СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ І ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

SYSTEM ANALYSIS AND DECISION-MAKING THEORY

UDC 519.24 **DOI: 10.20998/2079-0023.2021.02.01**

A. A. PAVLOV

ESTIMATING WITH A GIVEN ACCURACY OF THE COEFFICIENTS AT NONLINEAR TERMS OF UNIVARIATE POLYNOMIAL REGRESSION USING A SMALL NUMBER OF TESTS IN AN ARBITRARY LIMITED ACTIVE EXPERIMENT

We substantiate the structure of the efficient numerical axis segment an active experiment on which allows finding estimates of the coefficients for nonlinear terms of univariate polynomial regression with high accuracy using normalized orthogonal Forsyth polynomials with a sufficiently small number of experiments. For the case when an active experiment can be executed on a numerical axis segment that does not satisfy these conditions, we substantiate the possibility of conducting a virtual active experiment on an efficient interval of the numerical axis. According to the results of the experiment, we find estimates for nonlinear terms of the univariate polynomial regression under research as a solution of a linear equalities system with an upper non-degenerate triangular matrix of constraints. Thus, to solve the problem of estimating the coefficients for nonlinear terms of univariate polynomial regression, it is necessary to choose an efficient interval of the numerical axis, set the minimum required number of values of the scalar variable which belong to this segment and guarantee a given value of the variance of estimates for nonlinear terms of univariate polynomial regression using normalized orthogonal polynomials of Forsythe. Next, it is necessary to find with sufficient accuracy all the coefficients of the normalized orthogonal polynomials of Forsythe for the given values of the scalar variable. The resulting set of normalized orthogonal polynomials of Forsythe allows us to estimate with a given accuracy the coefficients of nonlinear terms of univariate polynomial regression in an arbitrary limited active experiment: the range of the scalar variable values can be an arbitrary segment of the numerical axis. We propose to find an estimate of the constant and of the coefficient at the linear term of univariate polynomial regression by solving the linear univariate regression problem using ordinary least squares method in active experiment conditions. Author and his students shown in previous publications that the estimation of the coefficients for nonlinear terms of multivariate polynomial regression is reduced to the sequential construction of univariate regressions and the solution of the corresponding systems of linear equalities. Thus, the results of the paper qualitatively increase the efficiency of finding estimates of the coefficients for nonlinear terms of multivariate polynomial regression given by a redundant representation.

Keywords: univariate polynomial regression, multivariate polynomial regression, normalized orthogonal polynomials of Forsythe, redundant representation, linear equalities, conditional active experiment

О. А. ПАВЛОВ

ОЦІНЮВАННЯ ІЗ ЗАДАНОЮ ТОЧНІСТЮ КОЕФІЦІЄНТІВ ПРИ НЕЛІНІЙНИХ ЧЛЕНАХ ОДНОВИМІРНОЇ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ РЕГРЕСІЇ ПРИ МАЛІЙ КІЛЬКОСТІ ВИПРОБУВАНЬ ДОВІЛЬНОГО ОБМЕЖЕНОГО АКТИВНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Обґрунтовується структура ефективного відрізка числової осі, проведення на якому активного експерименту для знаходження оцінок коефіцієнтів при нелінійних членах одновимірної поліноміальної регресії за допомогою нормованих ортогональних поліномів Форсайта дозволяє при досить малій кількості експериментів знаходити оцінки з високою точністю. Для випадку, коли активний експеримент може бути реалізований на відрізку числової осі, що не задовольняє цим умовам, обґрунтовується можливість проведення віртуального активного експерименту на ефективному відрізку числової осі, за результатами якого в результаті розв'язання системи лінійних рівностей з верхньою трикутною невиродженою матрицею обмежень знаходяться оцінки при нелінійних членах досліджуваної одновимірної поліноміальної регресії. Таким чином, для розв'язання задачі оцінювання коефіцієнтів при нелінійних членах одновимірної поліноміальної регресії необхідно вибрати ефективний відрізок числової осі, задати мінімально необхідну кількість значень скалярної змінної, що належать цьому відрізку і гарантують задану величину дисперсії оцінок при нелінійних членах одновимірної поліноміальної регресії з використанням нормованих ортогональних поліномів Форсайта. Далі необхідно з достатньою точністю знайти всі коефіцієнти нормованих ортогональних поліномів Форсайта для заданих значень скалярної змінної. Отриманий набір нормованих ортогональних поліномів Форсайта дозволяє оцінювати із заданою точністю коефіцієнти при нелінійних членах одновимірної поліноміальної регресії при довільному обмеженому активному експерименті – область зміни значень скалярної змінної може бути довільним відрізком числової осі. Оцінку константи та коефіцієнта при лінійному члені одновимірної поліноміальної регресії пропонується знаходити внаслідок розв'язання задачі лінійної одновимірної регресії за допомогою стандартного методу найменших квадратів в умовах активного експерименту. У попередніх публікаціях автора та його учнів було показано, що оцінювання коефіцієнтів при нелінійних членах багатовимірної поліноміальної регресії зводиться до послідовної побудови одновимірних регресій та розв'язання відповідних систем лінійних рівностей. Таким чином, результати статті якісно підвищують ефективність знаходження оцінок коефіцієнтів при нелінійних членах багатовимірної поліноміальної регресії, яка задана надлишковим описом.

