УПРАВЛІННЯ В ОРГАНІЗАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ

MANAGEMENT IN ORGANIZATIONAL SYSTEMS

УДК 330.46 **DOI: 10.20998/2079-0023.2022.02.10**

О. С. МЕЛЬНИКОВ

ДИСКРЕТНО-КОНТІНУАЛЬНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ЗБУТОМ У РЕАЛЬНОМУ МАСШТАБІ ЧАСУ

Предметом дослідження є розробка стратегії динамічного управління цінами при реалізації продукції на фіксованому інтервалі часу. Розглянуто випадок, коли попит на продукцію продавця можна представити як комбінацію двох випадкових процесів: 1) пуассонівського потоку потенційних споживачів; 2) купівлі товару індивідуальним споживачем, ймовірність якої зворотно залежить від ціни продукції. Споживачі потребують щонайбільше одну одиницю товару, що продається і мають незалежні однаково розподілені оцінки його споживчої вартості. Така структура попиту дозволяє формалізувати вибір цінової стратегії як задачу оптимального управління. Рішення цієї задачі методами динамічного програмування наводить до системи диференційних рівнянь типу Ріккаті, розв'язок яких дозволяє отримати оптимальну цінову політику у вигляді функції від часу до закінчення терміну реалізації та рівня залишків нерозпроданої продукції. Розглянуто приклад практичного вирішення задачі оптимального управління цінами для окремих випадків, коли вдається знайти аналітичне рішення. Для загального випадку показано, як знайти оптимальні ціни за допомогою чисельних методів. Розрахунки свідчать, що оптимальні ціни є спадними функціями від часу та кількості нерозпроданої продукції. Комбінація цих факторів разом із випадковим характером збуту продукції наводять до досить складних траєкторій спостережуваних цін, приклади яких були отримані за допомогою імітаційних експериментів. Зокрема, в багатьох випадках результатом імплементації запропонованої стратегії є циклічна поведінка цін, розповсюдженість якої в роздрібній торгівлі є добре документованим феноменом. Також було розглянуто задачу оптимізації очікуваного доходу продавця при використанні ним постійних цін. Зіставлення очікуваного доходу продавця при статичних і динамічних цінах свідчить про значну перевагу останніх. Економічний ефект від використання динамічного ціноутворення є найбільш вагомим у ситуаціях, коли наближується остаточний строк реалізації продукції.

Ключові слова: управління збутом; динамічне ціноутворення; пуассонівський процес; метод зворотної індукції; варіаційне числення

O. S. MELNIKOV

DISCRETE-CONTINUOUS MODEL OF SALES MANAGEMENT IN REAL TIME

The subject of the research is the development of a strategy for dynamic price management when selling products over a fixed time interval. We consider the case when the demand for the seller's products can be represented as a combination of two random processes: 1) Poisson flow of potential consumers; 2) the purchase of goods by an individual consumer, the probability of which is inversely related to the price of the product. Consumers need at most one unit of the good and have independent equally distributed estimates of its consumer value. Such demand structure allows to formalize the choice of the optimal pricing strategy as an optimal control problem. Employing dynamic programming methods to solving this problem yields a system of Riccati differential equations. The optimal solution is obtained in the closed–loop form as a function of the time to expiration of the product value and unsold inventory levels. Examples of a practical solution to the optimal pricing problem are given for special cases when it is possible to find an analytical solution. For the general case, it is shown how to find the optimal prices using numerical methods. Calculations show that optimal prices are decreasing functions of time and inventory levels. The combination of these factors, together with the random nature of the product sales, leads to rather complex observed price trajectories, examples of which were obtained using computer simulations. In particular, in many cases, the implementation of the proposed strategy results in cyclical price behavior, the prevalence of which in retail is well documented. The problem of optimizing the expected income of the seller when using constant prices was also solved. Comparison of the expected income of the seller under static and dynamic prices indicates a significant advantage of the latter. The economic effect of using dynamic pricing is most significant near the expiration of the product value.

Keywords: sales management; dynamic pricing; Poisson process; backward induction; calculus of variations

Вступ. Одним із головних елементів, що забезпечує функціонування ринкового механізму, є здатність цін адаптуватися до мінливих економічних умов. Проте, швидкість такої адаптації не завжди є високою. До факторів, які уповільнюють темпи зміни цін, підприємці відносять:

– брак оперативної інформації;

– час, необхідний на усвідомлення змін, що відбулися;

– високі витрати, пов'язані із зміною цін [1].

Деякі видатні економісти (зокрема, кейнсіанської та неокейнсіанської школи) навіть вважають надмірну статичність цін («sticky prices») головним чинником періодичних економічних криз [2].

