УДК 519.87 DOI: 10.20998/2079-0023.2022.01.02

Л. Г. РАСКІН, Л. В. СУХОМЛИН

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗПОДІЛУ РЕСУРСУ В УМОВАХ НЕЧІТКИХ ВИХІДНИХ ДАНИХ

Розглянуто задачу розподілу ресурсу за декількома напрямками його витрачання для випадку, коли параметри критерію ефективності розподілу є нечіткими числами із заданими функціями належності. Мета дослідження – розробка математичних моделей та методів розв'язання задачі розподілу ресурсу для практично найважливіших критеріїв з урахуванням нечіткості числових значень їх параметрів. Проведено аналіз відомого підходу до розв'язання задачі та виявлено основні його недоліки, що мотивують продовження досліджень. Запропоновано метод розв'язання поставленої задачі, обчислювальна реалізація якого містить три етапи. На першому етапі з використанням функцій належності нечітких параметрів задачі формується функція належності критерію. Отримувана при цьому функція на другому етапі апроксимується з використанням чотирьохпараметричного розподілу. Важлива перевага цього розподілу полягає у можливості шляхом варіації числових значень його параметрів у широкому діапазоні змінювати математичне очікування, дисперсію і асиметрію величин, що задаються цим розподілом, забезпечуючи високу якість апроксимації. Отже визначається критерій ефективності задачі. На третьому етапі формулюється математична модель оптимізаційної задачі розподілу обмеженого ресурсу. Розглянуто такі три варіанти побудови критерію оптимальності: максимізація критерію за максимально можливого значення його функції належності; максимізація критерію за умови, що значення його функції належності не нижче заданого; максимізація критерію за умови, що значення функції належності кожного його доданка буде не нижче заданого. Кожна з задач, що при цьому є стандартною задачею математичного програмування і розв'язується відомими методами. Обговорюється можливий напрямок подальших досліджень з метою підвищення адекватності використовуваних аналітичних описів функцій належності нечітких параметрів задачі.

Ключові слова: задача раціонального розподілу обмеженого ресурсу, нечіткий опис критерію, математична модель та метод розв'язання.

L. G. RASKIN, L. V. SUHOMLIN

OPTIMIZATION OF RESOURCE DISTRIBUTION UNDER THE CONDITIONS OF FUZZY INITIAL DATA

The problem of resource distribution in several directions of its spending is considered for the case when the parameters of the distribution efficiency criterion are fuzzy numbers with given membership functions. The purpose of the study is the development of mathematical models and methods for solving the problem of resource allocation for practically the most important criteria, taking into account the fuzziness of the numerical values – of their parameters. An analysis of the well-known approach to solving the problem is carried out and its main shortcomings are identified, which motivate the continuation of research. A method for solving the stated problem is proposed, the computational implementation of which contains three stages. At the first stage, using the membership functions of the fuzzy parameters of the problem, the membership function of the criterion is formed. The function obtained in this case is approximated at the second stage using a four-parameter distribution. An important advantage of this distribution is the possibility, by varying the numerical values – of its parameters over a wide range, to change the mathematical expectation, variance, and asymmetry of the values – specified by this distribution, providing a high quality of approximation. Thus, the criterion for the effectiveness of the task is determined. At the third stage, a mathematical model of the optimization problem of the distribution of a limited resource is formulated. The following three options for constructing an optimality criterion are considered: maximizing the criterion with the maximum possible value of its membership function; maximization of the criterion, provided that the value of its membership function is not lower than the specified one; maximization of the criterion, provided that the value of the membership function of each of its terms is not lower than the specified one. Each of the resulting problems is a standard problem of mathematical programming and is solved by known methods. A possible direction for further research is discussed in order to improve the adequacy of the used analytical descriptions of the membership functions of the fuzzy parameters of the problem.

Keywords: problem of rational distribution of a limited resource, fuzzy description of the criterion, mathematical model and solution method

Вступ. Розглянемо змістовний опис економічної системи, для управління якої актуальною є задача оптимального розподілу обмеженого ресурсу. Нехай система складається з головного підприємства (центру) та підпорядкованих йому підрозділів, розташованих, як правило, територіально далеко від центру (в інших країнах, містах, віддалених районах великого міста). Такі підрозділи називатимемо елементами системи. Структура управління всієї системи зосереджена у центрі, проте елементам делеговані певні повноваження, які у самостійному визначенні структури витрат, системі стимулювання персоналу та інше. Вважатимемо, що елементи в такій системі є рівноправними підрозділами – філіями головного підприємства без утворення юридичної особи, або складами – магазинами. Обмеженим ресурсом у системі є певна сума вільних коштів, призначених для розподілу між елементами системи з метою отримання максимального сумарного прибутку. Якщо число елементів у такій системі велике, то перед центром виникає нетривіальна проблема обґрунтованого розподілу наявного обмеженого ресурсу. Рівень складності оптимізаційної задачі, що отримується, визначається характером взаємозв'язку між величиною вкладених коштів і очікуваним прибутком.

Надалі приймемо, що система організаційно складається з одного керуючого елемента (центру) та кількох підлеглих йому елементів.

Співвідношення, що пов'язує витрати та випуск продукції, прийнято називати виробничою функцією.

Нехай

x – обсяг витрат, виражений у вартісних одиницях,

z – обсяг випуску, виражений у вартісних одиницях.

Тоді співвідношення $y = f(x)$ визначає виробничу функцію. В економічній теорії застосовуються різні види виробничих функцій. Проте всі вони мають характерну особливість, що відображає відомий економічний принцип «зменшуваної ефективності» [1, 2].

