

О. С. КОНЧАКОВСЬКА

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ КВАЗИФУНКЦІЙ ГРІНА – РВАЧОВА У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ОДНІЄЇ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОЇ НАНОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

У роботі розглядається задача чисельного аналізу однієї електростатичної наноелектромеханічної системи. Наноелектромеханічні системи – мініатюрні пристрої, що поєднують електронні та механічні компоненти мікронних та нанорозмірів. Електростатична активація механічних компонентів таких систем є одним із найпоширеніших видів активації та використовується в акселерометрах, перемикачах, мікродзеркалах та мікрорезонаторах тощо. Недоліки таких пристроїв пов'язані з нестабільністю втягування. Цей ефект виникає, коли напруга, прикладена до рухомого електрода, перевищує критичне значення, в результаті чого система втрачає свою нерухому конфігурацію. Для математичного моделювання процесу використано напівлінійне еліптичне рівняння з оператором Лапласа та першою крайовою умовою. Для побудови наближеного розв'язку задачі пропонується використовувати методи нелінійного аналізу в напіввпорядкованих просторах, зокрема, результати В. І. Опоїцева про розв'язність нелінійних операторних рівнянь з гетеротонним оператором. Крайова задача, що моделює наноелектромеханічну систему, зводиться до інтегрального рівняння Урсона за допомогою методу квазіфункцій Гріна – Рвачова, що дозволяє розширити застосування методу двобічних наближень для областей досить довільної геометрії. У статті обґрунтовано можливість побудови двосторонніх наближень до додатного розв'язку задачі, а саме: наведено обчислювальну схему, отримано умови її збіжності до єдиного додатного розв'язку розглядуваної задачі, а також отримано оцінку похибки. Метод проілюстровано обчислювальними експериментами для задачі, що розглядається у прямокутній області. Результати обчислювальних експериментів представлені у вигляді числової та графічної інформації.

Ключові слова: метод двобічних наближень, метод квазіфункцій Гріна – Рвачова, додатний розв'язок, теорія нелінійних операторів, рівняння Урсона, напіввпорядкований простір, сильно інваріантний конусний відрізок, гетеротонний оператор, наноелектромеханічна система.

O. S. KONCHAKOVSKA

USING THE GREEN – RVACHEV'S QUASIFUNCTIONS METHOD IN THE NUMERICAL ANALYSIS OF ONE ELECTROSTATIC NANOELECTROMECHANICAL SYSTEM

The problem of numerical analysis of one electrostatic nanoelectromechanical system is considered in the article. Nanoelectromechanical systems are miniature devices that combine electronic and mechanical components of micro and nano sizes. Electrostatic actuation of the mechanical components of such systems is one of the most common types of actuation and that used in accelerometers, switches, micro-mirrors, micro-resonators, etc. The disadvantages of such devices are related to the pull-in instability. This effect occurs when the voltage applied to the moving electrode exceeds a critical value, causing the system to lose its stationary configuration. A semi-linear elliptic equation with the Laplace operator and the first boundary condition was used for mathematical modeling of the process. To construct an approximate solution of the problem, it is suggested to use the methods of nonlinear analysis in semi-ordered spaces, in particular, the results of V. I. Opoitsev on the solvability of nonlinear operator equations with a heterotone operator. The boundary value problem modeling the nanoelectromechanical system is reduced to the integral Urysohn's equation using the Green – Rvachev's quasi-function method, which allows us to expand the application of the two-sided approximation method for domains of fairly arbitrary geometry. The article substantiates the possibility of constructing two-sided approximations to a positive solution of the problem, namely: a computational scheme is given, conditions for its convergence to a single positive solution of the problem under consideration are obtained, and an error estimate is obtained. The method is illustrated by computational experiments for a problem considered in a rectangular domain. The results of computational experiments are presented in the form of numerical and graphical information.

Keywords: method of two-sided approximations, Green – Rvachev's quasi-function method, positive solution, theory of nonlinear operators, Urysohn's equation, semi-ordered space, strongly invariant cone segment, heterotone operator, nanoelectromechanical system.

Вступ. Стрімкий розвиток мікросистемної техніки створив передумови для розширення функціональності пристроїв при мінімізації їх енергоспоживання та розміру. Такі пристрої знаходять широке використання в медицині, авіаційній техніці, автомобілебудуванні, робототехніці, системах зв'язку тощо. Для дослідження електростатичних, механічних, магнітних, оптичних чи інших властивостей таких систем застосовують різноманітні методи математичного моделювання [1].

