УДК 62-503.4

Т. Е. АЛЕКСАНДРОВА, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПІ»

К ВОПРОСУ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ

Предложена методика синтеза линейных инвариантных систем стабилизации, включающая выбор весовых коэффициентов интегрального квадратичного функционала качества.

Ключевые слова: система стабилизации, инвариантность, интегральный квадратичный функционал.

Введение. Пусть возмущенное движение объекта стабилизации описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{AX}(t) + \mathbf{BU}(t) + \mathbf{CF}(t), \tag{1}$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{X}}(t)$ – n-мерный вектор состояния; $\mathbf{U}(t)$ – m-мерный вектор управления; $\mathbf{F}(t)$ – s-мерный вектор возмущения; **A** – собственная матрица объекта размерности $n{\times}n$; **B** – матрица управления размерности $n{\times}m$; **C** – матрица возмущения размерности $n{\times}s$.

В свою очередь, внешнее возмущение $\mathbf{F}(t)$, действующее на объект стабилизации, удовлетворяет векторно-матричному дифференциальному уравнению s-го порядка

$$\overset{\circ}{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{DF}(t) + \mathbf{E}\boldsymbol{\xi}(t), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\xi}(t)$ – векторный единичный “белый шум”, называемый порождающим, и представляющий собой вектор размерности r; **D** – квадратная матрица размерности $s{\times}s$; **E** – прямоугольная матрица размерности $s{\times}r$.

Будем предполагать, что стабилизатор реализует линейный алгоритм стабилизации

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{K_X X}(t) + \mathbf{K_F F}(t), \tag{3}$$

где прямоугольные матрицы $\mathbf{K_X}$ и $\mathbf{K_F}$ имеют размерности $m \times n$ и $m \times s$ соответственно и называются матрицами коэффициентов усиления стабилизатора.

Стабилизатор (3) использует информацию как о компонентах вектора состояния $\mathbf{X}(t)$ стабилизируемого объекта, так и о компонентах вектора возмущения $\mathbf{F}(t)$, действующего на объект. Стабилизатор (3) совмещает в себе два известных принципа управления: принцип регулирования по отклонению и принцип регулирования по возмущению, что придает замкнутой системе стабилизации свойство инвариантности к действию внешнего возмущения.

Целью настоящей работы является разработка алгоритма выбора матриц коэффициентов усиления стабилизатора (3) $\mathbf{K_X}$ и $\mathbf{K_F}$ обеспечивающих требуемое качество замкнутой системы стабилизации.

Основная часть. Качество стабилизатора (3) количественно будем оценивать значением интегрального квадратичного функционала

$$I(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F}) = \underset{j}{M}\left\{\int_0^T \left\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{Q}\,\mathbf{X}(t)\right\rangle dt\right\}, \tag{4}$$

вычисленного на решениях замкнутой системы (1), (2) и (3), где $\mathbf{Q}$ – квадратная симметрическая сильвестрова матрица; $\underset{j}{M}$ – символ математического ожидания по реализации векторного “белого шума” $\xi_j(t)$, $(j=\overline{1,N})$.

Обычно в качестве матрицы $\mathbf{Q}$ используется диагональная матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \beta_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_2^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_n^2 \end{bmatrix},$$

где β_i^2, $(i=\overline{1,n})$ – весовые коэффициенты функционала (4), подлежащие выбору. Тогда функционал (4), может быть записан в виде

$$I(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F}) = \underset{j}{M}\left\{\int_0^T \left[\beta_1^2 x_1^2(t) + \beta_2^2 x_2^2(t) + \ldots + \beta_n^2 x_n^2(t)\right] dt\right\}. \tag{5}$$

Пусть элементы матриц $\mathbf{K_X}$ и $\mathbf{K_F}$ удовлетворяют ограничениям

$$\mathbf{K_X} \in \mathbf{G_X};\ \ \mathbf{K_F} \in \mathbf{G_F},$$

где $\mathbf{G_X}$ – $m \times n$-мерное множество допустимых значений элементов матрицы $\mathbf{K_X}$ $\mathbf{G_F}$ – $m \times s$-мерное множество допустимых элементов матрицы $\mathbf{K_F}$

