УПРАВЛІННЯ В ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS

УДК 62-52 **DOI: 10.20998/2079-0023.2022.02.07**

О. С. КУЦЕНКО, С. В. КОВАЛЕНКО

КВАЗІАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ОБЕРНЕННЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Задача обернення динамічних систем набула широкого поширення при розв'язанні задач управління, ідентифікації, вимірювання, що виникають при проектуванні та дослідженні електричних і механічних динамічних систем. Інвертування є ефективним способом реалізації процесів управління по обуренню, а також у комбінованих системах управління з прогнозуючою моделлю. Аналіз джерел інформації показав, що при практичному розв'язанні більшості задач обернення виникає низка труднощів, що пов'язані з високої чутливістю результатів стосовно точності завдання параметрів математичної моделі об'єкта управління, нестійкістю зворотної моделі немінімально-фазових об'єктів, порушенням умов фізичної реалізованості. В роботі пропонується ефективний метод обернення лінійних стаціонарних динамічних систем багато в чому вільний від зазначених недоліків. В основу методу покладено подання вхідних та вихідних сигналів у вигляді нескінченних лінійних комбінацій їх похідних. Запропоновано метод визначення послідовності матричних коефіцієнтів лінійних уявлень вхідних та вихідних сигналів. Основним теоретичним результатом є отримання взаємозв'язків між матричними коефіцієнтами вхідних та вихідних сигналів. В роботі розглядаються математичні моделі лінійних динамічних систем у формі диференціальних рівнянь у просторі станів та в еквівалентній формі «вхід–вихід». Розглянуті системи повинні відповідати умовам асимптотичної стійкості, а також умові рівності розмірностей векторів входу і виходу. Наведено вимоги до математичних моделей вхідних та вихідних сигналів, виконання яких дозволяє замість нескінченних сум, що представляють сигнали, обмежитися кінцевим числом доданків.

Ключові слова: динамічні системи, лінійні диференціальні рівняння, трикутні блокові матриці, задача обернення, простір станів, матричні рівняння.

O. S. KUTSENKO, S. V. KOVALENKO

QUASI-ANALYTIC METHOD OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS INVERSION

The problem of inversion of dynamic systems has become widespread while solving the problems of control, identification, and measurement problems arising during the design and research of electrical and mechanical dynamic systems. Inverting is an effective way of implementing disturbance control processes, as well as in combined control systems with a predictive model. The analysis of information sources showed that in the practical solution of most inversion problems, a number of difficulties arise, which are associated with the high sensitivity of the results in relation to the accuracy of the parameters of the mathematical model of the control object, the instability of the inverse model of non-minimum-phase objects, and the violation of the conditions of physical feasibility. The work offers an effective method of inverting linear stationary dynamic systems, free from the mentioned shortcomings in many respects. The basis of the method is the presentation of input and output signals in the form of infinite linear combinations of their derivatives. A method of determining the sequence of matrix coefficients of linear representations of input and output signals is proposed. The main theoretical result is obtaining relationships between matrix coefficients of input and output signals. The work considers mathematical models of linear dynamic systems in the form of differential equations in the state space and in the equivalent "input-output" form. The considered systems must meet the conditions of asymptotic stability, as well as the condition of equal dimensions of the input and output vectors. Requirements for mathematical models of input and output signals are given, the fulfillment of which allows, instead of infinite sums representing signals, to be limited to a finite number of terms.

Keywords: dynamical systems, linear differential equations, triangular block matrices, inversion problem, state space, matrix equations.

Вступ. Обернення динамічних систем є одним із основних напрямів сучасної теорії управління. Розв'язання задачі обернення – відновлення вхідного впливу по відомому виходу, насправді вважається одним із шляхів розв'язання задачі управління. Крім розв'язання задачі управління, задача обернення знаходить застосування при вирішенні широкого спектра практичних задач, пов'язаних з теорією управління. До останніх відносяться задачі ідентифікації динамічних параметрів систем та обурень, фільтрації сигналів, керування за наявності обурень, що не вимірюються, тощо.