Постановка задачі. Розглянемо математичну постановку задачі розподілу ресурсу у дворівневій системі «центр – елементи». Задамо як $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ множину елементів виробничої системи, що випускає продукцію, споживаючи при цьому один вид ресурсу, що у розпорядженні управляючого органу системи (центру) у кількості C. Через $\tilde{x}_j, \tilde{z}_j$ позначимо відповідно обсяг використовуваного ресурсу та розмір доходу для j-го елемента.

Виробнича функція для кожного елемента є опуклою вгору, безперервною і неубутною в області свого визначення. Типова виробнича функція елемента системи має такий вигляд:

$$z_j = f_j\left(x_j, \Theta_j\right) = a_{0j} x_j^{a_{1j}}, \; j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

Тут елементи вектора $\Theta_j = (a_{0j}, a_{1j})$ однозначно визначають належності виробничої функції для j-го елемента системи, причому завжди виконується умова $a_{1j} < 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Стратегія центру полягає у пошуку набору $\{x_j\}$, що максимізує

$$Z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j, \Theta_j) \qquad (2)$$

та задовольняє обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C, \; x_j \geq 0. \qquad (3)$$

Отримана задача легко розв'язується методом невизначених множників Лагранжа. Однак рівень корисності одержуваного розв'язку незадовільний з огляду на неадекватність фактично використаного при побудові моделі жорсткого припущення про детермінованість її параметрів. Реальна неповна поінформованість центру щодо виробничих функцій елементів призводить до необхідності відмовитися від цієї гіпотези.

Математичні моделі та методи розв'язання задачі. Можливі наступні реалістичні моделі опису виробничих функцій елементів системи:

- центру точно відомі коефіцієнти a_{0j}, a_{1j};
- параметри виробничої функції елемента a_{0j}, a_{1j} – випадкові величини та центру відомі закони розподілу цих випадкових величин;
- параметри виробничої функції елемента задані лише з точністю до певного діапазону.

Розглянемо тепер ситуацію, коли рівень невизначеності такий, що закони розподілу параметрів виробничих функцій (і, отже, закон розподілу виграшу) невідомі, і через будь-які об'єктивні причини, статистичне оцінювання параметрів цих законів неможливе.

Для розв'язання задачі в цій ситуації природно використовувати апарат нечітких множин [3–6]. У межах цього підходу задача оптимального розподілу обмеженого ресурсу можливо сформулювати наступним чином.

Нехай $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $X \in R_n$ – задана універсальна множина альтернатив розподілу ресурсу.

Підмножина допустимих альтернатив описується рівністю

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C \qquad (4)$$

і нерівностями $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Чисельне значення критерію ефективності конкретної альтернативи X оцінюється значенням функції

$$F(X, A) = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j, a_{0j}, a_{1j}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j^{a_{1j}}, \qquad (5)$$

де $f_j\left(x_j, a_{0j}, a_{1j}\right)$ – виробнича функція j-го елемента системи $A = \left(a_{01}, a_{11}, a_{02}, a_{11}, \ldots, a_{0n}, a_{1n}\right)$.

Вважатимемо, що параметри задачі (компоненти вектора A) задані у вигляді нечітких чисел з функціями належності

$$M_j^{(0)}(a_{0j}), \; M_j^{(1)}(a_{1j}), \; j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6)$$

З практичних міркувань задамо a_0 нормальним нечітким числом з трикутною функцією належності $M^{(0)}(a_0)$ та носієм $[a_{0\min}, a_{0\max}]$, $M^{(0)}(a_{0\text{НВ}}) = 1$, де $a_{0\text{НВ}}$ – найбільш ймовірне значення параметра a_0. Позначимо $a_{0\text{НВ}} = c_0$. Тут і нижче, там, де це не викликає непорозумінь, індекс j для простоти опущений. Графік функції належності $M^{(0)}(a_0)$ наведено на рис. 1.

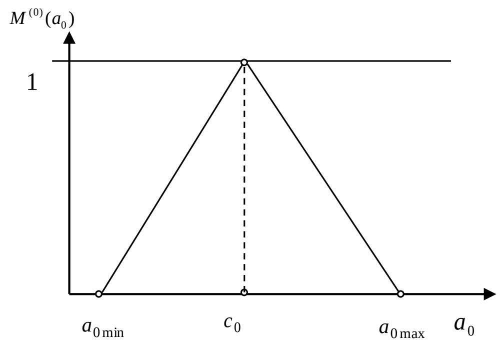

Рис. 1. Функція належності $M^{(0)}(a_0)$

Тоді функція належності параметра a_0 має вигляд:

$$M^{(0)}(a_0) = \begin{cases} 0, a_0 < a_{0\min}, \\ \dfrac{a_0 - a_{0\min}}{c_0 - a_{0\min}}, a_0 \in [a_{0\min}, c_0], \\ \dfrac{a_{0\max} - a_0}{a_{0\max} - c_0}, a_0 \in [c_0, a_{0\max}], \\ 0, a_0 > a_{0\max}. \end{cases} \qquad (7)$$

Аналогічно, задамо a_1 нормальним нечітким числом з трикутною функцією належності $M^{(1)}(a_1)$ та носієм $[a_{1\min}, a_{1\max}]$, $M^{(1)}(a_{1\text{НВ}}) = 1$, де $a_{1\text{НВ}}$ найбільш ймовірне значення параметра a_1. Позначимо $a_{1\text{НВ}} = c_1$. Графік функції належності $M^{(1)}(a_1)$ має вигляд, аналогічний графіку функції $M^{(0)}(a_0)$.

Функція належності параметра a_1 має вигляд:

$$M^{(1)}(a_1) = \begin{cases} 0, a_1 < a_{1\min}, \\ \dfrac{a_1 - a_{1\min}}{c_1 - a_{1\min}}, a_1 \in [a_{1\min}, c_1], \\ \dfrac{a_{1\max} - a_1}{a_{1\max} - c_1}, a_1 \in [c_1, a_{1\max}], \\ 0, a_1 > a_{1\max}. \end{cases} \quad (8)$$

Зрозуміло, що з нечіткості опису параметрів задачі оцінка ефективності будь-якої альтернативи є нечітке число.