Для построения множеств $\mathbf{G_X}$ и $\mathbf{G_F}$ предлагается следующий алгоритм:

В уравнение (1) и соотношение (3) полагается $\mathbf{F}(t)=0;$ в результате приходим к однородному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}}(t)=(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_{\mathbf{X}})\mathbf{X}(t); \tag{7}$$

В $m\times n$-мерном пространстве элементов матрицы $\mathbf{K}_{\mathbf{X}}$ строим область устойчивости системы (7), используя метод D-разбиения в пространстве варьируемых параметров системы [1, 2]. Внутри построенной области $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}$ выбираем точку $K^{*}_{X0}\in\mathbf{G}_{\mathbf{X0}},$ в которой система (7) является асимптотически устойчивой.

Рассмотрим расширенную систему размерностью $n+s,$ положив в (2) $\boldsymbol{\xi}(t)=0,$ а в (3) $\mathbf{K}_{\mathbf{X}}=K^{*}_{X}$:

$$\begin{aligned}&\overset{\circ}{\mathbf{X}}(t)=(\mathbf{A}+\mathbf{B}K^{*}_{X0})\mathbf{X}(t)+(\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{K}_{\mathbf{F}})\mathbf{F}(t);\\&\overset{\circ}{\mathbf{F}}(t)=\mathbf{D}\mathbf{F}(t),\end{aligned} \tag{8}$$

В $m\times s$-мерном пространстве элементов матрицы $\mathbf{K}_{\mathbf{F}}$ строим область устойчивости системы (8), (9) $\mathbf{G}_{\mathbf{F0}}$ и выбираем внутри этой области точку .

Переходим к рассмотрению расширенной однородной системы

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}}(t)=(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_{\mathbf{X}})\mathbf{X}(t)+(\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{K}^{*}_{\mathbf{F}})\mathbf{F}(t); \tag{10}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{F}}(t)=\mathbf{D}\mathbf{F}(t); \tag{11}$$

Строим область устойчивости $\mathbf{G}_{\mathbf{X1}}$ и выбираем внутри этой области точку $K^{*}_{X1};$ затем весь процесс повторяется р раз до выполнения неравенств

$$\left\|K^{*}_{Xp}\right\|-\left\|K^{*}_{Xp-1}\right\|\le\varepsilon_X;$$

$$\left\|K^{*}_{Fp}\right\|-\left\|K^{*}_{Fp-1}\right\|\le\varepsilon_F,$$

где ε_X и ε_F – заданные малые числа.

В результате полагаем $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}=\mathbf{G}_{\mathbf{Xn}};$ $\mathbf{G}_{\mathbf{F}}=\mathbf{G}_{\mathbf{Fn}}.$ Следующим шагом решения поставленной задачи является выбор весовых коэффициентов функционала (5), который представим в виде

$$I(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F})=\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2 I_i(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F}), \tag{12}$$

где

$$I_i(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F})=\underset{j}{M}\left\{\int_0^T x_i^2(t)dt\right\},\ (i=\overline{1,n}). \tag{13}$$

Функционалы (13) имеют различные размерности, следовательно, различные размерности должны иметь также весовые коэффициенты $\beta_i,\ (i=\overline{1,n}).$

В этой связи введем обозначения [3]

$$\overline{I}_i^{(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F})}=\frac{1}{x_{i\max}^2}\underset{j}{M}\left\{\int_0^T x_i^2(t)dt\right\}=\frac{I_i(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F})}{x_{i\max}^2}; \tag{14}$$

$$\overline{\beta}_i=\beta_i x_{i\max};\quad (i=\overline{1,n}), \tag{15}$$

где $x_{i\max}$ – максимально допустимое значение компоненты $X_i(t)$ вектора состояния $\mathbf{X}(t).$ Тогда функционал (12) принимает вид

$$I(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F})=\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta}_i^2\,\overline{I}_i(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F}), \tag{16}$$

причем в соотношении (16) все функционалы (14) имеют одинаковые размерности, а весовые коэффициенты (15) безразмерны.