Для найбільш точних та складних моделей основними методами знаходження розв'язку є чисельні методи, які дають ітераційну послідовність, що має двобічну збіжність до шуканого розв'язку. Ці методи дають змогу апостеріорно оцінювати похибку наближеного розв'язку на кожному кроці ітераційного процесу. Для дослідження крайової задачі, що моделює

електростатичну мікроелектромеханічну систему двобічні методи були застосовані у роботах [2–6]. Дана робота продовжує розпочаті в них дослідження.

Постановка задачі. Основним елементом електростатичних електромеханічних систем є пристрій, що складається із закріпленої вздовж межі еластичної діелектричної мембрани, що розташована над жорсткою нееластичною пластиною, яка добре проводить струм. При цьому поверхня мембрани покрита тонкою металевою плівкою. Внаслідок подачі напруги на плівку мембрана відхиляється до пластини і може відбутися злипання електродів. Зворотній процес називається стійким станом системи. Схема роботи найпростішої електростатичної електромеханічної системи зображена на рис. 1.

Мініатюризація пристроїв призводить до необхідності урахування крім сили Кулона ще й сили

© О. С. Кончаковська, 2022



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом *НТУ «ХПІ»* у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХПІ» Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). Конфлікт інтересів: Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



Казимира. Ця сила описує взаємодію прилеглих незаряджених поверхонь з різних матеріалів (металів, діелектриків або напівпровідників). Наявність сили Казимира значно обмежують мініатюризацію електростатичних пристроїв, оскільки за певного критичного розміру нестабільність відхилення, що виникає при нульовій напрузі, може призвести до руйнування приладу в процесі виготовлення [7, 8].

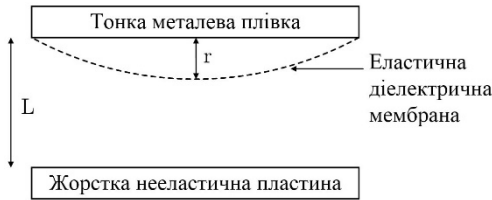


Рис. 1. Схема роботи найпростішої електростатичної електромеханічної системи

Математичною моделлю описаного процесу є наступна крайова задача [7, 8]:

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u)^2} + \frac{\mu g(\mathbf{x})}{(1-u)^4} + P(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (3)$$

де Ω – плоска область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$;

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2);$$

u – величина прогину мембрани;

$P(\mathbf{x})$ – зовнішній тиск;

$f(\mathbf{x})$ та $g(\mathbf{x})$ – функції, що описують діелектричні властивості мембрани;

λ та μ – параметри, що характеризують сили Кулона та Казимира відповідно;

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 V^2 L^2}{2\sigma_0 h g_0^3}, \quad \mu = \frac{\eta c \pi^2 L^2}{240 \sigma_0 h g_0^5},$$

σ_0 – напруга у мембрані;

g_0 – відстань між двома електродами за відсутності деформації мембрани;

h – товщина деформованої мембрани;

ε_0 – вакуумна діелектрична стала;

L – довжина мембрани;

V – прикладена напруга;

η – стала Планка;

c – швидкість світла у вакуумі.

За своїм фізичним сенсом функції $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ і $P(\mathbf{x})$ є неперервними і невід'ємними при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

Нехай $G(\mathbf{x}, s)$ – функція Гріна задачі (1)–(3). Тоді розглядувана задача еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-u(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-u(s))^4} + P(s) \right] ds, \quad (4)$$

де $s = (s_1, s_2)$.

Практична реалізація методу двобічних наближень на основі рівняння (4) стикається з певними труднощами, бо в скінченному вигляді функцію Гріна (навіть за умови її існування) можна побудувати лише для областей доволі простої, класичної, геометрії. Альтернативою є використання квазіфункції Гріна – Рвачова, за допомогою якої теж можна побудувати еквівалентне задачі (1)–(3) нелінійне інтегральне рівняння. Квазіфункція Гріна – Рвачова будується з використанням конструктивного апарату теорії R-функцій та може бути побудована в явному вигляді для областей досить довільної геометрії [2, 9].

Отже, актуальною є розробка нових та вдосконалення існуючих двобічних ітераційних методів. Відповідно до цього метою даної роботи є розробка для розв'язання задачі (1)–(3) ітераційного методу з двобічним характером збіжності, заснованому на використанні квазіфункції Гріна – Рвачова.