Ключові слова: одновимірна поліноміальна регресія, багатовимірна поліноміальна регресія, нормовані ортогональні поліноми Форсайта, надлишковий опис, лінійні рівності, умовний активний експеримент

А. А. ПАВЛОВ

ОЦЕНКА С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНАХ ОДНОМЕРНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ ПРИ МАЛОМ КОЛИЧЕСТВЕ ИСПЫТАНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОГРАНИЧЕННОГО АКТИВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Обосновывается структура эффективного отрезка числовой оси, проведение на котором активного эксперимента для нахождения оценок коэффициентов при нелинейных членах одномерной полиномиальной регрессии с помощью нормированных ортогональных полиномов Форсайта позволяет при достаточно малом количестве экспериментов находить оценки с высокой точностью. Для случая, когда активный эксперимент может быть реализован на отрезке числовой оси, не удовлетворяющем этим условиям, обосновывается возможность проведения виртуального активного эксперимента на эффективном отрезке числовой оси, по результатам которого в результате решения системы линейных равенств с верхней треугольной невырожденной матрицей ограничений находятся оценки при нелинейных членах исследуемой одномерной полиномиальной регрессии. Таким образом, для решения задачи оценивания коэффициентов при нелинейных членах одномерной полиномиальной регрессии необходимо выбрать эффективный отрезок числовой оси, задать минимально необходимое количество значений скалярной переменной, принадлежащих этому отрезку и гарантирующих заданную величину дисперсии оценок при нелинейных членах одномерной полиномиальной регрессии с использованием нормированных ортогональных полиномов Форсайта. Далее необходимо с достаточной точностью найти все коэффициенты нормированных ортогональных полиномов Форсайта для заданных значений скалярной переменной. Полученный набор нормированных ортогональных полиномов Форсайта позволяет оценивать с заданной точностью коэффициенты при нелинейных членах одномерной полиномиальной регрессии при произвольном ограниченном активном эксперименте – область изменения значений скалярной переменной может быть произвольным отрезком числовой оси. Оценку постоянной и коэффициента при линейном члене одномерной полиномиальной регрессии предлагается находить вследствие решения задачи линейной одномерной регрессии с помощью стандартного метода наименьших квадратов в условиях активного эксперимента. В предыдущих публикациях автора и его учеников было показано, что оценивание коэффициентов при нелинейных членах многомерной полиномиальной регрессии сводится к последовательному построению одномерных регрессий и решению соответствующих систем линейных равенств. Таким образом, результаты статьи качественно повышают эффективность нахождения оценок коэффициентов при нелинейных членах многомерной полиномиальной регрессии, заданной избыточным описанием.