Традиційний підхід до розв'язання задачі максимізації нечітко заданої функції (5) при обмеженнях (4) зводиться до наступного [7, 4, 8].

Нехай $A^{(0)} = \left(a_{0j}^{(0)}, a_{1j}^{(0)}\right)$, $j = 1, 2, \dots, n,$ – певний конкретний набір значень a_{0j}, a_{1j}, $j = 1, 2, \dots, n$. Ступені належності цих значень заданим нечітким множинам рівні відповідно $M_j^{(0)}(a_{0j}^{(0)})$, $M_j^{(1)}(a_{1j}^{(0)})$, $j = 1, 2, \dots, n$. Введемо

$$\eta_0 = \min_j \left\{ \min\left(M_j^{(0)}(a_{0j}^{(0)}), M_j^{(1)}(a_{1j}^{(0)}) \right) \right\}. \quad (9)$$

Нехай тепер $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ – певний конкретний набір змінних $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а число $\hat{r}_0 = F\left(\hat{x}, A^{(0)}\right)$ є значенням функції (5), що відповідає альтернативі $\hat{X}$.

Природно прийняти, що це значення належить нечіткою оцінці альтернативи $\hat{X}$ зі ступенем, не меншим η_0. З огляду на це може бути сформована нечітка цільова функція

$$\phi(X, r) = \max_{A \in Q(X,r)} \left(\eta(A)\right), \quad (10)$$

де

$$\eta(A) = \min_j \left\{ \min\left(M_j^{(0)}(a_{0j}), M_j^{(1)}(a_{1j}) \right) \right\}, \quad (11)$$

$$Q(X, r) = \left\{ A : F(X, A) = r \right\}. \quad (12)$$

Якщо зафіксувати допустимі значення функцій належності $M_j^{(0)}(a_{0j})$, $M_j^{(1)}(a_{1j})$ нечітко заданих параметрів a_{0j}, a_{1j}, $j = 1, 2, \dots, n,$ на рівні α, то отримаємо таку задачу математичного програмування.

Знайти X^*, A такі, що

$$X^* = \arg\max_X \max_{A \in Q(X,r)} F\left(x^*, A\right), \quad (13)$$

при обмеженнях

$$\min\left(M_j^{(0)}(a_{0j}), M_j^{(1)}(a_{1j}) \right) \geq \alpha, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Таким чином, сформульована задача відшукання набору $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right)$, що забезпечує максимально можливе значення $r^* = F\left(x^*, A\right)$ за умови, що нечітко задані параметри задачі a_{0j}, a_{1j}, $j = 1, 2, \dots, n$, належать відповідним нечітким множинам зі степенем, не нижче α.

Ця задача, при конкретних, заданих аналітично цільовій функції $F(x, A)$ та функціях належності $M_j^{(0)}$, $M_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \dots, n$, розв'язується із застосуванням чисельних методів, наприклад, методом Нелдера – Міда. Разом з тим, незважаючи на традиційну використаність описаного підходу, його не можна вважати цілком задовільним. Недоліки описаного підходу зумовлені таким.

Чітка функція чіткого аргументу з нечітко заданим параметром деяким, іноді складним чином відображає його в нечітке число. Припустимо, що нечітко заданий параметр набуває конкретного значення в межах області, що відповідає значенню своєї функції належності не нижче заданого. При цьому, оскільки нечіткий опис функції відсутній, нічого не можна сказати щодо того, яке значення функції належності, що відповідає обраному значенню аргументу. При цьому неможливо відповісти на питання про те, чи воно належить інтервалу значень цієї функції належності не нижче заданого. Зазначена обставина проявляється особливо демонстративно, якщо аргумент функції векторний.

Додаткові проблеми тут виникають у зв'язку з тим, що різні параметри цільової функції можуть порізному впливати на результат. У зв'язку з цим допустимий рівень належності нечітких параметрів задачі може бути різним.

Перелічені проблеми можуть бути подолані, якщо за заданими функціями належності параметрів отримати функцію належності критерію. У цьому, зокрема, у нечіткій задачі оптимального розподілу ресурсу потрібно спочатку знайти функції належності для виробничих функцій елементів системи $f_j\left(x_j, a_{0j}, a_{1j}\right)$, $j = 1, 2, \dots, n$ та далі для критеріальної функції (5). Припустимо, що ця задача розв'язана і $M_j\left(f_j\left(x_j\right)\right)$ – функції належності для нечітких чисел $f_j\left(x_j\right)$, $j = 1, 2, \dots, n$, а $M_\Sigma\left(F(X)\right)$ – функція належності нечіткого числа $F(X, A)$. Тоді можна сформувати такі нечіткі задачі раціонального розподілу ресурсу.

Постановка першої задачі виглядає так.

Нехай довільному набору $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ відповідає $F(X) = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right)$ з функцією належності $M_\Sigma\left(F(X)\right)$. Визначимо

$$F^*\left(X\right)=\arg\max_{F(X)}M_\Sigma\left(F\left(X\right)\right). \qquad (16)$$

Формулюємо задачу пошуку розподілу ресурсу так:
Знайти

$$X^*=\arg\max_X F^*\left(X\right)=\arg\max_X \max_{F(X)} M_\Sigma\left(F\left(X\right)\right). \qquad (17)$$

При цьому знаходиться набір максимізуючий критерій ефективності розподілу при максимально можливому рівні функції належності.

Постановку другої задачі можна сформулювати в такий спосіб.