Минимизация функционала (16) по $\mathbf{K_X}\in\mathbf{G_X}$ и $\mathbf{K_F}\in\mathbf{G_F}$ при заданных значениях весовых коэффициентов $\overline{\beta}_i,\ (i=\overline{1,n})$ не вызывает затруднений. В то же время попытка минимизации функционала (16) по $\overline{\beta}_i,\ (i=\overline{1,n})$ без ограничений на эти коэффициенты приводит к тривиальному решению $\overline{\beta}_i=0,\ (i=\overline{1,n})$ при котором функционал (16) обращается в нуль. Во избежание этого на величины коэффициентов $\overline{\beta}_i,\ (i=\overline{1,n})$ наложим ограничение

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta}_i=1. \tag{17}$$

Обозначим через $\overline{I}_i^*,\ (i=\overline{1,n})$ минимальные значения функционалов (14), которые имеют место при минимизации по $\mathbf{K_X}\in\mathbf{G_X}$ и $\mathbf{K_F}\in\mathbf{G_F}$

каждого из этих функционалов в отдельности. Тогда при фиксированных значениях весовых коэффициентов $\bar{\beta}_i, (i=\overline{1,n})$ минимально возможное значение функционала (16) составляет

$$I=\sum_{i=1}^{n}\bar{\beta}_i^2\,\bar{I}_i^*. \tag{18}$$

Отыщем минимум функционала (18) $\bar{\beta}_i, (i=\overline{1,n})$ при ограничении (17). Для решения этой задачи на условный экстремум построим функцию Лагранжа

$$F=\sum_{i=1}^{n}\bar{\beta}_i^2\,\bar{I}_i^*+\lambda\left(1-\sum_{i=1}^{n}\bar{\beta}_i\right) \tag{19}$$

и запишем условия минимума функции (19)

$$\frac{\partial F}{\partial\bar{\beta}_i}=2\bar{\beta}_i\,\bar{I}_i^*-\lambda=0; \tag{20}$$

Из уравнений (20) получаем

$$\bar{\beta}_i=\frac{\lambda}{2\bar{I}_i^*};\ (i=\overline{1,n}). \tag{21}$$

Подставим соотношения (21) в формулу (17). В результате имеем.

$$\lambda=\frac{2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\bar{I}_i^*}}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (21), получаем нормированные значения весовых коэффициентов функционала (16)

$$\bar{\beta}_i=\frac{1}{\bar{I}_i^*\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\bar{I}_i^*}},\ \ (i=\overline{1,n}). \tag{23}$$

С учетом формул (14) и (15) соотношения (23) принимают вид

$$\beta_i=\frac{x_{i\max}1}{I_i^*\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_{i\max}^2}{I_i^*}},\ \ (i=\overline{1,n}). \tag{24}$$

Минимальные значения функционалов I_i, $(i=\overline{1,n})$, а затем, после отыскания весовых коэффициентов (24), и аддитивного функционала (5), отыскиваются в результате решения задачи нелинейного программирования или поиска минимума функции $I(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F})$, вычисляемой на решениях замкнутой системы (1), (2), (3) при N реализациях вектора “белого шума” $\boldsymbol{\xi}(t)$, по $\mathbf{K_X}\in\mathbf{G_X}$ и $\mathbf{K_F}\in\mathbf{G_F}$. К уравнениям возмущенного движения замкнутой системы стабилизации

$$\begin{aligned}&\overset{\circ}{\mathbf{X}}(t)=(\mathbf{A}+\mathbf{B}K_X^*)\mathbf{X}(t)+(\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{K_F})\mathbf{F}(t);\\&\overset{\circ}{\mathbf{F}}(t)=\mathbf{D}\mathbf{F}(t)+\mathbf{E}\boldsymbol{\xi}(t),\end{aligned}\tag{25}$$