Огляд і аналіз джерел інформації. Першими публікаціями у цьому напрямі вважатимуться роботи [1, 2], у яких було обгрунтовано критерії існування зворотних операторів та методи їх побудови для лінійних систем. Значний внесок у розвиток теорії та практики інверсії динамічних систем зроблено у роботах [3–5]. У них запропоновано оригінальні критерії оборотності динамічних систем та надано конкретні шляхи розв'язання задачі обернення. Низка практичних результатів розв'язання задач інвертування стосовно електричних і механічних систем наведена у роботах [6, 7].

Різні алгоритми обернення динамічних систем можна знайти у роботах [8, 9]. У цих роботах досліджуються питання, пов'язані із оборотністю та однозначністю відновлення входу. Основною проблемою при розв'язанні задач обернення динамічних систем є проблема стійкості методів рішень по відношенню до різноманітних невизначеностей: похибок при заданні параметрів системи, збурень, похибок вимірів виходу тощо. Алгоритми обернення будувалися у межах методів гарантованого оцінювання [10, 11], методів теорії некоректних задач [12–14] та теорії автоматичного управління. Задачі обернення динамічних систем тісно пов'язані із задачами динамічних вимірів [15, 16]. Оригінальні методи розв'язання задачі динамічного виміру запропоновані в [17, 18].

З аналізу джерел інформації можна дійти до висновку у тому, що при практичній реалізації більшості методів обернення виникає безліч проблем, пов'язаних з забезпеченням стійкості, фізичної реалізованості, робастності і коректності зворотних операторів.

Перераховані складнощі в ряді випадків можна обійти, ґрунтуючись на спрощених математичних моделях динамічних систем, а також на аналітичному уявленні сигналів на входах та виходах.

Обернення системи у формі «вхід–вихід». Розглянемо математичну модель керованого процесу у формі «вхід–вихід»:

$$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{y}^{(p)} + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}^{(p-1)} + \ldots + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u}^{(q)} + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}^{(q-1)} + \\ + \ldots + \boldsymbol{B}_q\boldsymbol{u}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_p$ – $n \times n$, а $\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_q$ – $n \times m$ матриці параметрів об'єкта управління;

$\boldsymbol{y} \in R^n$ та $\boldsymbol{u} \in R^m$ – вектори виходу та входу відповідно.

Передбачається також, що система (1) стійка та задовольняє умові фізичної реалізуємості $p \geq q$. З іншого боку, передбачається, що система (1) невироджена, тобто $\left|\boldsymbol{A}_p\right| \neq 0$ та $\left|\boldsymbol{B}_q\right| \neq 0$, а розмірності векторів входу та виходу збігаються $(n = m)$.

З теорії систем лінійних диференціальних рівнянь відомо, що розв'язок (1) складається з двох компонент: власної та вимушеної. Власна складова залежить тільки від параметрів системи (1) і для стійких систем прагне нуля зі швидкістю, що визначається розподілом коренів характеристичного рівняння. Вимушена складова визначається як параметрами системи, так і видом керуючого впливу $\boldsymbol{u}(t)$, а тому й представляє основний інтерес з точки зору розв'язання задач управління.

Будемо шукати вимушений розв'язок (1) у вигляді

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{u}^{(k)}, \qquad (2)$$

де $\boldsymbol{C}_0, \boldsymbol{C}_1, \ldots$ – $n \times n$ матриці, що підлягають визначенню.