Розвиток електронної комерції надає компаніям унікальні можливості для більш оперативного коригування цін. Цьому сприяють:

– доступність великих обсягів даних про структуру попиту в реальному масштабі часу (дані про відвідуваність сайту, конверсію продажів, тощо);

– низькі витрати на зміну продажних цін;

– можливість імплементації досить складних алгоритмів коригування цін безпосередньо у програмному середовищі інтернет-магазину.

Це сприяло активізації інтересу до використання алгоритмів динамічного ціноутворення для управління збутом. У широкому сенсі під динамічним ціноутворенням розуміють стратегію гнучкої зміни продажних цін в залежності від ринкових умов. Чинниками, що впливають на ціну товару, можуть бути пора року, день тижня, погода, умови постачання продукції, дії конкурентів тощо.

Особливу популярність методи динамічного ціноутворення набули в тих галузях, де в короткостроковій перспективі пропозицію товарів складно змінити. Прикладами таких ситуацій можуть бути продажі квитків на авіарейси, круїзні лайнери, концерти, спортивні події; бронювання готелів; дорожні збори; послуги постачання газу та електроенергії та ін. Успіх таких практик сприяє їх розповсюдженню також і в інші галузі економіки.

Отже, дослідження механізмів динамічного ціноутворення для оперативного управління збутом і аналіз їх економічної ефективності є актуальним.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Напевно, найперше ідею динамічного регулювання цін для максимізації доходу від реалізації продукції було запропоновано в роботі Кінкейда – Дарлінга [3], яка не привернула широкої уваги до 90-х років XX сторіччя. У роботі [4] розглядалась задача реалізації одиниці товару для випадку однорідних споживачів, які мають однакову, але невідому для продавця оцінку споживчої вартості товару. Продавець може поступово дізнатись цю оцінку шляхом зміни цін на товар, що реалізується. В роботі доводиться, що оптимальною політикою продавця є поступове зниження цін. Ця практика відома в маркетингу як «зняття вершків».

Найвідомішим дослідженням з даної тематики є робота Галего – Ван Райзіна [5]. В ній попит на продукцію розглядається як безперервний процес Пуассона з інтенсивністю, яка залежить від ціни реалізації. На базі методів варіаційного числення отримано систему диференційних рівнянь для оптимальної цінової стратегії продавця. Для експоненційної функції попиту автори отримали аналітичне рішення, а для загального випадку встановили деякі властивості оптимальної цінової політики Існує багато модифікацій та розширень цієї моделі. Наприклад, в роботі [6] розглядаються обмеження на множину прийнятих для продавця цін, в роботі [7] – нестаціонарний попит на його продукцію. В роботі [8] аналізується можливість стратегічної поведінки споживачів, зокрема, їх передбачування можливого зниження цін у майбутньому. Робота [9] розглядає вплив дій конкурентів на цінову політику продавця. Детальний огляд цих досліджень міститься в [1].

Останні дослідження з даної тематики присвячені застосуванню алгоритмів машинного навчання для оцінки функцій споживчого попиту [10], [11]; обчислювальним аспектам реалізації алгоритмів динамічного ціноутворення [12]; евристичним правилам регулювання цін в умовах обмеженої інформації [13].

Проте, багато питань щодо доцільності застосування методів динамічного ціноутворення з точки зору їх економічної ефективності та практичної імплементації залишаються суперечливими. Зокрема, викликає інтерес розробка таких алгоритмів динамічного регулювання цін, які було б просто реалізувати на практиці в реальному масштабі часу, а також їх порівняння зі стратегіями фіксованих цін.

Мета роботи. В роботі [13] автором було запропоновано алгоритм динамічного управління цінами на фіксованому інтервалі часу для моделі попиту, коли споживачі продукції підприємства зацікавлені у придбанні щонайбільше однієї одиниці товару, а потік споживачів має постійну інтенсивність. У даній роботі ця модель розвивається на більш поширений випадок, коли потік споживачів є випадковим процесом із пуассонівським розподілом. Така модель добре збігається з такими практичними задачами управління збутом, як продаж авіаквитків, бронювання номерів у готелях, роздрібна торгівля товарами із фіксованим терміном реалізації, тощо. Порівняно простий характер попиту дозволяє в деяких випадках отримати аналітичне рішення для оптимальної цінової політики, встановити її якісні характеристики і виявити переваги порівняно із застосуванням статичних цін торгівля товарами із фіксованим терміном реалізації, тощо.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо продавця, якому потрібно реалізувати x одиниць однорідного дискретного товару протягом заздалегідь визначеного обмеженого періоду часу T. Вважатимемо, що продавець має певний ступінь ринкової влади, що надає йому можливість варіювати ціни в певному діапазоні. Метою продавця є отримання максимального очікуваного доходу від реалізації продукції на часовому інтервалі $[0,T]$, а його контрольною змінною – ціна, яка встановлюється в період часу t, $p(t)$. Попит на продукцію продавця є суперпозицією двох випадкових процесів:

1) прибуття потенційних споживачів;

2) прийняття рішення про купівлю товару індивідуальним споживачем.

