным расчетным формулам. С помощью программного комплекса ANSYS создана конечно-элементная модель контактного взаимодействия абсолютно жесткого штампа с упругим полупространством. Численное моделирование проводилось с использованием лицензионной версии программы, которая предоставляется бесплатно. Решён ряд задач для квадратных колец разной ширины. Получены распределение давления под штампом по разным сечениям и углубление штампа. Построены графики распределения давления. При рассмотрении ряда тестовых задач с целью оценки адекватности конечно-элементной модели проводится сравнение численных результатов с результатами, полученными аналитическим путём. Полученную модель можно использовать для анализа и прогнозирования нагрузок, износа и разрушения площади контакта. К перспективам исследования могут быть отнесены решение ряда задач анализа напряженно-деформированного состояния взаимодействия штампов сложной формы с упругим полупространством, а также групп штампов сложной формы, и анализ моделей поведения в зависимости от свойств и особенностей упругого полупространства.

**Ключевые слова:** контактная задача, штамп, напряженно-деформированное состояние, моделирование, язык JAVA, конечно-элементный анализ, программный комплекс ANSYS.

*T. A. ZAYTSEVA, I. I. SHMELOV*

### MODERN APPROACHES TO SOLVING THE CONTACT PROBLEM OF PRESSING A DOUBLE-STAMP STAMP INTO AN ELASTIC HALF-SPACE

The work is devoted to solving indentation problems into an elastic half-space of a cylindrical punch with a flat base by the vertical force. The force is aimed through the center of the base. The cross-section of the stamp is a doubly connected area bounded by two concentric lines. A concise review of methods for solving problems of analyzing the contact interaction of cylindrical dies with an elastic half-space is given. The solution of the problem in the form of decomposition by a small parameter is used when the equation of the edge curves depends on the same small parameter. To achieve it, in each approximation, the problem of indentation of a stamp with a doubly connected contact area in the form of a non-circular ring is reduced to a similar problem of indentation of a stamp with a contact area in the form of a circular ring. The software in the Java language has been developed for processing the analytical solution according to the obtained calculation formulas. With the help of the ANSYS software package, a finite element model of the contact interaction of an absolutely rigid stamp with an elastic half-space has been created. Numerical modeling was carried out using a licensed version of the program, free of charge. Several problems have been solved for square rings of different widths. The distribution of pressure under the stamp over different sections and the deepening of the stamp have been obtained. The pressure distribution graphs are plotted. When considering several test problems to assess the adequacy of the finite element model, the numerical results are compared with the results obtained analytically. The resulting model can analyze and predict loads, wear, and fracture of the contact area. The research prospects can include the solution of several problems of analysis of the stress-strain state of the interaction of dies of a complex shape with an elastic half-space, as well as groups of stamps of a complex shape, and the analysis of behavior models depending on the properties and characteristics of an elastic half-space.

**Keywords:** contact problem, stamp, stress-strain state, modeling, JAVA language, finite element analysis, ANSYS software package.

**Вступ.** Дослідження напружено-деформованого сьогодення, яке має значне теоретичне і практичне значення [1]. Рішення задач контактної взаємодії між стану взаємодіючих тіл є досить актуальним завданням

тілами мають широке застосування в таких галузях, як машинобудування, будівельна механіка, геофізика, сейсмологія та багатьох інших галузях інженерної діяльності. Адже саме контактними взаємодіями в першу чергу визначаються процеси зносу, а величина контактних тисків є визначальним чинником, який викликає руйнування в зоні контакту [2]. Питання міцності і зносостійкості в процесі експлуатації обумовлюють актуальність теми дослідження для випадків, коли в ролі деформованого півпростору приймаються автомобільні дороги, ґрунтові основи [3] або фундаменти багатоповерхових і висотних будівель та споруд.

Складність розв'язання таких задач у аналітичній постановці обумовлює розробку нових підходів, що використовують чисельні методи рішення. До основних інструментів чисельного аналізу контактних задач механіки відносяться методи скінчених і граничних елементів [4], а також їх різні модифікації.

**Аналіз стану питання.** У зв'язку з бурхливим розвитком обчислювальної техніки, з'явилася тенденція в застосуванні методу скінчених елементів для розв'язання контактних задач теорії пружності [5]. Одними з перспективних напрямків розробки ефективних алгоритмів для задач цього класу є підходи, засновані на застосуванні методу граничних інтегральних рівнянь [6, 7]. Усучаснені варіанти розв'язання задач взаємодії жорсткого штампа та пружного півпростору з порожнинами [8] залишаються актуальними. Роботи [9, 10], в свою чергу, зосереджені на огляді моделей взаємодії жорстких штампів канонічної форми з пружним півпростором при відсутності початкових напружень. Розв'язання задач контактної взаємодії жорстких штампів із попередньо напруженими тілами представлені в [11]. Вплив початкових напружень на контактну взаємодію жорсткого кільцевого штампа з пружним півпростором представлено в роботі [12]. З використанням  $R$ -функцій [13] отримано наближений розв'язок задачі про вдавнення еліптичного кільцевого штампу в пружний півпростір.

Аналітичний розв'язок задачі про кільцевий штамп у вигляді подвійного ряду, коефіцієнти якого для довільних значень індексів визначаються точно з рекурентних співвідношень одержано у роботі [14]. Як приклад розвинення метод застосовуваний у роботі [15] для плоских еліптичних штампів із заокругленим краєм. Для штампу у формі прямокутного кільця вище зазначеним методом отримано рішення у роботі [16]. Робота [17] присвячена розв'язанню задач про вдавнення в пружний півпростір штампів різної конфігурації у формі не кругових кілець.

Багато сучасних робіт присвячено автоматизації та комп'ютеризації застосування скінчено-елементного аналізу з використанням програмних продуктів. До найбільш застосовуваних відносяться ABAQUS, ANSYS, AUTOCAD, INVENTOR, DEFORM, STRESS CHECK, FORG, MARC, COSMOS M, SIMSCALE, MFEM, MATLAB та інші [18].

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу про вдавнення в пружний півпростір циліндричного штампу з

плоскою основою під дією вертикальної сили  $Q$ , лінія дії якої проходить через центр основи. Поперечний перетин штампу займає двозв'язну область  $\Omega$ , обмежену двома лініями  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , що представляють лінії, з рівняннями близькими до квадратів зі сторонами, які дорівнюють відповідно  $2a, 2b, a < b$ .

Рівняння представимо у полярній системі координат рядами Фур'є:

$$\rho_{\Gamma_1} = af(\theta), \rho_{\Gamma_2} = bf(\theta),$$

$$f(\theta) = 1,1150 - 0,1406 \cos 4\theta +$$

$$+ 0,02506 \cos 8\theta + \dots$$

**Розв'язання задачі та обчислення результатів.** Для випадка коли рівняння граничних кривих залежать від одного і того ж малого параметра, отримано приблизний розв'язок задачі у вигляді розкладення за малим параметром. У кожному наближенні задача про вдавнення штампа з двозв'язною площадкою контакту у формі некругового кільця зводиться до аналогічної задачі про вдавнення штампа з площадкою контакту у формі кругового кільця [14]. Неперервна, диференційована функція  $f(\theta)$  у рівняннях границі області набуває вигляду:

$$f(\varepsilon, \theta) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i f_i(\theta),$$

$$f_1(\theta) = -\cos 4\theta + 0,8178,$$

$$f_2(\theta) = 1,2677 \cos 8\theta,$$

$$\varepsilon = 0,1406; b = 2a.$$

Оскільки штамп вдавлюється в пружний півпростір вертикальною силою  $Q$ , лінія дії якої проходить через центр ваги області контакту, то  $x_{10} = 0$ ,  $x_{20} = 0$ , де  $(x_{10}, x_{20})$  – координати точки перетину цієї сили з площиною  $Ox_1x_2$  і отже, в рівняннях рівноваги:

$$P = Q; M_1 = x_{20}Q = 0; M_2 = x_{10}Q = 0.$$

Представимо шукане розташування нормальних тисків під штампом  $P(\rho, \theta)$  і вертикальне переміщення штампа  $\delta$  у вигляді ряду за ступенями  $\varepsilon$  [15]:

$$P(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\rho, \theta) \varepsilon^k,$$

$$\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \varepsilon^k.$$

Для визначення  $P_k(\rho, \theta)$  і  $\delta_k$  використаємо наступні системи двовимірних інтегральних рівнянь [17]:

$$\frac{\delta_k 2\pi G}{1-\nu} = \iint_D \frac{P_k(\rho, \theta)}{r} ds + \Phi_k(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}),$$

де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  
 $G$  – модуль зсуву;

$D$  – кругове кільце ( $a \leq \rho \leq b$ ).

$$Q_k = \iint_D P_k(\rho, \theta) ds + F_k(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}),$$

де прийняті наступні позначення (при  $k = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\Phi_0 = 0; \Phi_1 = \left(1 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}\right) \iint_D \frac{P_0(\rho)}{r} f_1(\theta) ds;$$

$$\Phi_2(P_0, P_1) = \left(1 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}\right) \iint_D [P_1(\rho, \theta) f_1(\theta) + P_0(\rho) f_2(\theta)] \frac{\partial s}{r} + \rho_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_0^2} \iint_D \frac{P_0(\rho)}{2r} f_1^2(\theta) ds;$$

$$F_0 = F_1(P_0) = 2 \iint_D P_0(\rho) f_1(\theta) ds;$$

$$F_2(P_0, P_1) = \iint_D [2P_1(\rho, \theta) f_1(\theta) + 2P_0(\rho) f_2(\theta) + P_0(\rho) f_1^2(\theta)] ds;$$

$$Q_0 = Q; Q_k = 0, k \neq 0;$$

$$r^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0); (\rho_0, \theta_0) \in D.$$

Функції  $P_k(\rho, \theta)$  пов'язані з  $p_k(\rho, \theta)$  для  $k = 0, 1, 2$  співвідношеннями:

$$P_0(\rho) = p_0(\rho);$$

$$P_1(\rho, \theta) = p_1(\rho, \theta) + p_0(\rho) \rho f_1(\theta);$$

$$P_2(\rho, \theta) = p_2(\rho, \theta) + p_0(\rho) \rho f_2(\theta) + p_1(\rho, \theta) \rho f_2(\theta) +$$

$$+ 0,5 p_0(\rho) \rho^2 f_1^2(\theta).$$

Використаємо залежності для цих величин, коли  $b = 2a$ ,  $\varepsilon = 0,1406$ , що отримані раніше [17]. Одержуємо, що контактний тиск під квадратним кільцевим штампом, коли  $b = 2a$  у точках променя  $(\rho, \theta_*)$ , що виходить з початку координат і пересікає зовнішній і внутрішній контури області контакту в точках  $(\rho_{\Gamma_2}, \theta_*)$  і  $(\rho_{\Gamma_1}, \theta_*)$  відповідно, виражається залежністю:

$$p(\rho, \theta_*) = P_0 + \varepsilon P_1,$$

$$P_0 = \frac{Q}{2\pi b^2} \sigma_0,$$

$$P_1 = \frac{Q}{2\pi b^2} [-1,6356\sigma_0 + (-0,5314\sigma_0 + 1,05132\sigma_1 - 1,02095\sigma_2 + 0,7021\sigma_3) \cos 4\theta],$$

$$\sigma_i = \frac{\pi}{2} \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left[ \alpha_{pk}^{(i)} \left( \frac{\rho}{\rho_{\Gamma_2}} \right)^{2k} + \right.$$

$$\left. + \beta_{pk}^{(i)} \left( \frac{\rho_{\Gamma_1}}{\rho} \right)^{2k+3} \right] \left( \frac{a}{b} \right)^p,$$

$$i = 0, 1, 2, 3;$$

$$\gamma^{-1} = \iint_D p_{00}(\rho) ds.$$

Вертикальне переміщення штампа має вигляд:

$$\delta = \frac{Q(1 - \nu)}{4Gb \iint_D p_0(\rho) ds} (1 - 0,8178\varepsilon).$$

Для автоматизації розрахунків за наведеними формулами було розроблено програмний додаток на Java. Однією з причин використання строго типізованої об'єктно-орієнтованої мови програмування стало те, що програми на Java транслюються в байт-код, який виконується віртуальною машиною Java-програмою, відповідальною за обробку байт-коду і передачі інструкції обладнанню, як інтерпретатор. Перевагою подібного способу виконання програм є повна незалежність байт-коду від операційної системи і устаткування, що дозволяє виконувати Java-додатки на будь-якому пристрої, для якого існує відповідна віртуальна машина. Часто до недоліків концепції віртуальної машини відносять зниження продуктивності. Але ряд удосконалень протягом останніх років значно збільшив швидкість виконання програм на Java за рахунок технології трансляції байт-коду в машинний безпосередньо під час роботи програми, широкого застосування native-коду в стандартних бібліотеках та апаратних засобів, що забезпечують прискорену обробку байт-коду. Ці оптимізації дозволили Java надавати еквівалентний рівень швидкості виконання програм у порівнянні з C++.

Саме завдяки цій особливості розроблений додаток в майбутньому має можливість бути трансформованим як у форму мобільного додатку для використання на пристроях під керівництвом операційної системи Android, так і у форму WEB додатку для забезпечення можливості широкого паралельного доступу.

Таким чином, завдяки поєднанню кросплатформності, високої швидкодії та великої кількості open source бібліотек, Java є достатньо потужним інструментом для обробки аналітичного розв'язку за отриманими розрахунковими формулами. Адекватність отриманих розрахунків була підтверджена під час дослідження.

**Програмне середовище розробки скінчено-елементної моделі.** Для розв'язання контактної задачі методом скінчено-елементного аналізу було використано програмну систему ANSYS, що є широко застосовуваною у сфері автоматизованих інженерних розрахунків (CAE) [19, 20]. Чисельне моделювання відбувалося із застосуванням ліцензованої версії, яка надається безкоштовно для використання у наукових дослідженнях [21] та має у своєму складі Ansys Workbench на основі Ansys Mechanical та Ansys SpaceClaim. Для роботи

програмного пакету використовувалася робоча станція, що мала Microsoft Windows 10 (64-bit, Version 20H2, OS build 19042.868), професійні CPU і GPU з підтримкою багатопоточного виконання інструкцій, технології OpenGL і роботи з 3D графікою, та фізичний логічний диск операційної системи, оскільки робота у віртуальному середовищі не підтримується.

Завдяки комплексному підходу, платформа надала можливість поєднати весь процес моделювання задачі у відповідних програмних модулях. У ANSYS SpaceClaim створено геометрію задачі. Генерація елементної сітки виконана за допомогою ANSYS Meshing. Завдяки ANSYS Workbench відбувалися процеси обміну і керування розрахунками.

**Результати комп'ютерного моделювання.** У результаті пошуку більш оптимального розбиття тіла елементною сіткою через зміну глобальної топології, була отримана скінчено-елементна модель за такої схеми розбиття, коли для моделювання різних внутрішніх отворів штамп можна не перебудовувати загальну модель. При чому, застосування регулярної сітки в зоні контакту півпростору зі штампом та поєднання регулярної сітки з нерегулярною за межами цієї зони, надало можливість не перевищити обмеження ліцензованої версії програми за кількістю елементів, не нарощувати розрахункову похибку і зменшити час розрахунків. Для цього було застосовано метод Multizone, який заснований на блокувній технології і забезпечує автоматичний поділ тіла на групи геометричних тіл. До першої групи були віднесені об'єми, до яких застосовувався метод Sweep для побудови розрахункової сітки на основі призматичних елементів. До другої групи – об'єми, для яких застосовувався метод Hex Dominant для побудови розрахункової сітки на основі гексаєдрів. Таким чином, була отримана результуюча модель півпростору, що складається зі 124 тис. елементів.

Розрахунки проводились для ізотропних матеріалів, таких як, наприклад, конструкційні сталі з бібліотеки ANSYS та інших. Потім частина результатів розрахунків була приведена до безрозмірних величин для можливості порівняння з отриманими раніше аналітичними.

Похибка розв'язку при визначенні максимального контактного тиску із зменшенням розміру елементів (як на 10 %, так і на 20 %) ніж у побудованій моделі складає менше 5 %. Таким чином, отримана достатня точність розв'язання поставленої задачі за допомогою створеної скінчено-елементної моделі півпростору. На рис. 1 наведено приклад скінчено-елементної моделі півпростору для випадку коли на нього діє кільцевий квадратний штамп для  $a/b = 0.1$

Проводились чисельні експерименти, коли на півпростір безпосередньо діяв штамп з різними розмірами квадратного кільця  $a/b = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ . Також для моделювання дії штамп на пружний півпростір, було застосовано відповідно розрахований тиск по поверхні елементів зони контакту. На рис.2 наведено поверхню розподілу тиску для  $a/b = 0.5$  під основою штамп.

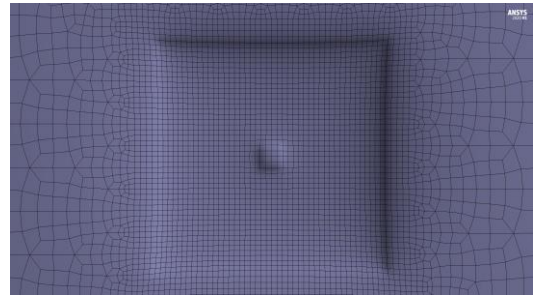


Рис. 1. Вигляд скінчено-елементної моделі зверху: півпростір під дією тиску штамп  $a/b = 0.1$

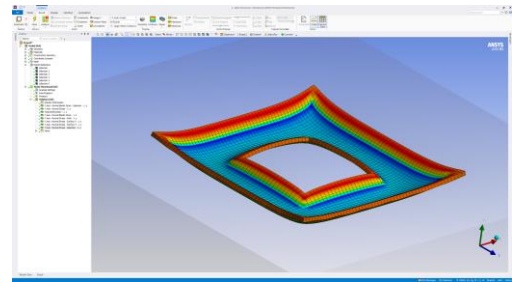


Рис. 2: Поверхня розподілу тиску під квадратним кільцевим штампом для  $a/b = 0.5$

При розв'язанні низки тестових задач з метою оцінки адекватності скінчено-елементної моделі, було проведено порівняння чисельних результатів з результатами, отриманими аналітичним шляхом. Для цього результати чисельних розрахунків були приведені до безрозмірних величин. На рис. 3 суцільною лінією 1 показана залежність нормального тиску  $P^*$  від  $\rho/\rho_{r2}$  при  $\theta = 0$  (для  $a/b = 0.5$ ) [17]. Пунктирною лінією 2 наведено розподіл нормального тиску під кільцевим квадратним штампом, що отримано шляхом розрахунків у пакеті ANSYS. З рис. 3 видно, що нормальні напруження при  $\theta = 0$  отримані аналітичним шляхом на краях зони контакту значно вищі за чисельні та прямують до нескінченності.

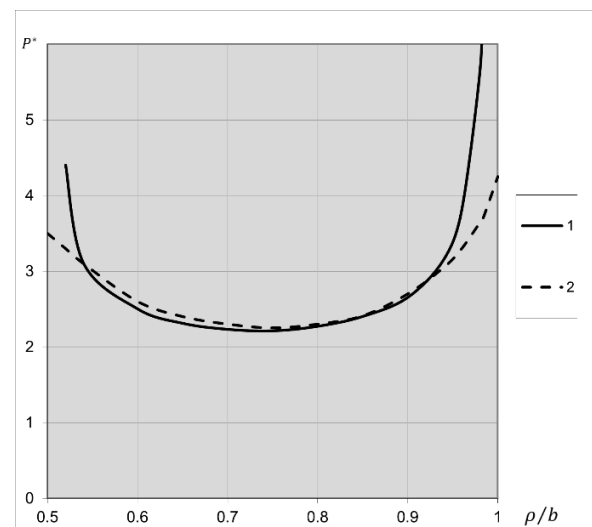


Рис. 3: Графік порівняння аналітичних результатів з чисельними на прикладі розподілу нормального тиску під квадратним кільцевим штампом при  $\theta = 0$ .

На решті ділянки контакту (середня частина кільця) значення нормальних напружень майже близькі, що властиво для застосованих методів розв'язання задачі. Відносна різниця у розрахунках нормального тиску у середній зоні кільця склала 0.042. Також треба відзначити, що напруги ростуть швидше із зовнішньої сторони кільця. Зі зменшенням ширини кільця зростають напруги і з внутрішньої сторони.

Було проведено аналогічні розрахунки і порівняння для штампів різної ширини, а саме  $a/b = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ . З отриманих результатів можна зробити аналогічні висновки.

**Висновки та перспективи досліджень.** У роботі поставлена та розв'язана задача аналізу контактної взаємодії пружного півпростору з циліндричним штампом з плоскою основою під дією вертикальної сили  $Q$ , лінія дії якої проходить через центр основи. Поперечний перетин штампів займає двозв'язну область у формі кільця близького до квадратного. Відтворено аналітичний розв'язок задачі методом зведення до послідовності задач для області контакту у формі кругового кільця із застосуванням розкладу за малим параметром. У кожному наближенні задача про вдавнення штампів з двозв'язною площадкою контакту у формі некругового кільця зводиться до аналогічної задачі про вдавнення штампів з площадкою контакту у формі кругового кільця. Розроблено програмне забезпечення на мові Java для обробки аналітичного розв'язку за отриманими розрахунковими формулами.

За допомогою програмного пакету ANSYS створено модель контактної взаємодії абсолютно жорсткого штампів з пружним півпростором. Обрана конфігурація схеми розбиття – скінчено-елементна модель, та розв'язана низка задач для квадратних кілець різної ширини.

Отримано розподіл тиску під штампом у різних перерізах та заглиблення штампів. Побудовані графіки розподілу тиску. Проведено порівняльний аналіз чисельних результатів з аналітичними, що отримані раніше. Це надало змогу казати про адекватну роботу скінчено-елементної моделі.

Таким чином, отримана модель може бути використана для аналізу та прогнозування навантаження, зносу та руйнування контактної ділянки.

У подальшому передбачається розв'язання низки задач аналізу напружено-деформованого стану взаємодії штампів складної форми з пружним півпростором, а також групи штампів різної форми, які включають у себе штампів як канонічних форм так і складно-профільних, та аналіз поведінки моделі в залежності від властивостей та особливостей пружного півпростору.

#### Список літератури

1. Спица О. Г. Численный анализ контактного взаимодействия штампа и многослойного упругого полупространства. *Вісник Запорізького національного університету*. 2015. № 3. С. 249–255.
2. Bosakov S. Two Contact Problems for Circular Die Pressing-In in Elastic Half Space. *Science and Technique*. 2018. Vol. 17, no. 6. P. 458–464;
3. Пущин Р. В., Пыхалов А. А. Анализ напряжений замковой части рабочих лопаток авиационных двигателей с конечно-элементным решением контактной задачи теории упругости. *Труды МАИ*. 2020. № 110. С. 14–21. doi: 10.34759/trd-2020-110-11.
4. Андрієвський В. П., Максим'юк Ю. В., Мицюк С. В., Пискунов С. О. Дослідження еволюції напружено-деформованого стану і визначення розрахункового ресурсу масивних елементів вісесиметричних конструкцій із використанням універсального скінченного елемента. *Вісник Національного Технічного Університету «ХПІ»*. Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. Харків: НТУ «ХПІ». 2018. № 22 (1298). С. 66–72.
5. Mikhailova E., Tarlakovskii D., Fedotenkov G. Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space. *Shell Structures: Theory and Applications*. 2017. Vol. 4. P. 301–304. doi: 10.1201/9781315166605-67.
6. Игумнов Л. А., Марков И. П. Моделирование динамики трехмерных линейных электроупругих тел с отверстиями с помощью метода граничных элементов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2017. Т. 79, № 3. С. 348–356. doi: 10.32326/1814-9146-2017-79-3-348-356.
7. Zhao J., Vollebregt E. A., Oosterlee C. W. Extending the BEM for Elastic Contact Problems Beyond the Half-Space Approach. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2016. Vol. 21, no. 1. P. 119–141. doi: 10.3846/13926292.2016.1138418.
8. Yulong L., Arutiunian A., Kuznetsova E., Fedotenkov G. Method for solving plane unsteady contact problems for rigid stamp and elastic half-space with a cavity of arbitrary geometry and location. *INCAS BULLETIN*. 2020. Т. 12. С. 99–113. doi: 10.13111/2066-8201.2020.12.S.9.
9. Schanz M., Ye W., Xiao J. Comparison of the convolution quadrature method and enhanced inverse FFT with application in elastodynamic boundary element method. *Computational Mechanics*. 2016. Vol. 57. P. 523–536. doi: 10.1007/s00466-015-1237-z.
10. Гузь А. Н., Рудницький В. Б. *Основи теорії контактної взаємодії пружних тел з початковими (остаточними) напруженнями*. Хмельницький: Вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.
11. Babich S. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, no. 6. P. 629–635.
12. Yaretskaya N. A. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54, no. 5. P. 539–543.
13. Рвачев В. Л., Проценко В. С. *Контактные задачи теории упругости для неклассических областей*. Київ: Наук. думка, 1977. 235 с.
14. Roitman A. B., Shishkanova S. F. The solution of the annular punch problem with the aid of recursion relations. *Soviet Applied Mechanics*. 1973. No. 9(7). P. 725–729.
15. Shyshkanova S. F. Indentation of an elliptical die with a rounded edge into an elastic half-space. *Mechanics of solids*. 1987. No. 22(3). P. 74–77.
16. Shyshkanova G. A., Zaytseva T. A., Frydman A. D. The analysis of manufacturing errors effect on contact stresses distribution under the ring parts deformed asymmetrically. *Metallurgical and Mining Industry*. 2015. No. 7. P. 352–357.
17. Зайцева Т. А., Шишканова Г. А. *Розв'язання просторових контактних задач для неклассичних багатозв'язних областей*. Дніпро: Вид-во ДНУ, 2011. 192 с.
18. Moaz H. Finite Element Analysis is A Powerful Approach To Predictive Manufacturing Parameters. *Journal of University of Babylon for Pure and Applied Sciences*. 2017. No. 26(1). P. 229–238.
19. Зайцева Т. А., Шмельов І. І. Використання методу скінчених елементів для моделювання контактних задач в пакеті Ansys. *Тези доповідей XVIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗС-2020)»*. Дніпро: ДНУ, 2020. С. 114–115.
20. Гулаков С. В., Щербаков С. В. Применение программной системы конечно-элементного анализа ANSYS для компьютерного моделирования напряженного состояния цилиндрических изделий при воздействии локальным источником нагрева. *Вісник Приазовського Державного Технічного Університету*. Сер.: Технічні науки. 2015. Т. 2, №30. С. 21–26.
21. Ansys Free Student Software Downloads. URL: <https://www.ansys.com/academic/free-student-products> (дата звернення: 30.02.2021).

## References (transliterated)

- Spitsa O. G. Chislennyi analiz kontaktnogo vzaimodejstviya shtampa i mnogoslonojogo uprugogo poluprostranstva [Numerical analysis of the contact interaction of the stamp and the multilayer elastic half-space]. *Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu* [Bulletin of Zaporizhzhya National University]. Zaporizhzhia, "ZNU" Publ., 2015, no 3, pp. 249–255.
- Bosakov S. Two Contact Problems for Circular Die Pressing-In in Elastic Half Space. *Science and Technique*. 2018, vol. 17, no. 6, pp. 458–464.
- Pushchin R. V., Pykhalov A. A. Analiz napryazhenij zamkovoij chasti rabochih lopatok aviacionnyh dvigatelej s konechno-elementnym resheniem kontaktnoj zadachi teorii uprugosti [Stress analysis of the locking part of the blades of aircraft engines with a finite-element solution of the contact problem of the theory of elasticity]. *Trudy MAI*. 2020, no. 110, pp. 14–21. doi: 10.34759/trd-2020-110-11.
- Andrievsky V. P., Maksymyuk Yu. V., Mytsiuk S. V., Piskunov S. O. Doslidzhennya evolyucii napruzhenno-deformovanogo stanu i viznachennya rozrahunkovogo resursu masivnih elementiv visesimetricnih konstrukcij iz vikoristannyam universal'nogo skinchennogo elementu [Investigation of the evolution of the stress-strain state and determination of the calculated resource of massive elements of axisymmetric structures using a universal finite element]. *Vestnik Nats. tekhn. un-ta "KhPI": sb. nauch. tr. Temat. vyp.: Sistemyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of the National Technical University "KhPI": a collection of scientific papers. Thematic issue: System analysis, management, and information technology]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2018, no. 22 (1298), pp. 66–72.
- Mikhailova E., Tarlakovskii D., Fedotenkov G. Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space. *Shell Structures: Theory and Applications*. 2017, vol. 4, pp. 301–304. doi: 10.1201/9781315166605-67.
- Igumnov L. A., Markov I. P. Modelirovanie dinamiki trekhmernyh linejnyh elektropugih tel s otverstiyami s pomoshch'yu metoda granichnyh elementov [Modeling the dynamics of three-dimensional linear electroelastic bodies with holes using the method of boundary elements]. *Problems of strength and ductility*. 2017, vol. 79, no. 3, pp. 348–356. doi: 10.32326/1814-9146-2017-79-3-348-356.
- Zhao J., Vollebregt E. A., Oosterlee C. W. Extending the BEM for Elastic Contact Problems Beyond the Half-Space Approach. *Mathematical Modeling and Analysis*. 2016, vol. 21, no. 1, pp. 119–141. doi: 10.3846 / 13926292.2016.1138418.
- Yulong L., Arutunian A., Kuznetsova E., Fedotenkov G. Method for solving plane unsteady contact problems for rigid stamp and elastic half-space with a cavity of arbitrary geometry and location. *INCAS BULLETIN*. 2020, vol. 12, pp. 99–113. doi: 10.13111/2066-8201.2020.12.S.9.
- Schanz M., Ye W., Xiao J. Comparison of the convolution quadrature method and enhanced inverse FFT with application in elastodynamic boundary element method. *Computational Mechanics*. 2016, vol. 57, pp. 523–536. doi: 10.1007/s00466-015-1237-z.
- Guz A. N., Rudnitsky V. B. *Osnovy teorii kontaktnogo vzaimodejstviya uprugih tel s nachal'nymi (ostatochnymi) napryazheniyami* [Fundamentals of the theory of contact interaction of elastic bodies with initial (residual) stresses]. Khmelnytsky, Melnik Publ., 2006. 710 p.
- Babich. S. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2019, vol. 55, no. 6, pp. 629–635.
- Yaretskaya N. A. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018, vol. 54, no. 5, pp. 539–543.
- Rvachev V. L., Protsenko V. S. *Kontaktnye zadachy teorii uprugosti dlia neklassycheskykh oblastei* [Contact problems of elasticity theory for non-classical domains]. Kyiv, Nauk. Dumka Publ., 1977. 235p.
- Roitman A. B., Shishkanova S. F. The solution of the annular punch problem with the aid of recursion relations. *Soviet Applied Mechanics*. 1973, no. 9(7), pp. 725–729.
- Shyshkanova S. F. Indentation of an elliptical die with a rounded edge into an elastic half-space. *Mechanics of solids*. 1987, no. 22(3), pp. 74–77.
- Shyshkanova G. A., Zaytseva T. A., Frydman A. D. The analysis of manufacturing errors effect on contact stresses distribution under the ring parts deformed asymmetrically. *Metallurgical and Mining Industry*. 2015, no. 7, pp. 352–357.
- Zaitseva T. A., Shishkanova G. A. Roz'yazannya prostorovih kontaktnih zadach dlya neklasichnih bagatozv'yaznih oblastej [Solving spatial contact problems for nonclassical multiconnected domains]. Dnipro, DNU Publ., 2011. 192 p.
- Moaz H. Finite Element Analysis is A Powerful Approach To Predictive Manufacturing Parameters. *Journal of the University of Babylon for Pure and Applied Sciences*. 2017, no. 26(1), pp. 229–238.
- Zaytseva T. A., Shmelov I. I. Vikoristannya metodu skinchennih elementiv dlya modelyuvannya kontaktnih zadach v paketi Ansys [Using the finite element method for modeling contact problems in the Ansys package]. *Trudy mezhdunar. konferentsii "Matemachne ta programne zabezpechennya intelektual'nih sistem (MPZIS-2020)" (18–20 listopada, 2020, Dnipro)* [Proc. of the Int. Conf. "Mathematical support and software for intelligent systems (MSSIS-2020)"]. Dnipro, DNU Publ., 2020, pp. 114–115.
- Gulakov S. V., Shcherbakov S. V. Primenenie programnoj sistemy konechno-elementnogo analiza ANSYS dlya komp'yuternogo modelirovaniya napryazhenogo sostoyaniya cilindricheskikh izdelij pri vozdejstvii lokal'nym istochnikom nagreva [Application of the ANSYS finite element analysis software system for computer modeling of the stress state of cylindrical products under the influence of a local heat source]. *Visnik Priazov'skogo Derzhavnogo Tekhnichnogo Universitetu. Ser.: Tekhnichni nauki* [Bulletin of the Azov State Technical University. Thematic issue: Technical Sciences]. 2015, vol. 2, no. 30, pp. 21–26.
- Ansys Free Student Software Downloads. Available at: <https://www.ansys.com/academic/free-student-products> (accessed 30.02.2021).

Надійшла (received) 18.04.2021

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Зайцева Тетяна Анатоліївна** – кандидат технічних наук, доцент, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, доцент кафедри комп'ютерних технологій; м. Дніпро, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6346-3390>; e-mail: [ztan2004@ukr.net](mailto:ztan2004@ukr.net)

**Шмельов Іван Ігорович** – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, аспірант кафедри комп'ютерних технологій; м. Дніпро, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6558-1887>; e-mail: [shmel.ivan@gmail.com](mailto:shmel.ivan@gmail.com)

**Зайцева Тетяна Анатоліївна** – кандидат технічних наук, доцент, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, доцент кафедри комп'ютерних технологій; м. Дніпро, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6346-3390>; e-mail: [ztan2004@ukr.net](mailto:ztan2004@ukr.net)

**Шмельов Іван Ігорович** – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, аспірант кафедри комп'ютерних технологій; м. Дніпро, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6558-1887>; e-mail: [shmel.ivan@gmail.com](mailto:shmel.ivan@gmail.com)

**Zaytseva Tetyana Anatolyivna** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Oles Honchar Dnipro National University, Associate Professor of the Department of Computer Technologies; Dnipro, Ukraine; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6346-3390>; e-mail: [ztan2004@ukr.net](mailto:ztan2004@ukr.net)

**Shmelov Ivan Ihorovich** – Oles Honchar Dnipro National University, postgraduate student of the Department of Computer Technologies; Dnipro, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6558-1887>; e-mail: [shmel.ivan@gmail.com](mailto:shmel.ivan@gmail.com)