Ключевые слова: одномерная полиномиальная регрессия, многомерная полиномиальная регрессия, нормированные ортогональные полиномы Форсайта, избыточное описание, линейные равенства, условный активный эксперимент

Introduction. Univariate and multivariate regression models are widely used [1–8] in modern information diagnostic systems in various fields of human activity, for example, in medicine. Finding, with a given accuracy, estimates of the coefficients of univariate polynomial regression (UPR) and multivariate polynomial regression (MPR) is still a serious theoretical problem today.

Works [9, 10] substantiate the possibility of reducing the sufficiently efficient estimating of the coefficients at nonlinear terms of the MPR in an active experiment to successive building of a UPR. The coefficients at nonlinear terms of the UPR are the right-hand sides of the systems of linear equalities, whose unknowns are the coefficients at the nonlinear terms of the MPR. Thus, the efficient finding of estimates at nonlinear terms of the UPR reduces the problem of estimating the coefficients of the MPR to the standard problem of finding the coefficients of linear multivariate regression in an active experiment. In this paper, we substantiate a procedure for efficient finding of the coefficients at nonlinear terms of a UPR. The procedure is based on the transformation of a real active experiment into a virtual one. The formulated problem is solved using the results of the virtual experiment together with a previously found set of normalized orthogonal polynomials of Forsythe (NOPFs) which guarantee a specified variance value of the estimated coefficients.

General theoretical provisions. Univariate polynomial regression is given in the form

$$Y(x) = \theta_0 + \theta_1 x + \ldots + \theta_r x^r + E \tag{1}$$

where x is an input scalar variable;

E is a random variable with mathematical expectation $ME = 0$ and variance $\mathrm{Var}(E) = \sigma^2 < \infty$, σ^2 is known, or its upper bound is given.

An active experiment is designed as follows: the values of the input variable x_i, $i = \overline{1,n}$, sequentially enter the object (1), we obtain the output values of $y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \cdots + \theta_r x_i^r + \delta_i$ where δ_i is the realization of the random variable E. Based on the results of an active experiment $\left(x_i, y_i,\ i = \overline{1,n}\right)$ we find estimates $\hat{\theta}_j$ of unknown coefficients $\theta_j, j = \overline{0,r}$. We will find the estimates $\hat{\theta}_j$ by the least squares method using NOPFs. Let us give the following well-known facts [11].

Let us transform the model (1) into a model (2):

$$Y(x) = \sum\nolimits_{j=0}^{r} w_j Q_j(x) + E \tag{2}$$

where $Q_j(x)$, $j = \overline{0,r}$, is the j-th NOPF.

According to [11],

$$\lambda Q_j(x) = x Q_{j-1}(x) - \alpha Q_{j-1}(x) - \beta Q_{j-2}(x), \tag{3}$$

where α, β, λ are the coefficients determined as follows:

$$\alpha = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i Q_{j-1}^2(x_i); \tag{4}$$

$$\beta = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i Q_{j-1}(x_i) Q_{j-2}(x_i); \tag{5}$$

$$\lambda = \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n} \left(x_i Q_{j-1}(x_i) - \alpha Q_{j-1}(x_i) - \beta Q_{j-2}(x_i)\right)^2}. \tag{6}$$

The first two orthogonal polynomials are calculated by the formulas

$$Q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$Q_1(x) = -\frac{\overline{x}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} + \frac{x}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}, \tag{7}$$

where $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

In general case, the j-th orthogonal polynomial is calculated by the formula

$$Q_j(x) = q_{j0} + q_{j1}x + \cdots + q_{jj}x^j,\ j = \overline{0,r}. \qquad (8)$$

The recurrent procedure (3) allows us to find all the coefficients (8) for $j = \overline{2,r}$ using (7) by values x_i, $i = \overline{1,n}$. We find estimates of the coefficients w_j, $j = \overline{0,r}$, by the formula

$$\widehat{w}_j = \sum_{i=1}^{n} y_i\, Q_j(x_i),\ j = \overline{0,r}, \qquad (9)$$

and determine the estimates $\widehat{\theta}_j$, $j = \overline{0,r}$, from the estimates $\widehat{w}_j$, $j = \overline{0,r}$, as follows:

$$\widehat{\theta}_j = \widehat{w}_r q_{rj} + \cdots + \widehat{w}_j q_{jj}, j = \overline{0,r}. \qquad (10)$$