Кожний потенційний споживач, якого будемо індексувати через k, має максимальну ціну ξ_k, яку він згоден заплатити за товар (надалі у відповідності з прийнятою в мікроекономіці термінологією будемо називати її резервованою ціною споживача [14]). Споживач купує одиницю товару, якщо його резервована ціна перевищує ціну, встановлену продавцем на момент прибуття k-го споживача. Будемо вважати, що резервовані ціни окремих споживачів є незалежними однаково розподіленими випадковими змінними із законом розподілу $F(p) = \mathbb{P}\{\xi \le p\}$.

Прибуття споживачів до продавця будемо описувати пуассонівським процесом із інтенсивністю λ. Позначимо через $n(t)$ загальну кількість споживачів, що відвідали продавця на інтервалі часу $[0,t]$. Визначимо випадковий момент взаємодії k-го споживача із продавцем як

$$\tau_k = \inf\{t \,|\, n(t) = k\}. \qquad (1)$$

За властивостями пуассонівського процесу (дивись, наприклад, [15]) інтервал часу між послідовними прибуттями споживачів $\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ має експонеційний розподіл із параметром λ, тобто

$$P\{\Delta_k \le t\} = 1 - \exp(-\lambda t) \ \forall k \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

Позначимо через $X(t)$ рівень залишків нереалізованої продукції у продавця в момент часу t. Мета продавця полягає у максимізації очікуваного доходу на інтервалі часу $[0, T]$ за умови $X(0) = x$:

$$V[x,T] = M\left[\sum_{k=1}^{N(T)} p(\tau_k)\, I\{p(\tau_k) \le \xi_k\} \,\Big|\, X(0) = x\right] \qquad (3)$$

де $I\{A\}$ позначає індикатор події A, $N(t) = \min(s,t)$, $s = \inf\left\{t \,\Big|\, \lim_{u \downarrow t} X(u) = 0\right\}$, а динаміка випадкового процесу зміни залишків нереалізованої продукції $X(t)$ задається рівнянням

$$X(t) = X(0) - \sum_{k=1}^{n(t)} I\{p(\tau_k) \le \xi_k\}. \qquad (4)$$

Динаміка процесу $X(t)$ ілюструється на рис. 1.

Рис. 1. Процес еволюції залишків нереалізованої продукції $X(t)$

Вирішимо задачу (3)–(4) спочатку для спеціального випадку коли $x = 1$. В цьому випадку цільова функція (3) спрощується до виразу

$$V[T] = M\left[p(s)\, I\{s \le T\} \,|\, X(0) = 1\right]. \qquad (5)$$

Задачу (5) можна вирішити за допомогою методу зворотної індукції [16]. Введемо функцію очікуваного виграшу продавця на момент часу t як

$$V(t) = M\left[p(s)\, I\{s \le T\} \,\big|\, X(T-t) = 1\right]. \qquad (6)$$

Розглянемо зміну функції $V(t)$ на нескінченно малому проміжку часу $[t, t+dt]$. Позначимо через $q_k(h)$ ймовірність появи k потенційних споживачів протягом інтервалу часу h, тобто $q_k(h) = P\{n(t+h) - n(t) = k\}$.

Оскільки пуассонівський процес є стаціонарним із незалежними інкрементами, ця ймовірність не залежить від t і дорівнює $\frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{-\lambda h}$. Вочевидь, для малого проміжку h, $q_k(h) = o\left(q_1(h), q_0(h)\right)$ для $k \ge 2$. Таким чином, $q_0(h) + q_1(h) \approx 1$ і

$$\begin{aligned} q_0(h) &= \exp(-\lambda h) \approx 1 - \lambda h; \\ q_1(h) &\approx 1 - q_0(h) \approx \lambda h. \end{aligned} \qquad (7)$$

Отже, якщо єдину наявну одиницю товару ще не було продано на момент часу t, то протягом проміжку часу dt можливі два результати:

1) товар буде продано, після чого процес продажу завершується. У свою чергу, такий результат можливий як добуток двох подій: в деякий момент $\tau \in [t, t+dt]$ до продавця прибуває споживач, і його резервована ціна виявляється вищою, ніж $p(t)$. Для компактності формул позначимо $p(t) = u$, $Q(u) = 1 - F(u)$. Тоді ймовірність зазначеного результату складає $q_1(dt)Q(u) \cong \lambda Q(u)dt$.

2) товар не буде продано з комплiментарною ймовірністю $1 - \lambda Q(u)dt$. Тоді процес продажу поновлюється в момент часу $t+dt$, що приносить продавцю очікуваний виграш $V(t+dt)$.

Отже, за законом повної ймовірності

$$V(t) = u\lambda Q(u)dt + V(t+dt)\left(1 - \lambda Q(u)dt\right). \qquad (8)$$

Звідси

$$\frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = -\lambda u Q(u) + \lambda Q(u) V(t+dt). \qquad (9)$$

Перейшовши в формулі (9) до границі при $dt \to 0$, отримаємо

$$\frac{dV(t)}{dt} = \dot{V} = \lambda Q(u)(V(t) - u). \qquad (10)$$

Оскільки ймовірність прибуття споживача на нульовому проміжку часу дорівнює нулю, рівняння (9) можна доповнити граничною умовою $V(T) = 0$.

Замінимо змінні за формулою $\tau = T - t$, де $\tau -$ час, що залишився до кінцевого терміну реалізації. Отримаємо наступну задачу варіаційного числення:

$$V(T) = V(T) - V(0) = \int_0^T \dot{V} dt \underset{u}{\rightarrow} \max. \qquad (11)$$

Підставивши в формулу (11) рівняння динаміки очікуваного доходу (10), отримаємо

$$\int_0^T \lambda Q(u)(V-u)dt \underset{u}{\rightarrow} \min. \qquad (12)$$

Рівняння Ейлера для задачі (12) матиме вигляд

$$\frac{d\dot{V}}{du} = Q'(u)(V-u) - Q(u) = 0. \qquad (13)$$

Для будь-якого заданого розподілу резервованих цін споживачів $Q(u)$ формула (13) буде алгебраїчним рівнянням, з якого оптимальне управління u^* можна виразити як функцію від V. Підставивши надалі $u^*(V)$ в рівняння динаміки (10) і інтегрувавши його при граничній умові $V(0) = 0$, можна отримати u^* і V в явному вигляді як функції від часу.

В якості прикладу розглянемо випадок, коли резервовані ціни споживачів розподілені рівномірно на одиничному інтервалі. У цьому випадку $Q(u) = 1 - u$ і рівняння (13) приймає вигляд $u - V - (1-u) = 0,$ звідки $u = (V+1)/2$ або $V = 2u - 1.$ Підставивши останній вираз до рівняння динаміки (10), отримаємо

$$2\dot{u} = \lambda(1-u)(u-2u+1) = \lambda(1-u)^2. \qquad (14)$$

Рівняння (14) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, яке має загальне рішення

$$u = 1 - \frac{2}{\lambda\tau + C}, \qquad (15)$$

де C – невизначена константа. Скориставшись граничною умовою $V(0) = 0,$ отримаємо $C = 4.$ Отже, остаточні рівняння для оптимальної цінової політики продавця та його очікуваного доходу матимуть такий вигляд:

$$p(\tau) = \frac{\lambda\tau + 2}{\lambda\tau + 4}; \quad V(\tau) = \frac{\lambda\tau}{\lambda\tau + 4}. \qquad (16)$$

Легко бачити, що обидві функції $p(\tau)$ і $V(\tau)$ є безперервними, монотонно зростаючими, опуклими функціями своїх аргументів, що сходяться до одиниці при $\tau \to \infty$. Графіки цих функцій, що відповідають значенню $\lambda = 0,5$ наведено на рис. 2.

Повернемось тепер до загального випадку задачі (3)–(4). Позначимо через $V(x,t)$ математичне сподівання виразу в квадратних дужках в формулі (3) за умови $X(t) = x$ і через $p(x,t)$ – ціну, яку встановить продавець в момент t за тієї самої умови.

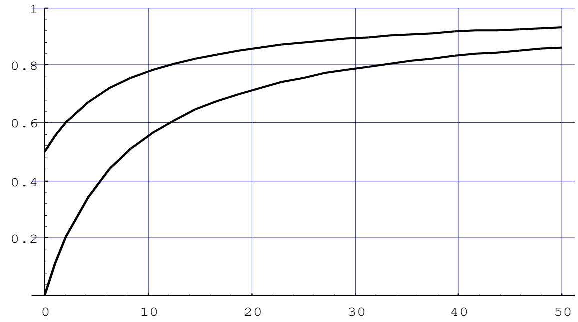

Рис. 2. Графіки функцій $p(\tau)$ і $V(\tau)$ ($\lambda = 0,5$, $T = 50$)

За зробленими припущеннями споживачі ніколи не куплять більше одиниці товару. Тому при будь-якій ціновій політиці випадковий процес $X(t)$ буде змінюватись дискретно, одиничними декрементами. Події, які можуть відбутися протягом нескінченно малого проміжку часу dt залишаються такими самими, які були окреслені при виведенні формули (8) і матимуть такі ж самі ймовірності. Єдина різниця полягає в тому, що якщо продавцю вдасться реалізувати одиницю продукції за цей проміжок часу, його майбутній очікуваний виграш і ціна реалізації складатимуть $V(x-1, t+dt)$ і $p(x-1, t+1),$ відповідно. Отже, застосувавши ще раз закон повної ймовірності, отримаємо

$$\begin{aligned} V(x,t) = &\left[u + V(x-1, t+dt)\right]\lambda Q(u)dt \\ &+ V(x, t+dt)\left[1 - \lambda Q(u)dt\right], \end{aligned} \qquad (17)$$

де, як і раніше, контрольну змінну $p(x,t)$ позначено через u для компактності запису. Після упорядкування доданків і граничного переходу при $dt \to 0,$ отримаємо наступне диференційне рівняння:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \lambda Q(u)\left[V(x,t) - u - V(x-1,t)\right]. \qquad (18)$$

Оскільки x є цілочисловою змінною, функції $V(x,t)$ і $p(x,t)$ можна розглядати як множину функцій часу, індексованих параметром x. Таким чином, (18) є звичайним диференційним рівнянням. Зробивши заміну змінних $\tau = T - t,$ позначивши через $V(x,t)$ і $V_x(t)$ опустивши для стислості аргумент часу, формулу (18) можна переписати як

$$\dot{V}_x = \lambda Q(u)\left[u + V_{x-1} - V_x\right]. \qquad (19)$$

Цільовий функціонал продавця можна записати як

$$\max_u V_x(T) \Leftrightarrow \max_u \int_0^T \dot{V}_x(t)dt, \qquad (20)$$

а рівняння Ейлера для нього матиме вигляд

$$\frac{d\dot{V}_x}{du} = Q'(u)(V_x - V_{x-1} - u) - Q(u) = 0. \qquad (21)$$

Схема рішення системи рівнянь (20) повністю аналогічна наведеній вище процедурі рішення рівняння (13) і ускладнюється лише тим, що рішення слід проводити ітеративно для $x = 1, 2, \ldots$.

Наприклад, для розглянутого вище прикладу, коли резервовані ціни споживачів рівномірно розподілені на одиничному інтервалі, рівняння (21) спрощується до

$$u - V_x + V_{x-1} - 1 + u = 0, \tag{22}$$

звідки $u = p_x = \dfrac{1 + V_x - V_{x-1}}{2}$ або $V_x = V_{x-1} + 2p_x - 1$.

Підставивши останнє співвідношення в рівняння (19), отримаємо наступну систему диференційних рівнянь для оптимальної цінової політики продавця:

$$2\dot{p}_x - \lambda(1 - p_x)^2 + \dot{V}_{x-1} = 0 \tag{23}$$

при граничній умові

$$V_0(t) = 0 \ \forall t \in [0, T]. \tag{24}$$

Рівняння (23) є диференційним рівнянням Ріккаті [17]. При $x = 1$ останній доданок в рівнянні (23) зникає, що дозволяє вирішити його аналітично, що й було зроблено при виведенні формули (16). Для $x > 1$ рішення рівняння (23) можна знайти за допомогою чисельних методів. На рис. 3 наведені результати чисельного інтегрування рівнянь (23) методом Рунге – Кутта для $x = 1, \ldots, 5$, отримані в програмному середовищі Matlab [18]. На рис. 4 наведені відповідні функції очікуваного доходу продавця $V_x(t)$.

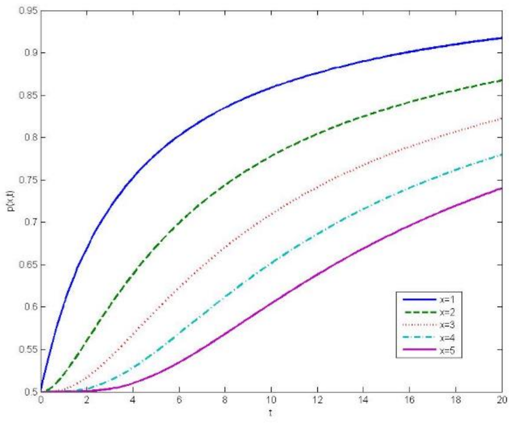

Рис. 3. Оптимальна цінова політика продавця $p_x(t)$

Легко бачити, що оптимальні ціни продавця зростають із збільшенням часу, що залишається до кінцевого терміну реалізації і зменшуються із зростанням залишків нереалізованої продукції. Сукупність цих двох властивостей наводить до досить складної динаміки спостережуваних цін: при загальному тренді до зниження цін з протягом часу, кожна продаж товару наводить до стрибкоподібного зростання цін. На рис. 5 наведені деякі можливі траєкторії цін, отримані за допомогою імітаційного моделювання.

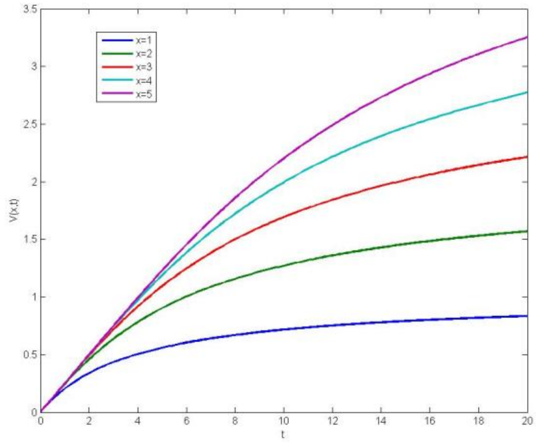

Рис. 4. Очікуваний виграш продавця $V_x(t)$

Для оцінки економічного ефекту від застосування динамічного ціноутворення, порівняємо очікуваний виграш продавця $V_x(t)$ з тим, який можна було б отримати при постійних цінах.

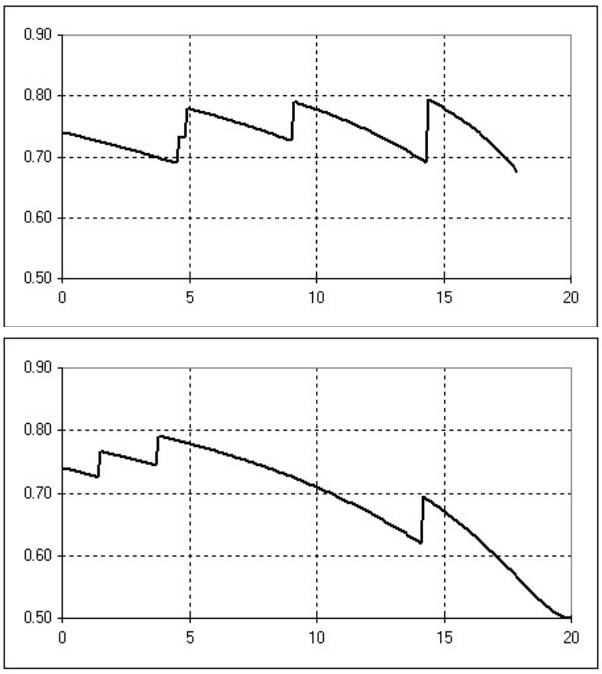

Рис. 5. Приклади траєкторій спостережуваних цін в імітаційних експериментах

Якщо продажна ціна p залишається незмінною протягом терміну реалізації, то процес успішних продажів буде пуассонівським із інтенсивністю $\lambda Q(p)$ і очікуваний виграш продавця можна розрахувати як

$$W_x(p, t) = pM[\min(\nu(t), x)], \tag{25}$$

де $\nu(t)$ – випадкова кількість подій на інтервалі [0, t] згідно з розподілом Пуассона з інтенсивністю $\lambda Q(p)$.

Оптимальну фіксовану ціну при горизонті планування T можна знайти шляхом максимізації виразу (25) при $t = T$. Наприклад, при $x = 1$ і рівномірному розподілі резервованих цін споживачів на одиничному інтервалі, оптимальна ціна (і, відповідно, очікуваний виграш продавця) можна отримати шляхом вирішення оптимізаційної задачі

$$W(p,T) = p(1 - e^{-\lambda(1-p)T}) \underset{p\in[0,1]}{\rightarrow} \max. \qquad (26)$$

Задача (26) не має аналітичного рішення, проте, легко розв’язується будь-яким методом чисельної оптимізації. На рис. 6 порівнюються очікувані доходи продавця при оптимальній фіксованій ціні (штрих-пунктирна лінія) і при динамічному ціноутворенні (суцільна лінія). Також на рис.6 відображено виграш від динамічного управління цінами у відносних одиницях.

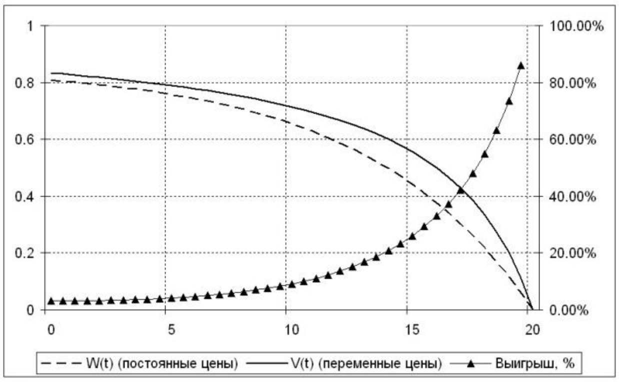

Рис. 6. Виграш від застосування динамічного ціноутворення порівняно зі стратегією постійних цін ($\lambda = 1,\ T = 20$)

З рис. 6 можна побачити, що при тривалому терміні реалізації виграш від динамічного регулювання цін є незначним. Проте, він швидко збільшується із наближенням кінцевого терміну реалізації продукції. В розглянутому прикладі наприкінці періоду реалізації відносний виграш сягає 86 %.

Результатом застосування розглянутої моделі часто є циклічна поведінка спостережуваних цін (що, власне, можна побачити з результатів імітаційних експериментів, наведених на рис. 5). Це добре узгоджується з практикою надання періодичних цінових знижок в підприємствах роздрібної торгівлі [19, 20]. Емпірична перевірка узгодженості динаміки спостережуваних роздрібних цін із запропонованою моделлю є перспективним напрямком для подальших досліджень.

Висновки. В роботі розроблено математичну модель динамічного регулювання цін в реальному масштабі часу при управлінні збутом продукції, попит на яку можна описати композитним пуассонівським процесом. Вона дозволяє визначити оптимальну ціну продукції як функцію від поточного рівня нереалізованої продукції та часу, що залишається до кінцевого строку її реалізації. Проведені розрахунки та імітаційні експерименти свідчать про високу ефективність запропонованого механізму ціноутворення порівняно зі стратегією постійних цін. Динаміка цін, яка випливає із практичної імплементації запропонованої моделі, добре узгоджується із емпіричними спостереженнями стосовно циклічної поведінки роздрібних цін.

Список літератури

1. Elmaghraby W., Keskinocak P. Dynamic Pricing in the Presence of Inventory Considerations: Research Overview, Current Practices, and Future Directions. *Management Science*. 2003. Vol. 49. P. 1287–1309.
2. Barro, R.J., Tenreyro S. Closed and Open Economy Models of Business Cycles with Marked Up and Sticky Prices. *The Economic Journal*. 2006. Vol. 116, Issue 511. P. 434–456.
3. Kincaid W. M., Darling D. An inventory pricing problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 1963. No. 7. P. 183–208.
4. Lazear D. P. Retail Pricing and Clearance Sales. *American Economics Review*. 1986. Vol. 76. P. 14–32.
5. Gallego G., van Ryzin G. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons. *Management Science*. 1994. Vol. 40. P. 999–1020.
6. Feng Y., Xiao B. Optimal policies of yield management with multiple predetermined prices. *Operation Research*. 2000. No. 48. P. 332–343.
7. Zhao W., Zheng Y. Optimal dynamic pricing for perishable assets with non homogeneous demand. *Management Science*. 2000. Vol. 46. P. 375–388.
8. Su X. Intertemporal pricing with strategic customer behavior. *Management Science*. 2007. Vol. 53. P. 726–741.
9. Levin, Y., McGill J, Nediak M. Dynamic pricing in the presence of strategic consumers and oligopolistic competition. *Management Science*. 2009. Vol. 55. P. 32–46.
10. Avramidis A. N. A pricing problem with unknown arrival rate and price sensitivity. *Mathematical Methods of Operations Research.* 2020. No. 92. P. 77–106.
11. Wang R. et al. Solving a Joint Pricing and Inventory Control Problem for Perishables via Deep Reinforcement Learning. *Complexity*. Vol. 2021. Article ID 6643131. 17 p.
12. Чайковская М. П., Медведь Т. С. Модель оптимального ціноутворення в режимі реального часу на основі методів динамічного програмування. *Економічний вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут"*. 2016. № 13. С. 559–568.
13. Мельников О. С. Стратегії динамічного ціноутворення при управлінні збутом дискретних товарів з обмеженим терміном реалізації. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Економічні науки: зб. наук. пр.* Харків: НТУ «ХПІ». 2022. № 2(2022). С. 38–43.
14. Steedman I. Reservation price and reservation demand. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*. 1987. Vol. 4. P. 158–59.
15. Мішура Ю.С., Ральченко К.В., Шевченко Г.М. *Випадкові процеси: теорія, статистика, застосування : підручник*. 2021. Київ: ВПЦ "Київський університет". 496 с.
16. Judd K. L. *Numerical Methods in Economics*. Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1998. 633 p.
17. Wolfram Math. World. Riccati Differential Equation. URL: https://mathworld.wolfram.com/RiccatiDifferentialEquation.html (дата звернення: 25.08.2022).
18. Мэтьюз Д. Г., Финк К. Д. Численные методы. Использование MATLAB. 2001. Москва: Издательский дом «Вильямс». 720 с.
19. Pashigian B. P. Demand uncertainty and sales: A study of fashion and markdown pricing. *American Economic Review*. 1988. Vol. 78, P. 936–953.
20. Pashigan B. P., Bowen B. Why Are Products Sold on Sale?: Explanations of Pricing Regularities. *The Quarterly Journal of Economics.* 1991. Vol. 106. P. 1014–1038.