Метод дослідження. Нехай межа області $\partial\Omega$ складається зі скінченної кількості кусків ліній $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, де кожна $\sigma_i(\mathbf{x})$ – елементарна функція. Тоді за допомогою методу R-функцій [9] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію $\omega(\mathbf{x})$, що описує геометрію області Ω , тобто:

- $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω ;
- $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$;
- $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$ на $\partial\Omega$.

Також функція $\omega(\mathbf{x})$ може мати певні властивості диференційовності, завдяки використанню різних достатньо повних систем R-функцій [9].

Означення. Квазіфункцією Гріна – Рвачова першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ у \mathbb{R}^2 назвемо функцію

$$Q(\mathbf{x}, s) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(s)}{r^2}}, \quad (5)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$;

$s = (s_1, s_2)$;

$$r = |\mathbf{x} - s| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2};$$

$\omega(\mathbf{x})$ – функція, що описує геометрію області Ω .

Зауважимо [12], що для випадку, коли Ω – круг радіуса R у \mathbb{R}^2 , а $\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2R}(R^2 - x_1^2 - x_2^2)$, квазі-

функція Гріна – Рвачова (5) перетворюється на точну функцію Гріна першої крайової задачі для оператора Лапласа, розглядуваної у крузі Ω .

Квазіфункція Гріна – Рвачова (5) має такі властивості [2]:

- $Q(\mathbf{x}, s) = 0$ на $\partial\Omega$;
- є симетричною функцією: $Q(\mathbf{x}, s) = Q(s, \mathbf{x})$;
- має таку ж особливість при $\mathbf{x} = s$, що і класична функція Гріна;

г) додатна в області Ω : $Q(x, s) > 0$, $x, s \in \Omega$, $x \neq s$.

Нехай u – класичний розв’язок задачі (1)–(3), а функція

$$\tilde{g}(x, s) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)}}.$$

Тоді [2] функція $u(x)$ задовольняє інтегральному рівнянню

$$u(x) = \int_{\Omega} K(x, s)u(s)ds + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-u(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-u(s))^4} + P(s) \right] ds, \quad (6)$$

де $K(x, s) = -\Delta_s \tilde{g}(x, s) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \right) \tilde{g}(x, s)$.

Нелінійне інтегральне рівняння (6) можна подати у вигляді рівняння Урисона

$$u(x) = \int_{\Omega} P(x, s, u(s))ds,$$

де

$$P(x, s, u(s)) = K(x, s)u(s) + Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-u(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-u(s))^4} + P(s) \right].$$

Таким чином, якщо задача (1)–(3) має класичний розв’язок, то він задовольняє також рівняння (6). Якщо ж класичного розв’язку задачі не існує, то рівняння (6) можна використати для введення поняття узагальненого розв’язку задачі (1)–(3).

Рівняння (6) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних у $\bar{\Omega}$. Норма у $C(\bar{\Omega})$ вводиться за правилом $\|u\| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$. У просторі $C(\bar{\Omega})$ виділимо конус $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}\}$ невід’ємних функцій. За допомогою конуса \mathcal{K}_+ у просторі $C(\bar{\Omega})$ введемо напівпорядкованість за правилом [10, 11]:

$$\text{для } u, v \in C(\bar{\Omega}) \quad u \leq v, \text{ якщо } v - u \in \mathcal{K}_+,$$

тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(x) \leq v(x) \text{ для всіх } x \in \bar{\Omega}.$$

Конус \mathcal{K}_+ у $C(\bar{\Omega})$ є нормальним (і навіть гострим), тобто з $u \leq v$ випливає, що $\|u\| \leq \|v\|$.

Означення. Розв’язком (узагальненим) крайової задачі (1)–(3) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв’язком інтегрального рівняння (6).

Побудуємо процес двобічних наближень знаходження розв’язку інтегрального рівняння (6) (а отже, і

розв’язку крайової задачі (1)–(3)), використовуючи методи теорії нелінійних операторів у напівпорядкованих просторах [10, 11].