The accuracy of the estimate $\widehat{\theta}_j$, $j = \overline{0,r}$, is evaluated by the formula

$$M\widehat{\theta}_j = \theta_j,\ \mathrm{Var}(\widehat{\theta}_j) = \sigma^2 \sum_{i=r}^{j} q_{ij}^2. \qquad (11)$$

It was shown in [12] that the most convenient interval of the numerical axis for an active experiment has the form $[-|t|, t], t > 1$.

For example, carrying out an active experiment in the interval $[-50, 50]$, $x_1 = -50, \ldots, x_{10} = 50$, with an equal step, leads to the following estimates [10]:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\widehat{\theta}_2) &= \sigma^2 \cdot 4.26 \cdot 10^{-6}; \\ \mathrm{Var}(\widehat{\theta}_3) &= \sigma^2 \cdot 7.55 \cdot 10^{-9}; \\ \mathrm{Var}(\widehat{\theta}_4) &= \sigma^2 \cdot 1.4 \cdot 10^{-12}; \\ \mathrm{Var}(\widehat{\theta}_5) &= \sigma^2 \cdot 1.28 \cdot 10^{-15} \end{aligned} \qquad (12)$$

where $\sigma^2 = \mathrm{Var}(E)$.

Intervals $[u, v]$, $u < v < 0$ or $0 < u < v$, are much less efficient for an active experiment using NOPFs: variances of the estimates $\widehat{\theta}_j$, $j \geq 2$, are significantly (by orders of magnitude) larger for a given n [12]. Further, we will call an interval of the form $[-|t|, t], t > 1$, an efficient interval.

Formal statement of the problem and methodology for its solving. We solve the following problem. Suppose that a set of NOPFs was built in advance with sufficient accuracy for the interval $[-|t|, t], t > 1$, and a given n (it is enough to set $b = 50$ and $n = 10$, see (12)). Then a real active experiment on an interval $[c, d]$ where $c < d$ are arbitrary real numbers, is reduced to a virtual active experiment on an interval $[-|t|, t], t > 0$, for an artificially constructed UPR. The problem of estimating the coefficients at nonlinear terms of this UPR is solved using a prebuilt set of NOPFs found for x_i, $i = \overline{1,n}$, $x_1 = -|t| < < x_2 < \cdots < x_n = t$. It is shown that estimates $\widehat{\theta}_j$, $j = \overline{2,r}$, are a solution of a nondegenerate system of linear equalities with an upper triangular structure of the constraint matrix.

Designing a virtual active experiment for a given limited active experiment. Let us specify an arbitrary polynomial of degree r:

$$y(x) = \theta_0 + \theta_1 x + \ \ldots + \theta_r x^r. \qquad (13)$$

Let us make the substitute of variables:

$$x = az + b \qquad (14)$$

where a and b are the coefficients of linear transformation. We obtain a polynomial

$$y(z) = \theta_0 + \theta_1(az + b) + \theta_2(az + b)^2 + \cdots +$$

$$+ \theta_r(az + b)^r$$

or, in equivalent form:

$$y(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_r z^r. \qquad (15)$$

Statement 1. There is a one-to-one correspondence between the coefficients of polynomials (13) and (15).

Proof. We can verify directly for $r = 2, 3$ that the systems of linear equalities linking the coefficients θ_j and γ_j $\forall j$ have the following form:

For $r = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & a & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

For $r = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & a & 2ab & 3ab^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2b \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

or in general form:

$$\boldsymbol{A_r} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \ldots \\ \theta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \ldots \\ \gamma_r \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

where the matrix $\boldsymbol{A_r}$ is upper triangular:

$$\boldsymbol{A_r} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \square & \square_{\square\square} & \\ & a^2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a^r \end{pmatrix},$$

$|\boldsymbol{A_r}| = \prod_{j=0}^{r} a^j \neq 0$ and, therefore, there is a one-to-one correspondence between the coefficients of the polynomials (13) and (15).

