DOI: 10.20998/2079-0023.2023.01.09
УДК 624

А. І. ЛЕВТЕРОВ, кандидат технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, завідувач кафедри інформатики та прикладної математики; м. Харків, Україна, e-mail: lai@khadi.kharkov.ua, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6586-1061
Г. А. ПЛЄХОВА, кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, доцент кафедри інформатики та прикладної математики; м. Харків, Україна, e-mail: plehovaanna11@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6912-6520
М. В. КОСТІКОВА, кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, доцент кафедри інформатики та прикладної математики; м. Харків, Україна, e-mail: kmv_topaz@ukr.net, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5197-7389
А. О. ОКУНЬ, кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри комп'ютерного моделювання та інтегрованих технологій обробки тиском; м. Харків, Україна, e-mail: okunanton@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6467-4229

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАС І ПОТОКІВ

Досліджено та розроблено математичні моделі для вирішення задач оптимізації з'єднання в неодносвязних областях за типових технологічних обмежень на геометричні та топологічні параметри трас, насамперед, на кривизну та кількість вигинів. Моделі пов'язані з існуючими та перспективними топогеодезичними моделями полігональних зображень територій. Розв'язання задач зв'язку передбачає пошук оптимальних траєкторій маршрутів і сіток у межах необмежених геометричних форм. Для цього потрібна розробка безлічі загальних моделей як полів, де здійснюються зв'язки. Сполучення можуть бути різних типів, таких як гнучкі, манхеттенські, рівні, тверді, а також маршрути інших типів. Смеляков та Алісейко (Плєхова Г. А.) зауважують, що глобальне та локальне регулювання геометричних зв'язків для розв'язання задач зв'язків можна представити як загальну оптимізаційну задачу зв'язку, яка визначається як задача вибору $< \Omega, R >$, де R – набір альтернатив, Ω – принцип оптимальності. При цьому набір можна представити як сукупність фазового простору ϕ та обмежень Q, які застосовуються до параметрів фазового простору ϕ. У свою чергу, доцільно уявити, що фазовий простір ϕ є декартовим добутком $\phi = X*Y*Z*U$ вихідних даних X, збурень Y, параметрів керування U та результатів Z. Аналіз задачі свідчить про те, що насамперед ефективність моделювання фазового простору ϕ пов'язана з описом вихідних даних X про площу F і простір L можливих магістралей в F. Питання досліджується як розробка побудови структур моделей та методології їх використання, які б уможливили конструктивне та ефективне (в обчислювальній техніці) моделювання та дослідження різноманітних моделей та алгоритмів, які зберігають геометричність та інваріантність моделей, які необхідні для їх конкретного використання в умовах прийнятності використання різних вихідних структур даних. Дане дослідження присвячене розв'язанню задачі розробки моделі для задач зв'язку в рамках геометричного проектування.

Ключові слова: математична модель, задача оптимізації, обмеження, топологічний параметр, норма і правило побудови, гомотопія, точність.

Постановка проблеми та її актуальність. Об'єктом дослідження є математичні моделі задач пошуку оптимальних мереж і маршрутів, що виникають при автоматизації проектування та управління з урахуванням ландшафту при обмеженнях на форму, взаємне розташування та інші параметри зв'язку. Предметом дослідження є розробка математичної моделі для вирішення задачі пошуку оптимальних маршрутів і сполучних мереж у неоднозв'язних областях при обмеженнях на кривизну, кількість вигинів та інших геометричних топологічних параметрів зв'язку, що відображають типові технологічні вимоги. У цій статті використовуються такі методи дослідження: методи оптимізації, обчислювальні підходи, обчислювальна геометрія, математичне моделювання та підходи комбінаторної топології. Що стосується топологічних параметрів, то в даній роботі представлено їх декомпозицію як систему основних і стандартних задач; поставлено основні задачі оптимізації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Найбільш ефективний підхід до вирішення аналогічних задач [1–5], які є NP-повними навіть для випадку вигинів у опуклій області, розроблено в роботах Ю. Г. Стояна та С. В. Смелякова [6–9]. Це синтез комбінаторних і варіаційних методів оптимізації в рамках ієрархічної системи моделей. Низькорівневі моделі орієнтовані на вирішення базових задач пошуку оптимального маршруту за допомогою варіаційних методів, які були розроблені М. М. Моісеєвим, С. В. Смеляковим і Н. З. Шором. Високорівневі моделі орієнтовані на дослідження гомотопних сімей магістралей і мереж на основі методів дискретної оптимізації, які були розроблені в роботах В. І. Михалєвича, І. В. Сергієнка, Ю. Г. Стояна, С. В. Яковлєва та ін. [10–12]. Неможливість повної формалізації вимог до будівельних норм і правил (БНіП) (як наслідок їх неузгодженості та не повної строгості формул) та підпорядкований характер проблем зв'язку по відношенню до проблем нормалізації областей зумовлює необхідність їх вирішення у двох режимах – оптимізації та імітації, коли особа, яка приймає рішення, залучається до процесу інтерактивного вирішення проблем зв'язку.

Мета дослідження. Метою даної роботи є розробка математичної моделі для вирішення оптимізаційних задач з'єднання в неоднозв'язних областях при типових технологічних обмеженнях на геометричні та топологічні параметри траси, перш за все, на кривизну та кількість вигинів. Модель повинна відповідати існуючим і перспективним топогеодезичним моделям полігонального зображення території; методи оптимізації повинні гарантувати ефективне вирішення основних класів прикладних задач і допускати природну інтеграцію в існуючі та перспективні системи проектування та управління.

Для досягнення мети необхідно вирішити такі завдання:

- відсортувати основні критерії та обмеження, які пов'язані з геометричними та топологічними параметрами траси, які будуть розглядатися при проектуванні з'єднань, і на цій основі поставити основну задачу оптимізації;
- розробити загальну модель проблем зв'язку, що забезпечує постановку основних типів задач оптимізації та моделювання маршрутів з використанням функціональних класів ліній та дозволяє нарощувати та інтегрувати в існуючі системи.

Побудова та опис моделі. *Основні стандарти побудови програмно-визначених мереж.* Відповідно до вимог, що висуваються до точності одержуваних розв'язків та обчислювальної ефективності методів їх побудови, а також до існуючих світових тенденцій використання полігональних моделей рельєфу в системах топогеодезичного забезпечення, в моделях областей і методах оптимізації для вирішення задач зв'язку слід використовувати полігональні моделі неоднозв'язної області, яка вказана для з'єднань маршрутів, а не сіткові моделі, які використовуються в сучасних системах, таких як ReCAD і CREDO. Отже, область розраховується наступним чином:

$$F = Cl\left[\frac{F_0}{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n_F} F_i\right)}\right], \tag{1}$$

де Cl – операція закриття; F_0 – загальна область, яка використовується для вивчення проблем моделювання; F_i, $(i = 1, 2, \dots, n_F)$ – однозв'язні області, які взаємно перетинаються («заборонені зони» для маршрутизації) в однозв'язній області F_0 на площині.

Загальною математичною особливістю парних маршрутів (автомагістралей, залізничних і трамвайних колій) є вимога безперервності та обмеженості кривизни. Вимога повинна бути виконана для забезпечення безпеки руху транспорту та відсутності ударів. У зв'язку з цим у будівельних нормах і стандартах зазначено, що осьові лінії автомагістралі будуть представлені сплайнами

$$p = S_1\ r_1\ C_1\ R_1\ S_2\ r_2\ C_2\ R_2\ \dots \\ S_m\ r_m\ C_m\ R_m\ S_{m+1}, \tag{2}$$

де S_i – катети; C_i – дуги кіл; r_i, R_i – сполучні криві, які можуть бути представлені фрагментами клотоїди та кубічної параболи; m – кількість фрагментів відповідних кривих.

Аналіз будівельних норм і правил показує, що більшість досліджуваних технологічних обмежень для транспортних та інженерних мереж можна звести до наступних основних класів геометричних і топологічних обмежень: Q_1 – обмеження на максимальну довжину прямих катетів; Q_2 – обмеження на кут повороту α, $\alpha \in (-90^\circ, 90^\circ)$, у вершинах; Q_3 – обмеження на функціональний клас гладких кривих: $\tilde{W}$, SC, SKC, SPC; Q_4 – умови на торці (для визначення дотичних та їх довжини в точках A і B); Q_5 – примикання з допустимими перетинами; Q_6 – вузли для узгодження потоків за напрямком; Q_7 – розв'язки для забезпечення їх досяжності; Q_8 – примикання до меж та маршрутів; Q_9 – топологічна структура шуканої мережі (зв'язність, цикли).

Відповідно до національних будівельних норм, вибір траси трубопроводу, магістралі тощо повинен здійснюватися за допомогою математичних методів на основі одного або кількох оптимальних критеріїв (наприклад, криві повинні проектуватися з такими великими радіусами, як можливо). При цьому критерії, як правило, виражаються геометричними параметрами маршрутів і топологічними параметрами мереж, причому деякі з них можуть бути неадитивними. Серед основних геометричних параметрів траси p необхідно вказати довжину $l(p)$, кількість $m(p)$ вставок кіл та їх радіуси кривизни $\{p_i\}_{i=1,\, m(p)}$ (або, для стрічкової лінії, кількість вигинів $n(p)$ і кути повороту $\{\phi_i\}_{i=1,\, m(p)}$), розташування маршруту p в області F. Вони впливають на вартість будівництва $c(p)$, витрати на технічне обслуговування $e(p)$, технологічність $t(p)$ і надійність $b(p)$, що є одним із найважливіший і продукт можливих аналогів надійності

$$\begin{cases} b_m(p) = \prod\limits_{i=1}^{m}\left(1 - \dfrac{1}{p_i}\right),\ (p_i \ge 1) \text{ for } m > 0; \\ b_d(p) = \prod\limits_{j=1}^{d}(1 - g_i)^{k_j}; \\ b_l(p) = \dfrac{1}{l(p)},\ (l(p) \ge 1). \end{cases} \tag{3}$$

Підсумовуючи, загальну задачу оптимізації з'єднань GPOC (General problem to optimize connections) з урахуванням введених критеріїв і обмежень можна поставити наступним чином.

Загальна проблема оптимізації з'єднань. Дана область F має як набір точок $\{A_i\}_{i=1,\, N}$, так і кілька мереж $\{s_j\}_{j=1,\, M}$. Необхідно з'єднати ці точки та мережі сполучною мережею s^*, яка складається з ліній заданого функціонального класу $S\Theta C$, щоб відповідати заданим обмеженням Q типу Q_1–Q_9, і вона буде найбільш ефективною за значенням заданого принципу оптимуму $R(s)$.

Враховуючи вищезазначену ефективність декомпозиції GPOC, яка базується на зведенні цієї задачі до системи базових задач на континуальних сімействах маршрутів, що дозволяють отримати точний розв’язок, можна мати основну типову задачу оптимізації MOP (Main optimization problem) для пошуку оптимального шляху в класі еквівалентності маршруту $[\tau]$ на заданому функціональному класі ліній $P(A, B)$ із заданими кінцями A і B при відповідному зниженні обмежень Q^*:

Основна проблема оптимізації MOP. Обчислити

$$\arg \underset{p \in P_{[Q}(A,\,B)}{\text{extr}} R(p). \tag{4}$$

Ця стаття також висуває інформаційні та обчислювальні вимоги до моделей для розрахунку зазначених проблем.

Розглянуто задачу глобальної та локальної декомпозиції та регуляризації GPOC на основі її зведення до системи однорідних базових задач типу (4). Це гарантує конструктивну регуляризацію та ефективний обчислювальний підхід для вирішення загальної проблеми для оптимізації з’єднань, використовуючи дискретні та безперервні моделі та методи. Для цього використовується дворівнева FL модель Ю. Стояна та С. Смелякова. На верхньому топологічному рівні структура цієї моделі визначається алгебраїчним розшаруванням ліній на класи еквівалентності маршрутів і мереж, а на геометричному рівні – розглядом необхідного функціонального класу ліній у кожному класі. Обмеження можуть бути накладені на компоненти на обох рівнях. Оскільки многовид F у формі (1) має гомотопічний характер типу диска з $n_F \geq 0$ отворами, структура гомотопічної моделі ліній складається з вільної групи $C_{(n_F)}$, яка дискретизує неперервні сімейства маршрутів.

Мережа $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i=1,\,m}$ в області F являє собою набір випрямляних кривих, кількість яких обмежена. Вони не перетинаються між собою і не мають спільних точок, крім кінців. Огляд зв'язних комбінацій типів мереж, графів тощо приводить до задач трьох класів: пошуку оптимальних мереж на топологічному рівні без урахування геометрії області F; оптимізація внесків абстрактної моделі в області F і структура оптимальної мережі в області F. Щоб вирішити ці проблеми, ми можемо ввести концепцію абстрактної мережі $s^* = (V^*,\, R^*)$ як абстрактного симпліціального комплексу з кінцевим зв’язком $K = (V^*,\, R^*)$. Реалізація абстрактної мережі геометричним комплексом $s = (V,\, R)$ є геометричною мережею. Мережі $s_1 = (V_1,\, R_1)$ і $s_2 = (V_2,\, R_2)$ є гомотопними в F, якщо їх абстрактні аналоги мають ізоморфізм ω: $s_1 \to s_2$, при якому відповідність 0-симплексів означає комбінацію вершин у F, а відповідність 1-симплексів означає їх приналежність до одного класу еквівалентності маршрутів у F; мережі s_1 і s_2 є вільними гомотопними, якщо вони гомотопні з точністю до зсуву 0-симплексів у F і деформаційно еквівалентними, якщо вони ізоморфні та гомотопні, а їх різні ребра можуть мати спільні точки лише в основних вершинах, які вони з’єднують. Слід зазначити, що мережевий ізоморфізм зберігає алгебраїчні інваріанти для базових вершин, але не враховує структуру області F з обмеженнями в ній. Гомотопія зберігає гомотопію мереж, але не сприяє їх ізоморфізму через появу додаткових вершин. Деформація мережі зберігає гомотопічні інваріанти.

Геометрична модель маршрутів – це функціональні класи ліній $\Lambda = \{S,\, SC,\, SKC,\, SPC,\, W, \tilde{W}\}$ в області F, які мають сплайн-образ (2). До них також можна застосовувати топологічні обмеження. Введення моделей мереж і ліній дозволяє звести GPOC до системи базових задач типу (2) на різні функціональні класи ліній і типових задач на ті ж класи, що відображають поєднання обмежень, характерних для прикладні задачі і зводяться до базових задач.

Висновки. Розроблено ієрархічну математичну модель загальної задачі зв'язку. Суть її полягає в пошуку оптимальних зв'язків (маршрутів і з'єднувальних мереж) в неоднозв'язних регіонах. Проблема виникає при проектуванні транспортних та інженерних мереж і регулюванні руху автотранспорту на пересіченій місцевості. У рамках моделі ця задача зводиться до системи базових і типових задач для пошуку оптимальних маршрутів. Використання цієї ієрархічної структури моделей у системах прийняття рішень дозволяє вирішити задачу адекватного моделювання зв’язків у неоднозв’язних областях з точки зору точності, обчислювальної ефективності та відсутності інформаційної надлишковості для всіх функціональних класів вигнуті та рівні лінії $\{S,\, SC,\, SKC,\, SPC\}$, які регулюються національними будівельними нормами, з обмеженнями на кривизну та інші геометричні та топологічні параметри трас.

Список використаної літератури

1. Upadhyay S., Ratnoo A. On existence and synthesis of smooth four parameter logistic paths inside annular passages. *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2018. Vol. 3, Iss. 4, P. 4375–4382.
2. Cowlagi R., Tsiotras P. Curvature-bounded traversability analysis in motion planning for mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics*. 2014. P. 1011–1019.
3. Bakolas E., Tsiotras P. Kinodynamic trajectory generation through rectangular channels using path and motion primitives. *47th IEEE Conference on Decision and Control*. 2008. P. 3725–3730.
4. Laumond J.-P., Jacobs P., Taix M., Murray R. M. A motion planner for nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 1994. Vol. 10. Iss. 5. P. 577–593.
5. Agarwal P., Biedl T., Lazard S., Robbins S., Suri S., Whitesides S. Curvature-constrained shortest paths in a convex polygon. *Proceedings 14th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*. 1998. P. 392–401.
6. Плехова А. А., Смеляков С. В. Моделирование коммуникационных сетей с учетом ландшафта при разнородных критериях и ограничениях. *Информационные системы*. 1998. № 3(11). С. 143–146.
7. Stoyan, Y. G., Eschenko V. G., Vinarsky V. Y. Mathematical Methods of Geometric Design in Artificial Intelligence System. *IFAC Proceedings Volumes. 1992.* Vol. 25. Iss. 28. P. 101–105.
8. *Smelyakov S. V., Stoyan Y. G. Modelling of the space of paths in problems of constructing optimal trajectories. USSR Computational*

Mathematics and Mathematical Physics. 1993. Vol. 23, Iss. 1. P. 50–55.
9. Smelyakov S. V. Construction of shortest line of restricted curvature in a non-singly-connected polygonal area. *Inclusion methods for nonlinear problems. Computing supplementa*. 2003. Vol. 16. P. 237–244.
10. Sergienko I. V., Shylo V. P. Problems of discrete optimization: Challenges and main approaches to solve them. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2006. Т. 42. P. 465–482.
11. Плехова А. Модель и метод решения задачи поиска оптимального соединения при ограничении кривизны. *Радіоелектроніка та інформатика*. 1998. №. 3. С. 56–59.
12. Плехова А. Построение оптимальной трассы ограниченной кривизны в неодносвязной области. *Радіоелектроніка та інформатика*. 1999. № 3. С. 22–23.

References (transliterated)

1. Upadhyay S., Ratnoo A. On existence and synthesis of smooth four parameter logistic paths inside annular passages. *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2018, vol. 3, iss. 4, pp. 4375–4382.
2. Cowlagi R., Tsiotras P. Curvature-bounded traversability analysis in motion planning for mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics*. 2014, pp. 1011–1019.
3. Bakolas E., Tsiotras P. Kinodynamic trajectory generation through rectangular channels using path and motion primitives. *47th IEEE Conference on Decision and Control*. 2008, pp. 3725–3730.
4. Laumond J.-P., Jacobs P., Taix M., Murray R. M. A motion planner for nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 1994, vol. 10, iss. 5. pp. 577–593.
5. Agarwal P., Biedl T., Lazard S., Robbins S., Suri S., Whitesides S. Curvature-constrained shortest paths in a convex polygon. *Proceedings 14th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*. 1998, pp. 392–401.
6. Plekhova A.A., Smelyakov S.V., Modeliuvannia komunikatsiinykh merezh z urakhuvanniam landshaftu za riznoridnykh umov ta obmezhen [Modelling of communication networks taking into account the landscape under heterogeneous criteria and restrictions], Informatsionnye sistemy [Insformation Systems], vol. 3, no. 11, 1998, pp. 143-146.
2. Stoyan, Y.G., Eschenko V.G., Vinarsky V.Y. Mathematical methods of geometric design in artificial intelligence system. *IFAC Proceedings Volumes. 1992*, vol. 25, iss. 28, pp. 101–105.
3. Smelyakov S. V., Stoyan Y. G. Modelling of the space of paths in problems of constructing optimal trajectories. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1983, vol. 23, iss. 1, pp. 50–55.
4. Smelyakov S. V. Construction of shortest line of restricted curvature in a non-singly-connected polygonal area. *Inclusion methods for nonlinear problems. Computing supplementa*. 2003, vol. 16, pp. 237–244.
5. Sergienko I. V., Shylo V. P. Problems of discrete optimization: Challenges and main approaches to solve them. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2006, vol. 42, pp. 465–482.
6. Plekhova A. Model i metod rozviazannia zadachi poshuku optymalnoho poiednannia pry obmezhenni kryvyzny [Model and methods for solving problems of searching for certain connections with a curvature constraint]. Radioelektronika i informatika [Radioelectronics and Informatics]. 1998, vol. 3, 1998, pp. 56–59.
7. Plekhova A. Pobudova optymalnoi trasy obmezhenoi kryvyzny u neodnozviaznii oblasti [Construction of an optimal path of bounded curvature in a non-simply connected domain]. *Radioelektronika i informatika* [Radioelectronics and Informatics]. 1999, vol. 3, pp. 22–23.

Надійшла (received) 15.05.2023

UDC 624

A. I. LEVTEROV, Candidate of Technical Sciences, Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Head of the Department of Informatics and Applied Mathematics, Kharkiv, Ukraine, e-mail: lai@khadi.kharkov.ua, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6586-1061
H. A. PLIEKHOVA, Candidate of Technical Sciences, Docent, Kharkiv National Automobile and Highway University, Associate Professor at the Department of Informatics and Applied Mathematics, Kharkiv, Ukraine, e mail: plehovaanna11@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6912-6520
M. V. KOSTIKOVA, Candidate of Technical Sciences, Docent, Kharkiv National Automobile and Highway University, Associate Professor at the Department of Informatics and Applied Mathematics, Kharkiv, Ukraine, e mail: kmv_topaz@ukr.net, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5197-7389
A. O. OKUN, Candidate of Technical Sciences, Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of Computer Modeling and Integrated Forming Technologies, Kharkiv, Ukraine, e mail: okunanton@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-6467-4229

GEOMETRIC MODELING: TRACKS AND FLOWS

Mathematical models to solve optimization connection problems in nonsimply connected regions under typical technological restrictions on geometric and topological parameters of routes, first of all, on curvature and the number of bends, have been investigated and developed. The models are linked with the extant and prospective topogeodesic models of the territory polygonal images. The solution of connection problems involves search for optimum trajectories of routes and nets within unrestricted geometric shape areas. It needs the development of a plethora of general models as fields where connections are carried out. The connections can be of various types such as bendy, Manhattan, even, solid as well as routes of other types. Smeliakov and Pliekhova observe that the global and local regulation of geometric connections to solve connection problems can be presented as the general optimization connection problem that is defined as the problem of the choice of c, where Ω is a set of alternatives, R is a principle of optimality. In so doing, the set Ω can be presented as the totality of the phase space ϕ and the restrictions Q that are applied to the parameters of the phase space ϕ. In turn, it is expedient to imagine that the phase space ϕ is the Cartesian product $\phi = X*Y*Z*U$ of the output data X, disturbances Y, control parameters U and results Z. The analysis of problem indicates that first and foremost the effectiveness of the modelling of the phase space ϕ is linked with the description of the output data X on the area F and space L of possible highways in F. This research is devoted to the solution of the problem to develop a model for connection tasks within the framework of geometric design.

Keywords: mathematical model, optimization problem, restriction, topological parameter, construction norm and rule, homotopy, accuracy.

Повні імена авторів / Author's full names

Автор 1 / Author 1: Левтеров Андрій Іванович, Levterov Andrii Ivanovych
Автор 2 / Author 2: Плєхова Ганна Анатоліївна, Pliekhova Hanna Anatoliivna
Автор 3 / Author 3: Костікова Марина Володимирівна, Kostikova Maryna Volodymyrivna
Автор 4 / Author 4: Окунь Антон Олександрович, Okun Anton Oleksandrovych