Для функції належності $M_\Sigma\left(F\left(X\right)\right)$ введемо інтервал

$$L_\Sigma(X)=\left\{F\left(X\right):M_\Sigma\left(F\left(X\right)\right)\geq\alpha\ M_\Sigma\left(F^*\left(X\right)\right)\right\}. \qquad (18)$$

Визначимо тепер

$$\underline{F}\left(X\right)=\arg\min_{F(X)\in L_\Sigma(X)}M_\Sigma\left(F\left(X\right)\right). \qquad (19)$$

Значення $\underline{F}\left(X\right)$ задає песимістичну оцінку критеріальної функції, для якої значення функції належності не нижче заданого. Тепер задачу оптимізації формулюємо так:
знайти

$$X^*=\arg\max_X \underline{F}\left(X\right). \qquad (20)$$

Набір X^* визначає максимальну стратегію розподілу ресурсу.

І, нарешті, постановка третьої задачі виглядає так.

Нехай кожному x_j відповідає $f(x_j)$ з функцією належності, $M_j\left(f_j(x_j)\right)$, $j=1,2,\ldots,n$. Введемо

$$u_j^0=\arg\max_{f_j(x_j)}M_j\left(f_j(x_j)\right),\quad j=1,2,\ldots,n \qquad (21)$$

а також інтервали

$$L_j(x_j)= \\ =\left\{f(x_j):M_j\left(f(x_j)\right)\geq\alpha\ M_j\left(u_j^0\right)\right\}, j=1,2,\ldots,n. \qquad (22)$$

Визначимо тепер

$$\underline{u}_j=\arg\min_{f_j(x_j)\in L_j(x_j)}M_j\left(f_j(x_j)\right),\quad j=1,2,\ldots,n. \qquad (23)$$

Значення $\underline{u}_j$ визначають граничні, песимістичні значення $f(x_j)$, котрим значення функцій належності не нижче заданого.

Тепер задачу розподілу можна сформулювати так:
Знайти

$$X^*=\arg\max_X\sum_{j=1}^n\left(\underline{u}_j\left(x_j\right)\right). \qquad (24)$$

При цьому знаходиться набір, що максимізує критерій за умови, що функція належності для кожного з доданків набуває значення не нижче заданого.

Усі три сформульовані задачі є стандартними задачами математичного програмування та розв'язуються чисельними методами.

Для розв'язання першої з поставлених задач, необхідно знайти функції належності для виробничих функцій елементів системи $f_j\left(x_j,a_{0j},a_{1j}\right)$, $j=1,2,\ldots,n$, а потім для критеріальної функції (5).

З цією метою отримаємо безперервну апроксимацію функції належності прибутку елемента $M\left(u\right)$ для заданих $a_{0\min},a_{0\max},a_{1\min},a_{1\max}$.

Для апроксимації $j=1,2,\ldots,n$ вибрано наступне вираження:

$$\tilde{M}\left(u\right)=\Theta_0\exp\left\{-\frac{\left(u-\Theta_1\right)}{2\left(\Theta_2\right)^2}\left(1+\Theta_3\mathrm{sign}\left(u-\Theta_1\right)\right)\right\}, \qquad (25)$$

де Θ_0 – параметр, що задає максимальне значення функції $\tilde{M}\left(u\right)$;

Θ_1 – параметр, що визначає значення u, що максимізує функцію $\tilde{M}\left(u\right)$;

Θ_2 – Параметр, що визначає розкид значень u щодо Θ_1;

Θ_3 – Параметр, що визначає можливості функції $\tilde{M}\left(u\right)$ щодо асиметрії.

На множені значень $x_1,x_2,\ldots,x_n$ будується набір функціоналів:

$$J\left(x_j\right)=\int_{u_{\min}(x_j)}^{u_{\max}(x_j)}\left(M\left(u,x_j\right)-\tilde{M}\left(u,x_j\right)\right)^2du=$$

$$=\int_{u_{\min}(x_j)}^{u_{\max}(x_j)}\phi\left(u,x_j\right)du\Rightarrow\min,\ j=1,2,\ldots,n. \qquad (26)$$

Мінімізація (26) по Θ_0, Θ_1, Θ_2, Θ_3 для x_1, $x_2,\ldots,x_n$ дає сукупність наборів параметрів:

$x_{1\_}$ Θ_{10}, Θ_{11}, Θ_{12}, Θ_{13};
$x_{2\_}$ Θ_{20}, Θ_{21}, Θ_{21}, Θ_{23};
…
$x_{n\_}$ Θ_{n0}, Θ_{n1}, Θ_{n2}, Θ_{nn}.

Для опису залежності параметрів Θ_0, Θ_1, Θ_2 та Θ_3 використовується апроксимація поліномами другого степіня:

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}_0&=b_{00}+b_{01}x+b_{02}x^2;\\ \tilde{\Theta}_1&=b_{10}+b_{11}x+b_{12}x^2;\\ \tilde{\Theta}_2&=b_{20}+b_{21}x+b_{22}x^2;\\ \tilde{\Theta}_3&=b_{30}+b_{31}x+b_{32}x^2.\end{aligned} \qquad (27)$$

Отже, розв'язана задача аналітичного опису функції належності доходу залежно від ресурсу, що вкладається, для кожного елемента системи, що відповідає конкретним значенням $a_{0\min}$, c_0, $a_{0\max}$, $a_{1\min}$, c_1, $a_{1\max}$, що задає нечіткі функції належності вихідних параметрів задачі. При цьому параметри квадратичних моделей залежать від $a_{0\min}$, c_0, $a_{0\max}$, $a_{1\min}$, c_1, $a_{1\max}$.