Введемо до розгляду нелінійний оператор T , що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T(u)(x) = \int_{\Omega} P(x, s, u(s))ds. \quad (7)$$

Позначимо

$$K^+(x, s) = \max\{0, K(x, s)\},$$

$$K^-(x, s) = \max\{0, -K(x, s)\}.$$

Тоді $K^+(x, s) \geq 0$, $K^-(x, s) \geq 0$ при $x, s \in \Omega$ ($x \neq s$), причому

$$K(x, s) = K^+(x, s) - K^-(x, s),$$

$$|K(x, s)| = K^+(x, s) + K^-(x, s),$$

і оператор T вигляду (7) набуде вигляду

$$T(u)(x) = \int_{\Omega} K^+(x, s)u(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)u(s)ds + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-u(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-u(s))^4} + P(s) \right] ds. \quad (8)$$

Оскільки функція

$$F(x, u) = \frac{\lambda f(x)}{(1-u(x))^2} + \frac{\mu g(x)}{(1-u(x))^4} + P(x)$$

монотонно зростає за u для всіх $x \in \Omega$, то оператор T вигляду (8) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w)(x) = \int_{\Omega} K^+(x, s)v(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)w(s)ds + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-v(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-v(s))^4} + P(s) \right] ds. \quad (9)$$

Оператори T і \hat{T} є цілком неперервними.

Виділимо у конусі \mathcal{K}_+ сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v^0, w^0 \rangle$ умовами $\hat{T}(v^0, w^0) \geq v^0$, $\hat{T}(w^0, v^0) \leq w^0$, які для оператора \hat{T} , що визначається рівністю (9), набувають вигляду: для всіх $x \in \bar{\Omega}$

$$\int_{\Omega} K^+(x, s)v^0(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)w^0(s)ds + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-v^0(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-v^0(s))^4} + P(s) \right] ds \geq v^0(x), \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} K^+(x, s)w^0(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)v^0(s)ds +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-w^0(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-w^0(s))^4} + P(s) \right] ds \leq \\
 & \leq w^0(x). \tag{11}
 \end{aligned}$$

Далі за наступною схемою: $v^{(0)} = v^0, w^{(0)} = w^0, v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}), w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}), k = 0, 1, 2, \dots$, сформуємо ітераційний процес

$$\begin{aligned}
 v^{(k+1)}(x) &= \int_{\Omega} K^+(x, s)v^{(k)}(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)w^{(k)}(s)ds + \\
 & + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-v^{(k)}(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-v^{(k)}(s))^4} + P(s) \right] ds, \tag{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w^{(k+1)}(x) &= \int_{\Omega} K^+(x, s)w^{(k)}(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)v^{(k)}(s)ds + \\
 & + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-w^{(k)}(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-w^{(k)}(s))^4} + P(s) \right] ds, \tag{13}
 \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(x) = v^0(x), w^{(0)}(x) = w^0(x). \tag{14}$$

Оскільки конусний відрізок $\langle v^0, w^0 \rangle$ є сильно інваріантним для гетеротонного оператора T , для якого оператор \hat{T} є супровідним, то послідовність $\{v^{(k)}(x)\}$ не спадає за конусом \mathcal{K}_+ , а послідовність $\{w^{(k)}(x)\}$ не зростає за конусом \mathcal{K}_+ . Крім того, з нормальності конуса \mathcal{K}_+ і повної неперервності оператора \hat{T} впливає існування границь $v^*(x)$ і $w^*(x)$ цих послідовностей. Тоді справджується ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned}
 & v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq \\
 & \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0.
 \end{aligned}$$

Можливими є два випадки: $v^* < w^*$ і $v^* = w^*$. У другому випадку $u^* := v^* = w^*$ – єдина на конусному відрізку $\langle v^0, w^0 \rangle$ нерухома точка оператора T , а отже, u^* – єдиний на $\langle v^0, w^0 \rangle$ розв’язок крайової задачі (1)–(3).

Функції $v^*(x)$ і $w^*(x)$ є розв’язком системи рівнянь $v = \hat{T}(v, w), w = \hat{T}(w, v)$, яка у розглядуваного випадку має вигляд:

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \int_{\Omega} K^+(x, s)v(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)w(s)ds + \\
 & + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-v(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-v(s))^4} + P(s) \right] ds, \tag{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w(x) &= \int_{\Omega} K^+(x, s)w(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)v(s)ds + \\
 & + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-w(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-w(s))^4} + P(s) \right] ds. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Умовою виконання рівності $v^* = w^*$ є те, що система (15), (16) не має на $\langle v^0, w^0 \rangle$ таких розв’язків, що $v \neq w$ [10].

Отже, справджується така теорема.