добавим уравнение

$$\overset{\circ}{\mathrm{x}}_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t})=\beta_1^2\mathrm{x}_1^2(\mathrm{t})+\beta_2^2\mathrm{x}_2^2(\mathrm{t})+\ldots+\beta_\mathrm{n}^2\mathrm{x}_\mathrm{n}^2(\mathrm{t}).\tag{26}$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений $n+s+1$ порядка на интервале $[0,T]$ с нулевыми начальными условиями $\mathbf{X}(0)=0;$ $\mathbf{F}(0)=0;$ $x_{n+1}(0)=0$ при различных реализациях векторного “белого шума” $\boldsymbol{\xi}_j(t)$, $(j=\overline{1,N})$, получаем

$$I(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F})=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_{n+1}^j(t,\mathbf{K_X},\mathbf{K_F}),\tag{27}$$

где $x_{n+1}^j(t,\mathbf{K_X},\mathbf{K_F})$ – решение уравнения (26) при *j*-ой реализации векторного “белого шума” $\boldsymbol{\xi}_j(t)$, $(j=\overline{1,N})$.

Если векторный случайный процесс $\mathbf{X}(t)$ является стационарным или квазистационарным, то в этом случае функция (27) может быть вычислена при единственной реализации векторного “белого шума”.

$$I(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F})=x_{n+1}(t,\mathbf{K_X},\mathbf{K_F}).\tag{28}$$

В общем случае функции (27) и (28) являются функциями $(m\times n)+(m\times s)=m\times(n+s)$ аргументов, являющихся варьируемыми параметрами системы. Оптимальные значения этих параметров отыскиваются путем решения задачи нелинейного программирования [4]

$$\min_{K_X\in G_X}\ \min_{K_F\in G_F}\ I(\mathbf{K_X},\mathbf{K_F})=I(\mathbf{K_X^*},\mathbf{K_F^*}),$$

где $\mathbf{K}_\mathbf{X}^*$, $\mathbf{K}_\mathbf{F}^*$ – оптимальные значения матричных варьируемых параметров, доставляющих минимум функциям (27) и (28).

Выводы. Предложена методика синтеза оптимальной системы стабилизации, инвариантной к действию внешних возмущений. Свойство инвариантности достигаются путем использования в алгоритме стабилизации информации о внешних возмущениях, действующих на объект стабилизации. Предложена методика выбора весовых коэффициентов аддитивного квадратичного интегрального критерия качества, являющегося количественной оценкой точности системы стабилизации.

Список литературы: **1.** *Александров Є. Є.* Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. Т. 1. Теорія автоматичного керування / *Є. Є. Александров, Е. П. Козлов, Б. І. Кузнєцов*. – Харків : НТУ "ХПІ", 2002. – с. **2.** *Александрова Т. Е.* Построение областей устойчивости сложных систем в плоскости варьируемых параметров // *Т. Е. Александрова, И. В. Костяник* // Колесные и гусеничные машины специального назначения. Вестник НТУ "ХПИ". – 2003. – Вып. 28. – С. 23–28. **3.** *Александров Е. Е.* Выбор оптимизируемого функционала в задачах параметрического синтеза систем стабилизации // *Е.Е. Александров, Т. Е. Александрова* // Артиллерийское и стрелковое вооружение. – 2004. – № 2(11). – С. 23–26. **4.** *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование / *Д. Химмельблау*. – М. : Мир, 1975. – 536 с.

Надійшла до редколегії 30.10.2013

УДК 62-503.4

К вопросу синтеза линейных инвариантных систем стабилизации / Т. Е. Александрова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – № 62 (1035). – С. 152–158. – Бібліогр.: 4 назв.

Запропоновано методику синтезу лінійних інваріантних систем стабілізації, що включає вибір вагових коефіцієнтів інтегрального квадратичного функціоналу якості.

Ключові слова: система стабілізації, інваріантність, інтегральний квадратичний функціонал.

Proposed the technique of the synthesis of linear invariant stabilization systems, including the choice of weighting coefficients of the integral quadratic functional quality.

Keywords: stabilization system, invariance, integral quadratic functional.