Введемо фактори $F_1 = a_{0\min}$, $F_2 = c_0$, $F_3 = a_{0\max}$, $F_4 = a_{1\min}$, $F_5 = c_1$, $F_6 = a_{1\max}$.

Залежності властивостей b_{ik}, $i = 0,1,2,3$, $k = 0,1,2$, від $a_{0\min}$, c_0, $a_{0\max}$, $a_{1\min}$, c_1, $a_{1\max}$ знаходяться для різних варіантів поліномів:

B1:

$$\begin{aligned} b_{ik} &= C_{0ik} + C_{1ik}F_1 + C_{2ik}F_2 + \\ &+ C_{3ik}F_3 + C_{4ik}F_4 + C_{5ik}F_5 + C_{6ik}F_6; \end{aligned}$$

B2:

$$\begin{aligned} b_{ik} &= C_{0ik} + C_{1ik}F_1 + C_{2ik}F_2 + \\ &+ C_{3ik}F_3 + C_{4ik}F_4 + C_{5ik}F_5 + C_{6ik}F_6 + \\ &C_{7ik}F_1^2 + C_{8ik}F_2^2 + C_{9ik}F_3^2 + \\ &+ C_{10ik}F_4^2 + C_{11ik}F_5^2 + C_{12ik}F_6^2; \end{aligned}$$

B3:

$$\begin{aligned} b_{ik} &= C_{0ik} + C_{1ik}F_1 + C_{2ik}F_2 + C_{3ik}F_3 + \\ &+ C_{4ik}F_4 + C_{5ik}F_5 + C_{6ik}F_6 + \\ &+ C_{7ik}F_1F_2 + C_{8ik}F_1F_3 + C_{9ik}F_2F_3 + \\ &+ C_{10ik}F_4F_5 + C_{11ik}F_4F_6 + C_{12ik}F_5F_6; \end{aligned}$$

B4:

$$\begin{aligned} b_{ik} &= C_{0ik} + C_{1ik}F_1 + C_{2ik}F_2 + C_{3ik}F_3 + \\ &+ C_{4ik}F_4 + C_{5ik}F_5 + C_{6ik}F_6 + \\ &+ C_{7ik}F_1F_2 + C_{8ik}F_1F_3 + C_{9ik}F_1F_4 + \\ &+ C_{10ik}F_1F_5 + C_{11ik}F_1F_6 + \\ &+ C_{12ik}F_2F_3 + C_{13ik}F_2F_4 + \\ &+ C_{14ik}F_2F_5 + C_{15ik}F_2F_6 + \\ &+ C_{16ik}F_3F_4 + C_{17ik}F_3F_5 + C_{18ik}F_3F_6 + \\ &+ C_{19ik}F_4F_5 + C_{20ik}F_4F_6 + C_{21ik}F_5F_6. \end{aligned} \qquad (28)$$

Коректність використання кожної з моделей визначається під час перевірки адекватності.

Методика забезпечує розрахунок функції належності елемента для будь-якого набору параметрів $a_{0\min}$, c_0, $a_{0\max}$, $a_{1\min}$, c_1, $a_{1\max}$, що характеризують цей елемент системи.

Введемо процедуру отримання функції належності доходу елемента:

Отримання Θ_0, , Θ_1, , Θ_2, Θ_3 при фіксованих $a_{0\min}$, c_0, $a_{0\max}$, $a_{1\min}$, c_1, $a_{1\max}$ і x.

Отримання $\Theta_0(x)$, $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x)$, $\Theta_3(x)$ при фіксованих $a_{0\min}$, c_0, $a_{0\max}$, $a_{1\min}$, c_1, $a_{1\max}$.

Апроксимація b_{ik} функціями, що залежать $a_{0\min}$, c_0, $a_{0\max}$, $a_{1\min}$, c_1, $a_{1\max}$ отримує функцію належності виграшу елемента.

Наведемо методику розрахунку функції належності нечіткого виграшу системи.

Функція належності доходу першого елемента має вигляд:

$$M_1(u) = \Theta_{10}\exp\left\{-\frac{(u-\Theta_{11})^2}{2\Theta_{12}^2}\left(1+\Theta_{13}\operatorname{sign}(u-\Theta_{11})\right)\right\} = \\ = \begin{cases} \Theta_{10}\exp\left\{-\dfrac{(u-\Theta_{11})^2}{2\Theta_{12}^2}(1-\Theta_{13})\right\}, u \le \Theta_{11}; \\ \Theta_{10}\exp\left\{-\dfrac{(u-\Theta_{11})^2}{2\Theta_{12}^2}(1+\Theta_{13})\right\}, u > \Theta_{11}. \end{cases} \qquad (29)$$

Вводиться $\Theta_{121} = \dfrac{\Theta_{12}}{(1-\Theta_{13})^{\frac{1}{2}}}$, $\Theta_{122} = \dfrac{\Theta_{12}}{(1+\Theta_{13})^{\frac{1}{2}}}$.

Тоді для першого елемента:

$$M_1(u) = \begin{cases} \Theta_{10}\exp\left\{-\dfrac{(u-\Theta_{11})^2}{2\Theta_{121}^2}\right\}, u \le \Theta_{11}; \\ \Theta_{10}\exp\left\{-\dfrac{(u-\Theta_{11})^2}{2\Theta_{122}^2}\right\}, u > \Theta_{11}. \end{cases} \qquad (30)$$

Аналогічно для другого елемента:

$$M_2(u) = \begin{cases} \Theta_{20}\exp\left\{-\dfrac{(u-\Theta_{21})^2}{2\Theta_{221}^2}\right\}, u \le \Theta_{21}; \\ \Theta_{20}\exp\left\{-\dfrac{(u-\Theta_{21})^2}{2\Theta_{222}^2}\right\}, u > \Theta_{21}. \end{cases} \qquad (31)$$

У виразах (30, 31) індекси при параметрах позначають таке: перший указує номер елемента, другий – номер коефіцієнта, третій – номер діапазону.

Функція належності доходу системи із двох елементів $z = u_1 + u_2$ має вигляд:

$$\begin{aligned} M(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} M_1(u_1)M_2(z\text{-}u_1)du_1 = \\ &= \Theta_{10}\Theta_{20}\left[\int_{-\infty}^{\Theta_{11}} \exp\left\{-\left[\frac{(u-\Theta_{11})^2}{2\Theta_{121}^2} + \frac{(z-u-\Theta_{21})^2}{2\Theta_{221}^2}\right]\right\}du + \right. \\ &+ \int_{\Theta_{11}}^{\Theta_{21}} \exp\left\{-\left[\frac{(u-\Theta_{11})^2}{2\Theta_{122}^2} + \frac{(z-u-\Theta_{21})^2}{2\Theta_{221}^2}\right]\right\}du + \\ &+ \left.\int_{\Theta_{21}}^{\infty} \exp\left\{-\left[\frac{(u-\Theta_{11})^2}{2\Theta_{122}^2} + \frac{(z-u-\Theta_{21})^2}{2\Theta_{222}^2}\right]\right\}du\right]. \end{aligned} \qquad (32)$$

В результаті інтегрування маємо

Для інтервалу $(-\infty, \Theta_{11}]$:

$$M_{-\infty}^{\Theta_{11}}(\mathrm{z}) =$$

$$= \Theta_{10}\Theta_{20}\exp\left\{-\frac{\left[z-\left(\Theta_{11}+\Theta_{21}\right)\right]^2}{2\left(\Theta_{121}^2+\Theta_{221}^2\right)}\right\}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\dfrac{1}{\Theta_{121}^2}+\dfrac{1}{\Theta_{221}^2}}}.$$

Для інтервалу $\left[\Theta_{11},\Theta_{21}\right]$:

$$M_{\Theta_{11}}^{\Theta_{21}}(\mathrm{z}) = \frac{\sqrt{2\pi}\Theta_{10}\Theta_{20}}{\sqrt{\dfrac{1}{\Theta_{122}^2}+\dfrac{1}{\Theta_{221}^2}}}\exp\left\{-\frac{\left[z-\left(\Theta_{11}+\Theta_{21}\right)\right]^2}{2\left(\Theta_{122}^2+\Theta_{221}^2\right)}\right\}.$$

Для інтервалу $\left(\Theta_{21},\infty\right)$:

$$M_{\Theta_{21}}^{\infty}(\mathrm{z}) = \frac{\sqrt{2\pi}\Theta_{10}\Theta_{20}}{\sqrt{\dfrac{1}{\Theta_{122}^2}+\dfrac{1}{\Theta_{222}^2}}}\exp\left\{-\frac{\left[z-\left(\Theta_{11}+\Theta_{21}\right)\right]^2}{2\left(\Theta_{122}^2+\Theta_{222}^2\right)}\right\}.$$

Тоді

$$M(\mathrm{z}) = \begin{cases} M_{-\infty}^{\Theta_{11}}(\mathrm{z}), & z\in\left(-\infty,\Theta_{11}\right), \\ M_{\Theta_{11}}^{\Theta_{21}}(\mathrm{z}), & z\in\left[\Theta_{11},\Theta_{21}\right], \\ M_{\Theta_{21}}^{\infty}(\mathrm{z}), & z\in\left(\Theta_{21},\infty\right). \end{cases} \qquad (33)$$

Апроксимація $M(z)$:

$$M(\mathrm{z}) = \tilde{\Theta}_0\exp\left\{-\frac{\left(z-\tilde{\Theta}_1\right)^2}{2\tilde{\Theta}_2^2}\left(1+\tilde{\Theta}_3 sign\left(z-\tilde{\Theta}_1\right)\right)\right\}$$

або

$$\tilde{M}(z) = \begin{cases} \tilde{\Theta}_0\exp\left\{-\dfrac{\left(z-\tilde{\Theta}_1\right)^2}{2\tilde{\Theta}_{21}^2}\right\}, z\le\tilde{\Theta}_1; \\ \tilde{\Theta}_0\exp\left\{-\dfrac{\left(z-\tilde{\Theta}_1\right)^2}{2\tilde{\Theta}_{22}^2}\right\}, z>\tilde{\Theta}_1. \end{cases} \qquad (34)$$

$$\tilde{\Theta}_0 = \frac{\sqrt{2\pi}\Theta_{10}\Theta_{20}\Theta_{12}\Theta_{22}}{\sqrt{\Theta_{12}^2+\Theta_{22}^2}\left[1+\dfrac{\Theta_{22}^2\Theta_{13}-\Theta_{12}^2\Theta_{23}}{6\left(\Theta_{12}^2+\Theta_{22}^2\right)}\right]};$$

$$\tilde{\Theta}_1 = \Theta_{11}+\Theta_{21};$$

$$\tilde{\Theta}_2^2 = \frac{\left[\left(\Theta_{12}^2+\Theta_{22}^2\right)^2-\left(\Theta_{12}^2\Theta_{23}+\Theta_{22}^2\Theta_{13}\right)^2\right]}{\left(\Theta_{12}^2+\Theta_{22}^2\right)-\left(\Theta_{12}^2\Theta_{23}^2+\Theta_{22}^2\Theta_{13}^2\right)};$$

$$\tilde{\Theta}_3 = \frac{\Theta_{12}^2\Theta_{13}\left(1-\Theta_{23}^2\right)+\Theta_{22}^2\Theta_{23}\left(1-\Theta_{13}^2\right)}{\Theta_{12}^2\left(1-\Theta_{23}^2\right)+\Theta_{22}^2\left(1-\Theta_{13}^2\right)}.$$

Для системи, що складається з трьох елементів $z' = z+u_3$, де $z = u_1+u_2$.