Теорема 1. Нехай $\langle v^0, w^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (8) з супровідним оператором \hat{T} вигляду (9) і система рівнянь (15), (16) не має на $\langle v^0, w^0 \rangle$ розв’язків таких, що $v \neq w$. Тоді ітераційний процес (12)–(14) збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v^0, w^0 \rangle$ неперервного додатного розв’язку u^* крайової задачі (1)–(3), причому має місце ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned}
 & v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \\
 & \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що ланцюг нерівностей (17) як раз і характеризує ітераційний процес (12)–(14) як метод двобічних наближень.

Умовою, яка забезпечить рівність $v^* = w^*$, є умова існування такого $\gamma \in (0; 1)$, що

$$\|\hat{T}(v, w) - \hat{T}(w, v)\| \leq \gamma \|v - w\| \tag{18}$$

для всіх $v, w \in \langle v^0, w^0 \rangle$ [12].

Нехай $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max_{x \in \bar{\Omega}} w^0(x), M_0 < 1$.

Оскільки при $0 < v, w < M_0$

$$\left| \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{1}{(1-w)^2} \right| \leq \frac{2}{(1-M_0)^3} |v-w|,$$

$$\left| \frac{1}{(1-v)^4} - \frac{1}{(1-w)^4} \right| \leq \frac{4}{(1-M_0)^5} |v-w|,$$

то отримаємо нерівність

$$\begin{aligned}
 & |F(x, v(x)) - F(x, w(x))| \leq \\
 & \leq \left[\frac{2\lambda f(x)}{(1-M_0)^3} + \frac{4\mu g(x)}{(1-M_0)^5} \right] |v(x) - w(x)|.
 \end{aligned}$$

Розглянемо різницю $\hat{T}(v, w)(x) - \hat{T}(w, v)(x)$:

$$\begin{aligned}
 & \hat{T}(w, v)(x) - \hat{T}(v, w)(x) = \\
 & = \int_{\Omega} [K^+(x, s) + K^-(x, s)][w(s) - v(s)]ds + \\
 & + \int_{\Omega} Q(x, s)[F(x, v(x)) - F(x, w(x))]ds.
 \end{aligned}$$

Тоді

$$\|\hat{T}(v, w) - \hat{T}(w, v)\| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |\hat{T}(v, w)(x) - \hat{T}(w, v)(x)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega} [K^+(x, s) + K^-(x, s)][w(s) - v(s)] ds \right| + \\ &+ \max_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega} Q(x, s)[F(s, v(s)) - F(s, w(s))] ds \right| \leq \\ &\leq \left[M_1 + \frac{2\lambda \tilde{M}_f}{(1 - M_0)^3} + \frac{4\mu \tilde{M}_g}{(1 - M_0)^5} \right] \cdot \|v - w\| = \gamma \|v - w\|, \end{aligned}$$

де позначено

$$\begin{aligned} M_1 &= \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} [K^+(x, s) + K^-(x, s)] ds, \\ \tilde{M}_f &= \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} Q(x, s) f(s) ds, \\ \tilde{M}_g &= \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} Q(x, s) g(s) ds, \\ \gamma &= M_1 + \frac{2\lambda \tilde{M}_f}{(1 - M_0)^3} + \frac{4\mu \tilde{M}_g}{(1 - M_0)^5}. \end{aligned}$$

З огляду на нерівність (18), отримаємо

$$\begin{aligned} &\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| = \|\hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}) - T(w^{(k)}, v^{(k)})\| \leq \\ &\leq \gamma \|w^{(k)} - v^{(k)}\| = \gamma \|\hat{T}(v^{(k-1)}, w^{(k-1)}) - T(w^{(k-1)}, v^{(k-1)})\| \leq \\ &\leq \gamma^2 \|w^{(k-1)} - v^{(k-1)}\| \leq \dots \leq \gamma^{k+1} \|w^{(0)} - v^{(0)}\| \leq \gamma^{k+1} M_0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| = 0$, тобто $v^* = w^*$, якщо $\gamma < 1$. Отже, справджується теорема.

Теорема 2. Нехай $\langle v^0, w^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (8) з супровідним оператором \hat{T} вигляду (9) і має місце умова $\gamma < 1$. Тоді ітераційний процес (12) – (14) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v^0, w^0 \rangle$ неперервного додатного розв’язку u^* крайової задачі (1)–(3).