Для їх знаходження підставимо (2) у вихідне рівняння (1) і прирівняємо матричні коефіцієнти при однакових похідних у лівій та правій частинах отриманого співвідношення. В результаті отримаємо нескінченну систему матричних лінійних рівнянь для визначення $\boldsymbol{C}_0, \boldsymbol{C}_1, \ldots$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{B}_q, \\ &\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{B}_{q-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{C}_p + \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{C}_{p-1} + \ldots + \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0 = 0, \\ &\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{C}_{p+1} + \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{C}_p + \ldots + \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{C}_k + \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{C}_{k-1} + \ldots + \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_{k-n} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,. \end{aligned} \qquad (3)$$

Відповідний блочно-матричний запис системи рівнянь (3) набуде вигляду:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_p \;\; 0 \;\; 0 \ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{A}_p \;\; 0 \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{A}_0 \;\; \boldsymbol{A}_1 \ldots \boldsymbol{A}_p \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \;\; 0 \;\ldots \boldsymbol{A}_0 \;\ldots \boldsymbol{A}_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_0 \\ \boldsymbol{C}_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_q \\ \boldsymbol{B}_{q-1} \\ . \\ \boldsymbol{B}_0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Оскільки система (3, 4) має блочно-трикутну структуру, її розв'язок легко отримати послідовним розв'язанням найпростіших матричних лінійних рівнянь:

$$\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{B}_q, \quad \boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{A}_p^{-1}\boldsymbol{B}_q, \quad \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{C}_0 + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{B}_{q-1},$$

$$\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{A}_p^{-1}(\boldsymbol{B}_{q-1} - \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{C}_0),$$

$$\boldsymbol{A}_{p-2}\boldsymbol{C}_0 + \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{B}_{q-2},$$

$$\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{A}_p^{-1}(\boldsymbol{B}_{q-2} - \boldsymbol{A}_{p-2}\boldsymbol{C}_0 - \boldsymbol{A}_{p-1}\boldsymbol{C}_1),$$

і так далі.

Неважко побачити, що розв'язання (4) вимагає лише одного обернення матриці $\boldsymbol{A}_p$. Це можна врахувати у вихідному поданні математичної моделі об'єкта управління, розглядаючи наведену модель, яка отримана з вихідної множенням всіх матриць (1) на матрицю $\boldsymbol{A}_p^{-1}$. Таким чином, без обмеження спільності можна вважати матрицю $\boldsymbol{A}_p$ в (1), (3), (4) одиничною.

Для розв'язання задачі обернення поміняємо місцями вхід і вихід системи (1) і замість (2) шукатимемо функцію $\boldsymbol{u}(t)$ за заданою $\boldsymbol{y}(t)$ у вигляді аналогічному (2):

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{D}_k \boldsymbol{y}^{(k)}, \qquad (5)$$

де $\boldsymbol{D}_0, \boldsymbol{D}_1, \ldots$ – $n \times n$ матриці.

Тоді система рівнянь для обчислення матриць $\boldsymbol{D}_0, \boldsymbol{D}_1, \ldots$ набуде вигляду аналогічному (4)

$$\begin{pmatrix} B_q & & & \\ B_{q-1} & B_q & & \\ B_{q-2} & B_{q-1} & B_q & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \ldots\ldots & B_0 & \ldots & B_q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_p \\ \boldsymbol{A}_{p-1} \\ . \\ \boldsymbol{A}_0 \\ 0 \\ . \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

У разі SISO систем матриці $\boldsymbol{C}_0, \boldsymbol{C}_1, \ldots,$ $\boldsymbol{D}_0, \boldsymbol{D}_1, \ldots$ являють собою скаляри. Вектори $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \ldots)$ і $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \ldots)$ називатимемо характеристичними векторами прямого та зворотного одновимірного об'єкту управління. Характеристичні вектори $\boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{d}$ є для SISO елемента з передатною функцією

$$w(s) = \frac{b_0 s^q + b_1 s^{q-1} + \ldots + b_q}{a_0 s^p + a_1 s^{p-1} + \ldots + a_p}.$$

та обчислюються подібно багатовимірним об'єктам.

Розглянемо послідовне з'єднання двох елементів з передатними функціями $w_1(s)$ і $w_2(s)$ (рис. 1) та характеристичними векторами $\boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{g}$ відповідно

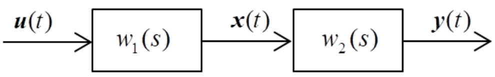

Рис. 1. Послідовне з'єднання ланок

Тоді для вихідних сигналів $\boldsymbol{x}(t)$ і $\boldsymbol{y}(t)$) можна записати співвідношення виду (2) та (5)

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j \boldsymbol{x}^{(j)}, \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{u}^{(k)}. \qquad (8)$$

Підставляючи (8) до (7), отримаємо

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j \frac{d^j}{dt^j} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{u}^{(k)} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j \sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{u}^{(k+j)} = = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{f}_i \boldsymbol{u}^{(i)}, \qquad (9)$$

де компоненти характеристичного вектора послідовного з'єднання $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2 \ldots)$ обчислюється за формулою:

$$f_i = \sum_{j+k=i} g_j c_k, \quad i, j, k = 0,1,2\ldots\ . \qquad (10)$$

Скористаємося співвідношеннями (9) і (10) для знаходження взаємозв'язку між характеристичними векторами $\boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{d}$ прямої та зворотної динамічних систем, послідовне з'єднання яких набуде вигляду, зображеного на рис. 2

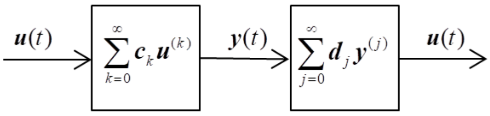

Рис. 2. Послідовне з'єднання прямої та зворотної систем

Тоді, згідно з (9) та (10), отримаємо

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k+j=i} c_k d_j u^{(i)}, \quad k, j = 0,1,2\ldots\ . \qquad (11)$$

Із (11) безпосередньо слідує

$$\begin{aligned} &d_0 c_0 = 1, \\ &\sum_{k+j=i} d_k c_j = 0, \quad i = 1,2\ldots; k, j = 0,1,2\ldots\ . \end{aligned} \qquad (12)$$

Співвідношення (12) природно можна поширити на квадратні MIMO системи:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{D}_0 \boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{E}, \\ &\sum_{k+j=i} \boldsymbol{D}_k \boldsymbol{C}_j = 0, \quad i = 1,2\ldots; k, j = 0,1,2\ldots\ . \end{aligned} \qquad (13)$$

Поміняємо місцями пряму та зворотну задачі (рис. 2). Тоді очевидно, що для SISO системи співвідношення (12) не зміняться. Що ж до MIMO системи то аналог співвідношень (13) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{C}_0 \boldsymbol{D}_0 = \boldsymbol{E}, \\ &\sum_{k+j=i} \boldsymbol{C}_j \boldsymbol{D}_k = 0, \quad i = 1,2\ldots; k, j = 0,1,2\ldots\ . \end{aligned} \qquad (14)$$

Співвідношення (13) або (14) спільно з (4) дозволяють легко отримати розв'язок задачі обертання лінійної динамічної системи (1) у вигляді нескінченної суми (5). Далі буде розглянуто умови, за яких можна обмежитися кінцевим числом доданків у виразі (5).

Обернення лінійних динамічних систем у просторі станів. Узагальнимо розглянутий метод обернення лінійних систем, заданих у формі «вхід–вихід» на системи, задані у просторі станів. Нехай диференціальні рівняння системи мають традиційний вигляд

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \qquad (15)$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}, \qquad (16)$$

де $\boldsymbol{x} \in R^n$ – вектор стану;

$\boldsymbol{u} \in R^m$ – вектор управлінь;

$\boldsymbol{y} \in R^s$ – вектор виходу;

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ – постійні матриці відповідних розмірів.

Надалі припускатимемо «квадратну» структуру системи (15), (16), тобто розмірності векторів управлінь та виходу збігаються $(s = m)$.

Будемо шукати вимушену складову розв'язку (15), (16) у вигляді аналогічному (2). Для цього попередньо знайдемо розв'язок (15) відносно вектора стану у вигляді

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{u}^{(k)}(t). \qquad (17)$$

Із (17) слідує

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{u}^{(k+1)}(t). \qquad (18)$$

Підставимо (16), (17) і (18) в (15). В результаті отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{u}^{(k+1)} = \boldsymbol{A}\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{u}^{(k)} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}. \qquad (19)$$

Прирівнюючи матричні коефіцієнти при похідних $\boldsymbol{u}^{(k)}$ одного порядку в лівій та правій частинах (19), отримаємо систему рекурентних співвідношень для обчислення матриць $\boldsymbol{C}_k$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0 + \boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{k+1} = \boldsymbol{C}_k, \quad k = \overline{0,\infty},$$

з яких безпосередньо випливає

$$\boldsymbol{C}_0 = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{C}_1 = -\boldsymbol{A}^{-2}B, \ \ldots, \boldsymbol{C}_k = -\boldsymbol{A}^{-(k+1)}\boldsymbol{B}. \qquad (20)$$

Таким чином, вимушена складова розв'язку системи (15), (16) набуде вигляду

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\boldsymbol{C}}_k \boldsymbol{u}^{(k)}(t), \qquad (21)$$

де $\bar{\boldsymbol{C}}_k = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-(k+1)}\boldsymbol{B}.$

Для знаходження зворотного оператора скористаємося результатами, отриманими раніше у разі представлення системи у формі «вхід–вихід». Шукатимемо розв'язок задачі інверсії у вигляді (5). Тоді матриці $\boldsymbol{D}_0, \boldsymbol{D}_1, \ldots$ можуть бути обчислені на підставі співвідношень (13) або (14).

Відповідна система лінійних матричних рівнянь набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{C}}_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \bar{\boldsymbol{C}}_1 & \bar{\boldsymbol{C}}_0 & 0 & 0 & \ldots \\ \bar{\boldsymbol{C}}_2 & \bar{\boldsymbol{C}}_1 & \bar{\boldsymbol{C}}_0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \end{pmatrix}.$$

Розв'язок останньої системи рівнянь знаходиться в результаті наступної рекурентної процедури

$$\boldsymbol{D}_0 = \bar{\boldsymbol{C}}_0^{-1}, \\ \boldsymbol{D}_k = -\boldsymbol{D}_0 \sum_{i+j=k} \bar{\boldsymbol{C}}_i \boldsymbol{D}_j; \quad j = 0,1,2\ldots, i,k = 1,2,\ldots \qquad (22)$$

У результаті зворотний оператор матиме вигляд (5), де матриці $\boldsymbol{D}_0, \boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2\ldots$ обчислюються згідно (22).

Приклад. Задана динамічна SISO система другого порядку у просторі станів

$$\dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u, \qquad (23) \\ y = x_1 + x_2.$$

Треба знайти керуючий сигнал $\boldsymbol{u}(t)$, якому відповідає вимушена складова сигналу на виході

$$y(t) = 1 + t + t^2. \qquad (24)$$

У векторно-матричній формі (23) має вигляд

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{b}u, \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

де $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо розв'язок (23) у вигляді (21). Згідно (20) та (21) послідовність матричних коефіцієнтів $\bar{\boldsymbol{C}}_k$ буде мати вигляд

$$\bar{\boldsymbol{C}}_0 = 1, \ \bar{\boldsymbol{C}}_1 = -1, \ \bar{\boldsymbol{C}}_2 = 0, \ \bar{\boldsymbol{C}}_3 = 1, \ \bar{\boldsymbol{C}}_4 = 1\ldots . \qquad (25)$$

Коефіцієнти зворотнього оператора знаходимо за формулами (22)

$$D_0 = 1, \ D_1 = 1, \ D_2 = 1, \ D_3 = 0, \ D_4 = -2\ldots .$$

а зворотний оператор буде мати вигляд

$$u(t) = y(t) + \dot{y}(t) + \ddot{y}(t) - 2y^{(\mathrm{IV})}(t) + \ldots . \qquad (26)$$

Після підстановки (24) в (26) отримаємо вираз для сигналу на вході, якому відповідає вихід (24)

$$u(t) = -4 + 3t + t^2 . \qquad (27)$$

Для перевірки підставимо (27) у вираз (21) з коефіцієнтами $\bar{\boldsymbol{C}}_k$ (25). Отримаємо

$$y(t) = u(t) - \dot{u}(t) + \dddot{u}(t) + u^{(\mathrm{IV})}(t) + \ldots, \\ y(t) = 1 + t + t^2,$$

що співпадає з вихідними даними.

Обговорення результатів. Запропонований метод обернення лінійних динамічних систем, заданих або у формі «вхід – вихід», або у просторі станів зводиться до послідовності матричних операцій з мінімальною кількістю обернень матриць. Усі матричні операції здійснюються у просторі з розмірністю, що відповідає розмірності вихідної системи диференціальних рівнянь.

Основним обмеженням методу є теоретична нескінченність кількості членів суми складових рішення задачі обернення. У зв'язку з цим природно накласти обмеження на клас функцій часу $\boldsymbol{u}(t)$ і $\boldsymbol{y}(t)$, що моделюють сигнали на вході та на виході системи.

Наприклад, клас Z_l, який являє собою множину безперервних обмежених функцій, що диференціюються та мають обмежені похідні до l-го порядку включно, а похідні більш високих порядків дорівнюють нулю

$$Z_l = \{ z(\cdot) \,\|\, z^{(k)}(t) | \le \mu_k,\ \forall t \in [0,\tau],\ \forall k \in 0, l, \\ \mu_k = 0,\ \forall k > l \}. \qquad (28)$$

У разі належності функцій $\boldsymbol{u}(t)$ і $\boldsymbol{y}(t)$ класу Z_l нескінченні суми (2), (5), (21) перетворюються на кінцеві. Найцікавішим представником класу функцій Z_l є поліноми ступеня не вище l. Методи інтерполяції та апроксимації функцій поліномами добре вивчені та знайшли широке застосування на практиці. Слід зазначити, що відповідно до теореми Вейєрштраса про апроксимацію, будь-яку безперервну функцію можна апроксимувати поліномом з наперед заданою точністю. Кінцевими сумами приблизно можна обмежитися так само у випадку, якщо послідовності $\boldsymbol{u}^{(k)}(t)$ і $\boldsymbol{y}^{(k)}(t)$ $k = 0,1,2...$ в кожний момент часу являють собою ряди, що сходяться. Прикладами цих функцій є $f(t) = e^{\omega t}$ та $g(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t$. Дійсно:

$$f^{(k)}(t) = \omega^k e^{\omega t}, \quad k = 0,1,2... \, .$$

Ступеневий ряд: $1, \omega, \omega^2...$ являє собою геометричну прогресію, що збігається при $\omega < 1$. Аналогічний результат має місце і для гармонійної функції $g(t)$.

При практичному застосуванні запропонованого методу необхідно врахувати затримку результату інвертування, пов'язану з обробкою вихідного сигналу у разі довільного виду $\boldsymbol{y}(t)$. У цьому випадку слід рекомендувати інтерполяцію множини вимірюваних значень різними аналітичними функціями: поліномами, експонентами, гармонійними функціями, а також сплайнами. Детально з таким підходом можна ознайомитись у роботах [18, 19].

Список літератури

1. Sain M. K, Massey J. L. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969. Vol. AS–14, № 2. P. 141–149.
2. Silverman L. M. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969. Vol. AS–14, № 3. P. 270–276.
3. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. *Методы робастного обращения динамических систем*. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 219 с.
4. Костенко Ю. Т., Любчик Л. М. *Системы управления с динамическими моделями*. Харьков: Основа, 1996. 212 с.
5. Борухов В. Т. Критерии обратимости линейных стационарных многомерных систем. *Автоматика и телемеханика*. Киев, 1978. Вып. 11. С. 5–11.
6. Пухов Г. Е., Жук К. Д. *Синтез многосвязных систем управления по методу обратных операторов*. Киев: Наукова думка, 1966. 218 с.
7. Крутько П. Д. *Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели*. Москва: Наука, 1987. 304 с.
8. Willsky A. S. On the invertibility of linear systems. *IEEE Tr. Aut. Control*. 1974. Vol. 19. P. 272–274.
9. Никольский М. С. Об идеально наблюдаемых системах. *Дифференциальные уравнения*. 1971. Т. 7, № 4. С. 631–638.
10. Красовский Н. Н. *Теория управления движением*. Москва: Наука, 1968. 476 с.
11. Куржанский А. Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности*. Москва: Наука, 1977. 392 с.
12. Гусев М. И., Куржанский А. Б. Обратные задачи динамики управляемых систем. *Механика и научно-технический прогресс. Том 1: Общая и прикладная механика*. Москва: Наука, 1987. С. 187–195.
13. Аникин С. А., Гусев М. И. Оценивание возмущающих сил по измерениям параметров движения. *Гарантированное оценивание и задачи управления*. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 19–30.
14. Аникин С. А. Об оценке погрешности метода регуляризации А. Н. Тихонова в задачах восстановления входов динамических систем. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1997. № 9. С. 1056–1067.
15. Грановский В. А. *Динамические измерения*. Ленинград: Энергоиздат, 1984. 224 с.
16. Шестаков А. Л., Иосифов Д. Ю. Решение обратной задачи динамики на основе теории модального управления с использованием измеряемого вектора параметров состояния первичного измерительного преобразователя. *Изв. Челяб. науч. центра*. 2005. № 4(30). С. 144–149.
17. Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А., Захарова Е. В. Динамические измерения как задача оптимального управления. *Обозрение прикл. и пром. математики*. 2009. Т. 16, № 4. С. 732–733.
18. Куценко О. С., Коваленко С. В. Динамічні вимірювання як задача обернення керованих систем. *Метрологія та вимірювальна техніка (Метрологія–2020). XII Міжнародна науково–технічна конференція (6–8 жовтня 2020 р.). Збірник доповідей*. Харків: ННЦ «Інститут метрології», 2020. С. 87–91.
19. Kutsenko A., Kovalenko S., Tovazhnyanskyy V. Inversion of dynamic systems for certain classes of signals. *CEUR Workshop Proceedings*. 2019. Vol. 2353. P. 391–401.

References (transliterated)

1. Sain M. K, Massey J. L. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969, vol. AS–14, № 2, pp. 141–149.
2. Silverman L. M. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969, vol. AS–14, № 3, pp. 270–276.
3. Ilyin A. V., Korovin S. K., Fomichev V. V. *Metody robastnogo obrashcheniya dinamicheskikh sistem* [Methods for Robust Inversion of Dynamical Systems]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2009. 219 p.
4. Kostenko Yu. T., Lyubchik L. M. *Sistemy upravleniya s dinamicheskimi modelyami* [Control systems with dynamic models]. Kharkov, Osnova Publ., 1996. 212 p.
5. Borukhov V. T. Kriterii obratimosti lineynykh statsionarnykh mnogomernykh sistem [Criteria for the reversibility of linear stationary multidimensional systems]. *Avtomatika i telemekhanika*. Kiev, 1978, is. 11, pp. 5–11.
6. Pukhov G. E., Zhuk K. D. *Sintez mnogosvyaznykh sistem upravleniya po metodu obratnykh operatorov* [Synthesis of multiply connected control systems by the method of inverse operators]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1966. 218 p.
7. Krutko P. D. *Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem. Lineynye modeli* [Inverse problems of the dynamics of controlled systems. Linear Models]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 304 p.
8. Willsky A. S. On the invertibility of linear systems. *IEEE Tr. Aut. Control*. 1974, vol. 19, pp. 272–274.
9. Nikolsky M. S. Ob ideal'no nablyudaemykh sistemakh [On ideally observable systems]. *Differentsial'nye uravneniya*. 1971, vol. 7, no 4, pp. 631–638.
10. Krasovsky N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion Control Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 476 p.
11. Kurzhansky A. B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Management and supervision in conditions of uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 392 p.
12. Gusev M. I., Kurzhansky A. B. Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem [Inverse problems of dynamics of controlled systems]. *Mekhanika i nauchno-tekhnicheskiy progress, vol. 1: Obshchaya i prikladnaya mekhanika*. Moscow, Nauka Publ., 1987, pp. 187–195.
13. Anikin S. A., Gusev M. I. Otsenivanie vozmushchayushchikh sil po izmereniyam parametrov dvizheniya [Estimation of Disturbing Forces from Measurements of Motion Parameters]. *Garantirovannoe*

otsenivanie i zadachi upravleniya. Sverdlovsk, UNTs AN SSSR Publ., 1986. pp. 19–30.
14. Anikin S. A. Ob otsenke pogreshnosti metoda regulyarizatsii A. N. Tikhonova v zadachakh vosstanovleniya vkhodov dinamicheskikh sistem [On the estimation of the error of A. N. Tikhonov's regularization method in problems of restoring the inputs of dynamical systems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i mat. fiziki*. 1997, no 9, pp. 1056–1067.
15. Granovsky V. A. *Dinamicheskie izmereniya* [Dynamic measurements]. Leningrad, Energoizdat Publ., 1984. 224 p.
16. Shestakov A. L., Iosifov D. Yu. Reshenie obratnoy zadachi dinamiki na osnove teorii modal'nogo upravleniya s ispol'zovaniem izmeryaemogo vektora parametrov sostoyaniya pervichnogo izmeritel'nogo preobrazovatelya [Solution of the inverse problem of dynamics based on the theory of modal control using the measured vector of state parameters of the primary measuring transducer]. *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra.* 2005, no 4(30), pp. 144–149.
17. Shestakov A. L., Sviridyuk G. A., Zakharova E. V. Dinamicheskie izmereniya kak zadacha optimal'nogo upravleniya [Dynamic Measurements as an Optimal Control Problem]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*. 2009, vol. 16, no 4, pp. 732–733.
18. Kutsenko O. S., Kovalenko S. V. [Dynamic measurements as a problem of inversion of controlled systems]. *Metrologiya ta vymiryuval'na texnika (Metrologiya–2020). XII Mizhnarodna naukovo–texnichna konferenciya (6–8 zhovtnya 2020 r.). Zbirnyk dopovidej* [Metrology and measuring technology (Metrology-2020). XII International Scientific and Technical Conference (October 6–8, 2020). A collection of reports]. Kharkiv, NNTs "Institut metrologiï" Publ., 2020, pp. 87–91.
19. Kutsenko A., Kovalenko S., Tovazhnyanskyy V. Inversion of dynamic systems for certain classes of signals. *CEUR Workshop Proceedings.* 2019, vol. 2353, pp. 391–401.

Надійшла (received) 20.11.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Куценко Олександр Сергійович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій; м. Харків, Україна; ORCID: 0000-0001-6059-3694; e-mail: Oleksandr.Kutsenko@khpi.edu.ua

Коваленко Сергій Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій; ORCID: 0000-0001-8763-0862; e-mail: Serhii.Kovalenko@khpi.edu.ua

Kutsenko Oleksandr Serhiyovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", professor of the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies; Kharkiv, Ukraine; ORCID: 0000-0001-6059-3694; e-mail: Oleksandr.Kutsenko@khpi.edu.ua

Kovalenko Serhii Volodymyrovych – Candidate of Technical Sciences (PhD), Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies; Kharkiv, Ukraine; ORCID: 0000-0001-8763-0862; e-mail: Serhii.Kovalenko@khpi.edu.ua