Для третього елемента системи функція належності має вигляд:

$$M_3(u) = \begin{cases} \Theta_{30}\exp\left\{-\dfrac{\left(u-\Theta_{31}\right)^2}{2\Theta_{321}^2}\right\}, u\le\Theta_{31}; \\ \Theta_{30}\exp\left\{-\dfrac{\left(u-\Theta_{31}\right)^2}{2\Theta_{322}^2}\right\}, u>\Theta_{31}. \end{cases} \qquad (35)$$

Функція належності системи, що складається з трьох елементів, визначається інтегралом згортки:

$$M(z') =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} M_3(u_3)\tilde{M}(\mathrm{z}'\text{-}u_3)du_3 =$$

$$= \Theta_{30}\tilde{\Theta}_0\left[\int_{-\infty}^{\Theta_{31}}\exp\left\{-\frac{\left(u-\Theta_{31}\right)^2}{2\Theta_{321}^2}\right\}\exp\left\{-\frac{\left(z'-u-\tilde{\Theta}_1\right)^2}{2\tilde{\Theta}_{21}^2}\right\}du+\right.$$

$$+\int_{\Theta_{31}}^{\tilde{\Theta}_1}\exp\left\{-\frac{\left(u-\Theta_{31}\right)^2}{2\Theta_{322}^2}\right\}\exp\left\{-\frac{\left(z'-u-\tilde{\Theta}_1\right)^2}{2\tilde{\Theta}_{21}^2}\right\}du+$$

$$\left.+\int_{\tilde{\Theta}_1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\left(u-\Theta_{31}\right)^2}{2\Theta_{322}^2}\right\}\exp\left\{-\frac{\left(z'-u-\tilde{\Theta}_1\right)^2}{2\tilde{\Theta}_{22}^2}\right\}\right] \qquad (36)$$

Апроксимація $M'(z')$:

$$\tilde{M}'(\mathrm{z}') =$$

$$= \tilde{\Theta}_0'\exp\left\{-\frac{\left(z'-\tilde{\Theta}_1'\right)^2}{2\left(\tilde{\Theta}_2'\right)^2}\left(1+\tilde{\Theta}_3' sign\left(z'-\tilde{\Theta}_1'\right)\right)\right\} \qquad (37)$$

У співвідношенні (37):

$$\tilde{\Theta}_1' = \Theta_{11}+\Theta_{21}+\Theta_{31};$$

$$\left(\tilde{\Theta}_2'\right)^2 = \frac{\left(\Theta_{32}^2+\tilde{\Theta}_2^2\right)^2-\left(\Theta_{32}^2\tilde{\Theta}_3+\tilde{\Theta}_2^2\Theta_{33}\right)^2}{\left(\Theta_{32}^2+\tilde{\Theta}_2^2\right)-\left(\Theta_{32}^2\tilde{\Theta}_3^2+\tilde{\Theta}_2^2\Theta_{33}^2\right)};$$

$$\tilde{\Theta}_3' = \frac{\Theta_{32}^2\Theta_{33}\left(1-\tilde{\Theta}_3^2\right)+\tilde{\Theta}_2^2\tilde{\Theta}_3\left(1-\Theta_{33}^2\right)}{\Theta_{32}^2\left(1-\tilde{\Theta}_3^2\right)+\tilde{\Theta}_2^2\left(1-\Theta_{33}^2\right)};$$

$$\tilde{\Theta}_0' = \frac{\sqrt{2\pi}\Theta_{30}\tilde{\Theta}_0\Theta_{32}\tilde{\Theta}_2}{\sqrt{\Theta_{32}^2+\tilde{\Theta}_2^2}\left[1+\dfrac{\tilde{\Theta}_2^2\Theta_{33}-\Theta_{32}^2\tilde{\Theta}_3}{6\left(\Theta_{32}^2+\tilde{\Theta}_2^2\right)}\right]}.$$

Для випадку, коли система складається з n елементів:

$$\Theta_0^{(n)} = \sqrt{2\pi}\Theta_{n0}\Theta_0^{(n-1)}\Theta_{n2}\Theta_2^{(n-1)} \Bigg/ \left(\sqrt{\Theta_{n2}^2+\left(\Theta_2^{(n-1)}\right)^2}\left[1+\frac{\left(\Theta_2^{(n-1)}\right)^2\Theta_{n3}-\Theta_{n2}^2\Theta_3^{(n-1)}}{6\left(\Theta_{n2}^2+\left(\Theta_2^{(n-1)}\right)^2\right)}\right]\right);$$

$$\Theta_1^{(n)} = \Theta_{11}+\Theta_{21}+\ldots+\Theta_{n1};$$

$$\left(\Theta_2^{(n)}\right)^2 = \frac{\left(\Theta_{n2}^2 + \left(\Theta_2^{(n-1)}\right)^2\right)^2 - \left(\Theta_{n2}^2 \Theta_3^{(n-1)} + \left(\Theta_2^{(n-1)}\right)^2 \Theta_{n3}\right)^2}{\left(\Theta_{n2}^2 + \left(\Theta_2^{(n-1)}\right)^2\right) - \left(\Theta_{n2}^2 \left(\Theta_3^{(n-1)}\right)^2 + \left(\Theta_2^{(n-1)}\right)^2 \Theta_{n3}^2\right)};$$

$$\Theta_3^{(n)} = \frac{\Theta_{n2}^2 \Theta_{n3}\left(1 - \left(\Theta_3^{(n-1)}\right)^2\right) + \left(\Theta_2^{(n-1)}\right)^2 \Theta_3^{(n-1)}\left(1 - \Theta_{n3}^2\right)}{\Theta_{n2}^2\left(1 - \left(\Theta_3^{(n-1)}\right)^2\right) + \left(\Theta_2^{(n-1)}\right)^2\left(1 - \Theta_{n3}^2\right)}.$$

Таким чином, отримані співвідношення задають необхідні аналітичні співвідношення для аналітичного опису цільових функцій всіх трьох задач оптимізації розподілу ресурсу. Ці задачі розв'язуються стандартними методами математичного програмування.

Подальші дослідження передбачається провести за такими напрямами: удосконалення технології використання нечіткої математики для опису невизначеності вихідних даних [9, 10]; посилення методів розв'язання багатономенклатурних задач розподілу ресурсів [11, 12].

Список літератури

1. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. *Математические методы в экономике*. Москва: Дело и Сервис, 2001. 368 с.
2. Макконел К. Р., Брю С. Л. *Экономикс.* Москва: Республика, 2011. 1010 с.
3. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and control*. 1965. Vol. 8. P. 338–353.
4. Орловский С. А. *Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации*. Москва: Наука, 1981. 204 с.
5. Кофман А. *Введение в теорию нечетких множеств*. Москва: Радио и связь, 1982. 432 с.
6. Заде Л. А. *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений*. Москва: Мир, 1976. 165 с.
7. Negoita C. V., Sularia M. On fuzzy mathematical programming and tolerances in planning. *ECEESR*. 1976. Vol. 1. P. 3–15.
8. Раскин Л. Г., Серая О. В. *Нечеткая математика*. Харьков: Парус, 2008. 352 с.
9. Раскин Л. Г., Кириченко И. О. *Континуальное линейное программирование*. Харьков: ВИВВ, 2005. 176 с.
10. Раскин Л. Г., Пустовойтов П. Е. Решение многономенклатурной задачи управления запасами по вероятностному критерию. *Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ»*. Харьков: НТУ «ХПИ», 2002. № 13. С. 49–53.
11. Raskin L., Sira O. Fuzzy models of rough mathematics. *Eastern European journal of Enterprise Technologies*. 2016. Vol 5, no. 6. P. 53–60.
12. Raskin L., Sira O. Methods of solving fuzzy problem of mathematical programing. *Eastern European journal of Enterprise Technologies*. 2016. Vol. 5, no. 4. P. 23–28.

References (transliterated)

1. Zamkov O. O., Tolstopyatenko A. V., Cheremnykh Yu. N. *Matematicheskie metodyi v ekonomike* [Mathematical Methods in Economics]. Moscow, Delo i Servis Publ., 2001. 368 p.
2. McConnell C R., Brue S. L. *Economics*. McGraw-Hill Education, 2006. 808 p. (Russ. ed.: Makkonel K. R., Bryu S. L. *Ekonomiks*. Moscow, Respublika Publ., 2011. 1010 p.).
3. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and control*. 1965, vol. 8, pp. 338–353
4. Orlovsky S. A. *Problemyi prinyatiya resheniy pri nechetkoy ishodnoy informatsii* [Decision-making problems with fuzzy initial information]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 204 p.
5. Kofman A. *Vvedenie v teoriyu nechetkih mnozhestv* [Introduction to the theory of fuzzy sets]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1982. 432 p.
6. Zadeh L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*. 1975, vol. 8, issue 3, pp. 199–249. (Russ. ed.: Zadeh L. A. *Ponyatie lingvisticheskoy peremennoy i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennyih resheniy*. Moscow, Respublika Publ., 2011. 1010 p. Mir Publ., 1976. 165 p.).
7. Negoita C. V., Sularia M. On fuzzy mathematical programming and tolerances in planning. *ECEESR*. 1976, vol. 1, pp. 3–14.
8. Raskin L. G., Seraya O. V. *Nechetkaya matematika* [Fuzzy Mathematics]. Kharkov, Parus Publ., 2008. 352 p.
9. Raskin L. G., Kirichenko I. O. *Kontinualnoe lineynoe programmirovanie* [Continuum linear programming]. Kharkov, VIVV Publ., 2005. 176 p.
10. Raskin L. G., Pustovoitov P. E. Reshenie mnogonomenklaturnoy zadachi upravleniya zapasami po veroyatnostnomu kriteriyu [Solution of a multi-product inventory management problem by a probabilistic criterion]. *Vestnik Nats. tekhn. un-ta "KhPI"* [Bulletin of the National tech. University "KhPI"]. Kharkov, 2002, no. 13, pp. 49–53.
11. Raskin L., Sira O. Fuzzy models of rough mathematics. *Eastern European journal of Enterprise Technologies*. 2016, vol. 5, no. 6, pp. 53–60.
12. Raskin L., Sira O. Methods of solving fuzzy problem of mathematical programing. *Eastern European journal of Enterprise Technologies*. 2016, vol. 5, no. 4, pp. 23–28.

Надійшла (received) 30.04.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Раскін Лев Григорович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри розподілених інформаційних систем і хмарних технологій, Національний технічний університет «ХПІ», Харків, Україна; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9015-4016.; e-mail: topology@ukr.net;

Сухомлин Лариса Вадимівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри менеджменту, Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Кременчук, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9511-5932; e-mail: lar.sukhomlyn@gmail.com.

Lev Raskin – Doctor of Technical Sciences**,** Professor, Professor of the Department of Distributed Information Systems and Cloud Technologies, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine; e-mail:topology@ukr.net; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9015-4016.

Larysa Sukhomlyn – Candidate of Technical Sciences (PhD), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Management, Kremenchuk Mikhail Ostrogradskiy National University, Kremenchuk, Ukraine; e-mail: lar.sukhomlyn@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9511-5932.