На k -й ітерації за наближений розв’язок крайової задачі (1)–(3) слід взяти функцію

$$u^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}. \quad (19)$$

Тоді для похибки наближеного розв’язку (19) матимемо зручну апостеріорну оцінку:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in \Omega} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)). \quad (20)$$

Наявність оцінки вигляду (20) є безумовною перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in \Omega} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon,$$

тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$.

Крім того, за умов теореми 2 можна вказати і апіорну оцінку похибки:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{x \in \Omega} (w^0(x) - v^0(x)).$$

Тоді з нерівності

$$\frac{\gamma^k}{2} \max_{x \in \Omega} (w^0(x) - v^0(x)) < \varepsilon$$

знаходимо, що для досягнення точності ε треба

$$k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{\max_{x \in \Omega} (w^0(x) - v^0(x))}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\gamma}} \right\rceil + 1 \quad (20)$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

З огляду на крайову умову (2) можна рекомендувати шукати кінці v^0, w^0 сильно інваріантного конусного відрізка $\langle v^0, w^0 \rangle$ у вигляді $v^0(x) = \alpha u_0(x), w^0(x) = \beta u_0(x), 0 < \alpha < \beta$, де

$$u_0(x) = \int_{\Omega} Q(x, s) ds.$$

Результати обчислювального експерименту. Розглянемо задачу (1)–(3) у квадраті Ω зі стороною $\sqrt{\pi}$. У літературі [13] запропоновано при дослідженні електромеханічних систем у прямокутних областях використовувати функції, що описують діелектричні властивості мембрани у вигляді

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{\delta}{2}} |x - x^0|,$$

$$f(x) = \exp \left(\delta \left(\frac{2|x - x^0|^2}{\pi} - 1 \right) \right),$$

де $x^0 = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}; \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right),$

$$|x - x^0| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}.$$

Нехай $P = 0,25, \lambda = 0,1, \mu = 0,1$, а функції обра- но наступному вигляді при $\delta = 3$:

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\left(x_1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2 + \left(x_2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2},$$

$$g(x) = \exp \left(\delta \left(\frac{2 \left(\left(x_1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2 + \left(x_2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2 \right)}{\pi} - 1 \right) \right).$$

Тоді квазіфункція Гріна – Рвачова $Q(x, s)$ задачі (1)–(3) у прямокутній області Ω визначається формулою (5), де функція $\omega(x) = \omega(x_1, x_2)$ має вигляд

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{(\sqrt{\pi} - x_1)x_1}{\sqrt{\pi}} + \frac{(\sqrt{\pi} - x_2)x_2}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{\pi} - x_1)^2 x_1^2}{\pi} + \frac{(\sqrt{\pi} - x_2)^2 x_2^2}{\pi}}.$$

Кінці сильно інваріантного конусного відрізка шукатимемо у вигляді $v^0(x) = \alpha u_0(x)$, $w^0(x) = \beta u_0(x)$, де $0 < \alpha < \beta$, $u_0(x) = \int_{\Omega} Q(x, s) ds$.

Було підібрано, що ці функції задовольняють умови (10)–(11), якщо $\alpha = 0,2$, $\beta = 1,3$. Тоді знаходимо, що $M_0 = 0,1672$, $M_1 = 0,7082$, $\tilde{M}_f = 0,0269$, $\tilde{M}_g = 0,0108$ і $\gamma = 0,7283$. Оскільки, $\gamma < 1$ згідно теореми 2 послідовні наближення, що формуються за схемою (12)–(14) двобічно збігаються до розв'язку задачі (1)–(3), розглядуваної в квадраті Ω .

Оскільки

$$\max_{x \in \Omega} (w^{(9)}(x) - v^{(9)}(x)) = 0,13 \cdot 10^{-3},$$

то з точністю $0,65 \cdot 10^{-4}$ отримаємо

$$u^*(x) \approx u^{(9)}(x) = \frac{w^{(9)}(x) + v^{(9)}(x)}{2}.$$

В цьому випадку $\|u^{(9)}\| = 0,0643$. Двобічний характер збіжності послідовних наближень проілюстровано рис. 2, де представлені графіки верхніх (суцільна лінія) та нижніх (пунктирна лінія) наближень до розв'язку задачі при $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(9)}(x)$ зображені на рис. 3 та 4 відповідно.