References (transliterated)

1. Elmaghraby W., Keskinocak P. Dynamic Pricing in the Presence of Inventory Considerations: Research Overview, Current Practices, and Future Directions. *Management Science*. 2003, vol. 49, pp. 1287–1309.

2. Barro, R.J., Tenreyro S. Closed and Open Economy Models of Business Cycles with Marked Up and Sticky Prices. *The Economic Journal*. 2006, Vol. 116, Issue 511, pp. 434–456.
3. Kincaid W. M., Darling D. An inventory pricing problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 1963, 7, pp. 183–208.
4. Lazear D. P. Retail Pricing and Clearance Sales. *American Economics Review*. 1986, vol. 76, pp. 14–32.
5. Gallego G., van Ryzin G. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons. *Management Science*. 1994, vol. 40, pp. 999–1020.
6. Feng Y., Xiao B. Optimal policies of yield management with multiple predetermined prices. *Operation Research*. 2000, no. 48, pp. 332–343.
7. Zhao W., Zheng Y. Optimal dynamic pricing for perishable assets with non homogeneous demand. *Management Science*. 2000, vol. 46, pp. 375–388.
8. Su X. Intertemporal pricing with strategic customer behavior. *Management Science*. 2007, vol. 53, pp. 726–741.
9. Levin, Y., McGill J, Nediak M. 2009. Dynamic pricing in the presence of strategic consumers and oligopolistic competition. *Management Science*. 2009, vol. 55, pp. 32–46.
10. Avramidis A. N. A pricing problem with unknown arrival rate and price sensitivity. *Mathematical Methods of Operations Research.* 2020, no. 92, pp. 77–106.
11. Wang R. et al. Solving a Joint Pricing and Inventory Control Problem for Perishables via Deep Reinforcement Learning. *Complexity* Vol. 2021, Article ID 6643131, 17 p.
12. Chaikovskaia M. P., Medved T. S. Model optymalnoho tsinoutvorennia v rezhymi realnoho chasu na osnovi metodiv dynamichnoho prohramuvannia. [A Model of Optimal Pricing in Real Time Based on Dynamic Programming]. *Ekonomichnyi visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu Ukrainy "Kyivskyi politekhnichnyi instytut"* [Economic Bulletin of the National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute]. 2016, № 13, pp. 559–568.
13. Melnikov O. S. Stratehii dynamichnoho tsinoutvorennia pry upravlinni zbutom dyskretnykh tovariv z obmezhenym terminom realizatsii [Dynamic pricing strategies in sales management of discrete products with a limited lifetime]. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriia: Ekonomychni nauky: zb. nauk. pr.* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Economic Sciences. A Colllection of Scientific Papers]. Kharkiv: NTU «KhPI». 2022, № 2(2022), pp. 38–43.
14. Steedman I. Reservation price and reservation demand. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*. 1987, Vol. 4, pp. 158–59.
15. Mishura Yu.S., Ralchenko K.V., Shevchenko H.M. *Vypadkovi protsesy: teoriia, statystyka, zastosuvannia : pidruchnyk* [Stochastic Processes: Theory, Statistics, and Applications]. 2021. Kyiv: VPTs "Kyivskyi universytet". 496 s.
16. Judd K. L. *Numerical Methods in Economics*. 1998, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 633 p.
17. Wolfram Math. World. Riccati Differential Equation. URL: https://mathworld.wolfram.com/RiccatiDifferentialEquation.html (accessed 25.08.2022).
18. Mathews, J.H., Fink, K.D. *Numerical methods using MATLAB* (Vol. 3). 1999. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall. (Rus.ed.: Mathews, J.H., Fink, K.D. *Chislennyye metody. Ispolzovaniye MATLAB*. 2001. Moscow, Williams Publishing House, 720 p.)
19. Pashigian B. P. Demand uncertainty and sales: A study of fashion and markdown pricing. *American Economic Review*. 1988, vol. 78, pp. 936–953.
20. Pashigan B. P., Bowen B. Why Are Products Sold on Sale?: Explanations of Pricing Regularities. *The Quarterly Journal of Economics*. 1991, vol. 106, pp. 1014–1038.

Надійшла (received) 01.10.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Мельников Олег Станіславович – кандидат економічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри системного аналізу та інформаційно–аналітичних технологій, Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2409-4983, e-mail: Oleg.Melnikov@khpi.edu.ua.

Melnikov Oleg Stanyslavovich – candidate of economic sciences (PhD), docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of System Analysis and Information–analytical Technologies; Kharkiv, Ukraine; associate professor, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2409-4983, e-mail: Oleg.Melnikov@khpi.edu.ua.