Corollary. Due to the structure of the matrix $\boldsymbol{A_r}$, the system (18) is solved as follows:

$$\theta_r = \frac{\gamma_r}{a^r},\ \theta_{r-1} = f(a, b, \theta_r, \gamma_{r-1}),$$

$$\theta_2 = f(a, b, \theta_r, \ldots, \theta_3, \gamma_2). \qquad (19)$$

Let the UPR model be given in the form

$$Y(x) = \theta_0 + \theta_1 x + \ldots + \theta_r x^r + E. \qquad (20)$$

An active experiment can only be carried out for values from the range $[c, d]$, $c < d$, for which the use of NOPFs is inefficient. And for a symmetrical segment $[z_1, z_n]$, $z_1 = -z_n$, $z_n > 1$, a pre-built set of NOPFs for the given

$$r,\ z_1 = -z_n < z_2 < \cdots < z_{n-1} < z_n, \qquad (21)$$

guarantees the specified variances of the estimates of the UPR coefficients, $j = \overline{2, r}$. For example [10], variances of the UPR coefficients for $j = \overline{2, 5}$ are determined by (12) for $z_1 = -50, z_{10} = 50, n = 10$.

Algorithm for designing a virtual active experiment:

1. Find a linear relationship $x = az + b$ satisfying the condition $az_1 + b = c$, $az_n + b = d$. Verify directly:

$$a = \frac{d - \mathrm{c}}{z_n - z_1} > 0, \qquad b = x_1 - \frac{d - \mathrm{c}}{z_n - z_1} \cdot z_1. \qquad (22)$$

Set

$$x_1 = c, x_j = az_j + b, j = \overline{2, n}\ (x_n = d) \qquad (23)$$

($x_j > x_{j-1}, j = \overline{2, n}$, since $a > 0$, and $z_j > z_{j-1}$).

2. Carry out an active experiment on the UPR model (20) for the values of the input variable x_i, $i = \overline{1, n}$, given by expressions (23). The result of an active experiment is a dataset (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$. By virtue of Statement 1, simultaneously for the UPR model (3), a virtual active experiment was carried out on the following virtual UPR of the form

$$Y(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_r z^r + E \qquad (24)$$

(see formula (15)), its result is a dataset (z_i, y_i), $i = \overline{1, n}$. Using this dataset and the set of pre-built NOPFs (21) find with a given accuracy the estimates of the coefficients $\widehat{\gamma}_j$, $j = \overline{2, r}$, and use them for solving system (18) finding as a result the estimates $\widehat{\theta}_j$, $j = \overline{2, r}$.

Thus, the use of a virtual active experiment qualitatively simplifies estimating of the coefficients at nonlinear terms of an UPR. Finding the estimates of θ_0, θ_1 is reduced to the problem of univariate linear regression under active experiment conditions.

Remark. Theoretical estimates of the accuracy of finding the values of γ_0, γ_1 with the use of NOPFs are rough even for $n \approx 100$ [10] and do not guarantee anything in fact. To estimate them, it is better to use the least squares method for $x_i = 0 \vee 1$, $i = \overline{1, n}$, at a large enough n and a low variance $\mathrm{Var}(E)$.

Conclusions. 1. We show that the problem of estimating the coefficients at nonlinear terms of a univariate polynomial regression using an arbitrary limited active experiment with a given accuracy can be solved with the use of one set of pre-built normalized orthogonal polynomials of Forsythe. The polynomials guarantee estimating of the coefficients at nonlinear terms of univariate polynomial regression with the specified accuracy in a specially designed virtual active experiment.

2. We have reduced estimation of the constant and the coefficient at the linear term of univariate polynomial regression to univariate linear regression problem solving.

3. The result we obtained qualitatively increases the efficiency of estimating the coefficients at nonlinear terms of a multivariate polynomial regression given by a redundant representation. The procedure is reduced to the sequential building of univariate polynomial regressions and solving the corresponding systems of linear equations.

References

1. *Ивахненко А. Г.* Моделирование сложных систем. Информационный подход. Киев: Вища школа, 1987. 62 с.
2. Настенко Е., Павлов В., Бойко Г., Носовец О. Многокритериальный алгоритм шаговой регрессии. *Біомедична інженерія і технологія*, 2020. № 3, С. 48–53. doi: 10.20535/2617-8974.2020.3.195661
3. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis.* 3rd edition. New York: John Wiley & Sons, 1998. 736 p.
4. Большаков А. А., Каримов Р. Н. *Методы обработки многомерных данных и временных рядов: учебн. пособие для вузов*. Москва: Горячая линия–Телеком, 2007. 522 с.
5. Shahrel M. Z., Mutalib S., Abdul-Rahman S. PriceCop–Price Monitor and Prediction Using Linear Regression and LSVM-ABC Methods for E-commerce Platform. *International Journal of Information Engineering and Electronic Business (IJIEEB)*, 2021. Vol. 13 (1). P. 1–14. doi: 10.5815/ijieeb.2021.01.01
6. Satter A., Ibtehaz N. A Regression based Sensor Data Prediction Technique to Analyze Data Trustworthiness in Cyber-Physical System. *International Journal of Information Engineering and Electronic Business (IJIEEB)*, 2018. Vol. 10 (3). P. 15–22. doi: 10.5815/ijieeb.2018.03.03
7. Isabona J., Ojuh D. O. Machine Learning Based on Kernel Function Controlled Gaussian Process Regression Method for In-depth Extrapolative Analysis of Covid-19 Daily Cases Drift Rates. *International Journal of Mathematical Sciences and Computing (IJMSC)*, 2021. Vol. 7 (2). P. 14–23. doi: 10.5815/ijmsc.2021.02.02
8. Babatunde G., Emmanuel A. A., Oluwaseun O. R., Bunmi O. B., Precious A. E. Impact of Climatic Change on Agricultural Product Yield Using K-Means and Multiple Linear Regressions. *International Journal of Education and Management Engineering (IJEME)*, 2019. Vol. 9 (3). P. 16–26. doi: 10.5815/ijeme.2019.03.02
9. Павлов А. А., Калашник В. В., Коваленко Д. А. Построение многомерной полиномиальной регрессии. Регрессия с повторяющимися аргументами во входных данных. *Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка»*. Київ: ВЕК+, 2015. № 62. С. 57–61
10. Згуровский М. З., Павлов А. А. *Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами*. Київ: Наук. думка, 2010. 573 с.
11. Худсон Д. *Статистика для физиков: Лекции по теории вероятностей и элементарной статистике*. 2-е изд. Москва: Мир, 1970. 296 с.
12. Павлов А. А., Калашник В. В. Рекомендации по выбору зоны проведения активного эксперимента для одномерного полиномиального регрессионного анализа. *Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка»*. Київ: ВЕК+, 2014. № 60. С. 41–45.

References (transliterated)

1. Ivahnenko A.G. Modelirovanie Slozhnyh Sistem. Informacionnyj Podhod [Complex Systems Modeling. Informational Approach]. Kiev, Vyshha shkola Publ., 1987. 62 p.
2. Nastenko E., Pavlov V., Boyko G., Nosovets O. Mnogokriterial'nyj algoritm shagovoj regressii [Multi-criterion step-regression algorithm]. *Biomedychna inzheneriya i tekhnolohiya* [Biomedical ingeneering and technology]. 2020, no. 3, pp. 48–53. doi: 10.20535/2617-8974.2020.3.195661
3. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis.* 3rd edition. New York: John Wiley & Sons, 1998. 736 p.

4. Bol'shakov A. A., Karimov R. N. *Metody obrabotki mnogomernykh dannykh i vremennykh ryadov: uchebnoe posobie dlya vuzov* [Methods for processing multivariate data and time series: textbook for universities]. Moscow: Goryachaya liniya–Telekom, 2007. 522 p.
5. Shahrel M. Z., Mutalib S., Abdul-Rahman S. PriceCop–Price Monitor and Prediction Using Linear Regression and LSVM-ABC Methods for E-commerce Platform. *International Journal of Information Engineering and Electronic Business (IJIEEB)*, 2021. Vol. 13 (1), pp. 1–14. doi: 10.5815/ijieeb.2021.01.01
6. Satter A., Ibtehaz N. A Regression based Sensor Data Prediction Technique to Analyze Data Trustworthiness in Cyber-Physical System. *International Journal of Information Engineering and Electronic Business (IJIEEB)*, 2018. Vol. 10 (3), pp. 15–22. doi: 10.5815/ijieeb.2018.03.03
7. Isabona J., Ojuh D. O. Machine Learning Based on Kernel Function Controlled Gaussian Process Regression Method for In-depth Extrapolative Analysis of Covid-19 Daily Cases Drift Rates. *International Journal of Mathematical Sciences and Computing (IJMSC)*, 2021. Vol. 7 (2). pp. 14–23. doi: 10.5815/ijmsc.2021.02.02
8. Babatunde G., Emmanuel A. A., Oluwaseun O. R., Bunmi O. B., Precious A. E. Impact of Climatic Change on Agricultural Product Yield Using K-Means and Multiple Linear Regressions. *International Journal of Education and Management Engineering (IJEME)*, 2019. Vol. 9 (3). pp. 16–26. doi: 10.5815/ijeme.2019.03.02
9. Pavlov A. A., Kalashnik V. V., Kovalenko D. A. Postroenie mnogomernoj polinomial'noj regressii. Regressija s povtorjajushhimisja argumentami vo vhodnyh dannyh [Multidimensional polynomial regression construction. Regression with duplicate arguments in the input]. *Visnyk NTUU "KPI". Seriya «Informatyka, upravlinnya ta obchislyuvalna tekhnyka»* [Visnyk NTUU "KPI". Informatics, operation and computer science]. Kiev, Vek+ Publ., 2015, no. 62, pp. 57–61
10. Zgurovsky M. Z., Pavlov A. A. *Prinyatie resheniy v setevykh sistemakh s ogranichennymi resursami* [Decision making in network systems with limited resources]. Kiev, Nauk. dumka Publ., 2010, 573 p.
11. Hudson D. J. Statistics Lectures, Volume 2: Maximum Likelihood and Least Squares Theory. CERN Reports 64(18). Geneva, CERN, 1964. (Russ. ed.: Hudson D. *Statistika dlja fizikov: Lekcii po teorii verojatnostej i jelementarnoj statistike*. Moscow, Mir Publ., 1970. 296 p.). doi: 10.5170/CERN-1964-018
12. Pavlov A. A., Kalashnik V. V. Rekomendacii po vyboru zony provedenija aktivnogo jeksperimenta dlja odnomernogo polinomial'nogo regressionnogo analiza [Recommendations for choosing the zone of an active experiment for one-dimensional polynomial regression analysis]. *Visnyk NTUU "KPI". Seriya «Informatyka, upravlinnya ta obchislyuvalna tekhnyka»* [Visnyk NTUU "KPI". Informatics, operation and computer science]. Kiev, Vek+ Publ., 2014, no. 60, pp. 41–45

Received 15.10.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Павлов Олександр Анатолійович – доктор технічних наук, професор каф. інформатики та програмної інженерії Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»; м. Київ, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6524-6410; e mail: pavlov.fiot@gmail.com

Павлов Александр Анатольевич – доктор технических наук, профессор каф. информатики и программной инженерии Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»; г. Киев, Украина; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6524-6410; e mail: pavlov.fiot@gmail.com

Pavlov Alexander Anatolievich – Doctor of Technical Sciences, Full Professor of Informatics and Software Engineering Department of the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"; Kyiv, Ukraine; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6524-6410; e-mail: pavlov.fiot@gmail.com