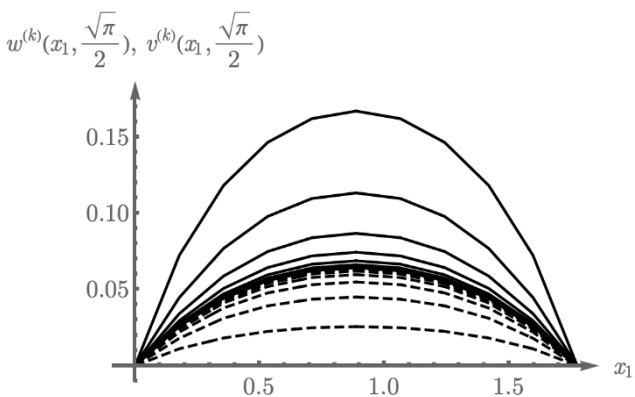


Рис. 2. Графіки верхніх та нижніх наближень до розв'язку задачі у перерізі $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

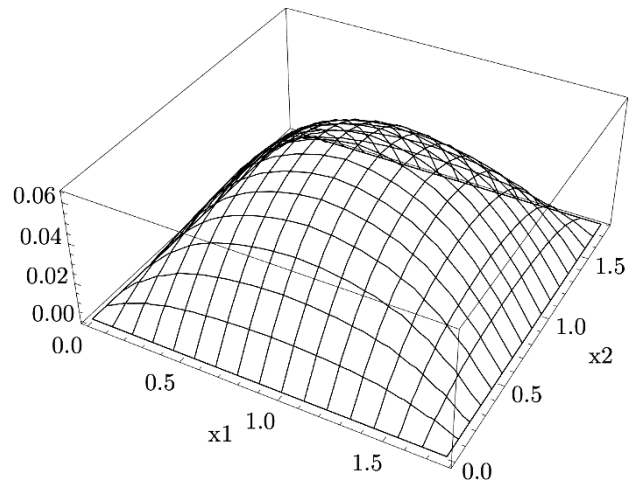


Рис. 3. Графік поверхні наближеного розв'язку

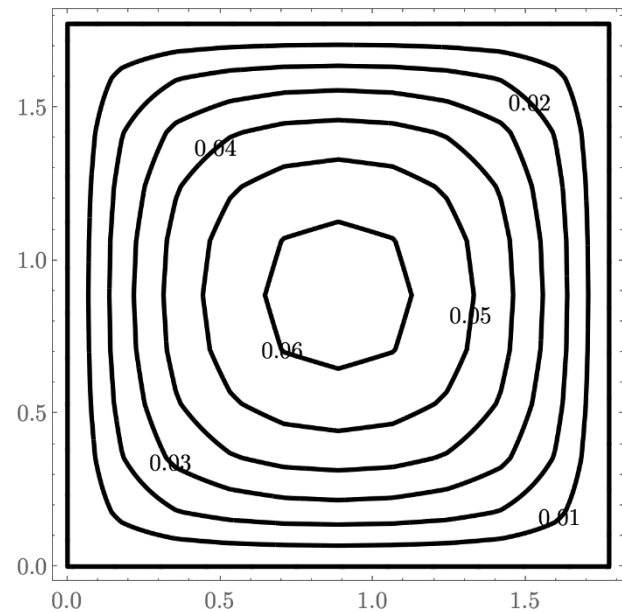


Рис. 4. Графік ліній рівня наближеного розв'язку

Висновки. У роботі вперше обґрунтовано можливість побудови двобічних наближень (на основі використання квазіфункції Гріна – Рвачова) до розв'язку першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння, що виникає при моделюванні електростатичних наноелектромеханічних систем. Застосування методу послідовних наближень з двобічним характером збіжності до розв'язку задачі дозволяє побудувати зручний обчислювальний алгоритм з апостеріорною оцінкою похибки на кожній ітерації. Ефективність роботи запропонованого методу підтверджено низкою обчислювальних експериментів для тестових значень параметрів у прямокутній області. З огляду на це, перспективним є застосування розробленого методу для розрахунку реальних наноелектромеханічних систем.

Список літератури

1. Pelesko J. A., Bernstein D. H. *Modeling MEMS and NEMS*. CRC Press, 2002. 351 p.
2. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of

- nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. Vol. 10, no. 2. P. 360–375.
3. Кончаковская О. С., Сидоров М. В. Численный анализ одного нелинейного эллиптического уравнения, возникающего при моделировании микроэлектромеханических систем. *Радиоэлектроника и информатика*. 2016. Т. 73, № 2. С. 23–28.
 4. Кончаковская О. С., Сидоров М. В. Применение методов нелинейного анализа в математическом моделировании микроэлектромеханических систем. *Бионика интеллекта*. 2017. Т. 88, № 1. С. 60–64.
 5. Кончаковська О. С., Сидоров М. В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи. *Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2018. Вип. 39. С. 33–41.
 6. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*. 2020. Vol. 14, no. 3–4. P. 17–26.
 7. Lai B. On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices with effects of Casimir force. *In Annales Henri Poincaré*. 2015. Vol. 16, no. 1. Art. No. 239253.
 8. Batra R. C., Porfiri M., Spinello D. Effects of Casimir force on pull-in instability in micromembranes. *EPL (Europhysics Letters)*. 2007. Vol. 77, no. 2. Art. no. 20010.
 9. Рвачев В. Л. *Теория R-функций и некоторые её приложения*. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.
 10. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. *Нелинейные операторы в пространствах с конусом*. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
 11. Красносельский М. А. *Положительные решения операторных уравнений*. Москва: Физматгиз, 1962. 394 с.
 12. Guo D., Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1987. Vol. 11, no. 5. P. 623–632.
 13. Esposito P., Ghossoub N., Guo Y. Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS. *Courant lecture notes in mathematics*. Vol. 20. American Mathematical Soc., 2010. 318 p.
 3. Konchakovskaya O. S., Sidorov M. V. Chislennyj analiz odnogo nelinejnogo ellipticheskogo uravneniya, vznikayushchego pri modelirovanii mikroelektromekhanicheskikh sistem [Numerical analysis of one nonlinear elliptic equation that modelling microelectromechanical system]. *Radioelektronika i informatika* [Radioelectronics & Informatics]. 2016, vol. 73, no. 2, pp. 23–28.
 4. Konchakovskaya O. S., Sidorov M. V. Primenenie metodov nelinejnogo analiza v matematicheskom modelirovanii mikroelektromekhanicheskikh sistem [Mathematical modeling of microelectromechanical systems using methods of nonlinear analysis]. *Bionika intellekta* [Bionics of Intelligence]. 2017, vol. 88, no. 1, pp. 60–64.
 5. Konchakovska O. S., Sidorov M. V. Metod dvobichnih nablizhen' u chisel'nomu analizu odniei mikroelektromekhanichnoi sistemi [The two-sided method in numerical analysis of one microelectromechanical system]. *Visnik HNU im. V.N. Karazina. Ser. Matematichne modelyuvannya. Informacijni tekhnologii. Avtomatizovani sistemi upravlinnya* [Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems»]. 2018, vol. 39, pp. 33–41.
 6. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*. 2020, vol. 14, no. 3–4, pp. 17–26.
 7. Lai B. On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices with effects of Casimir force. *In Annales Henri Poincaré*. 2015, vol. 16, no. 1, art. no. 239253.
 8. Batra R. C., Porfiri M., Spinello D. Effects of Casimir force on pull-in instability in micromembranes. *EPL (Europhysics Letters)*. 2007, vol. 77, no. 2, art. no. 20010.
 9. Rvachev V. L. *Teoriya R-funkcij i nekotorye eyo prilozheniya* [Theory of R-functions and its Some Applications]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1982. 552 p.
 10. Opojcev V. I., Hurudze T. A. *Nelinejnye operatory v prostranstvah s konusom* [Nonlinear Operators in Spaces with a Cone]. Tbilisi: Izd-vo Tbilis. un-ta Publ., 1984. 246 p.
 11. Krasnosel'skij M. A. *Polozhitel'nye resheniya operatornyh uravnenij* [Positive Solutions of Operator Equations]. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1962. 394 p.
 12. Guo D., Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1987, vol. 11, no. 5, pp. 623–632.
 13. Esposito P., Ghossoub N., Guo Y. Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS. *Courant lecture notes in mathematics*. Vol. 20. American Mathematical Soc. 2010. 318 p.

References (transliterated)

1. Pelesko J. A., Bernstein D. H. *Modeling MEMS and NEMS*. CRC Press, 2002. 351 p.
2. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018, vol. 10, no. 2, pp. 360–375.

Надійшло (received) 15.10.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Кончаковська Оксана Сергіївна – Харківський національний університет радіоелектроніки, аспірант кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0836-6045>; e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua

Konchakovska Oksana Serhiivna – Kharkiv National University of Radio Electronics, postgraduate student of the Department of Applied Mathematics; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0836-6045>; e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua