

МАТЕМАТИЧНЕ І КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING

DOI: 10.20998/2079-0023.2023.02.08

УДК 51-73

О. С. МАЗМАНІШВІЛІ, доктор фізико-математичних наук, професор, старший науковий співробітник ННЦ ХФТІ, м. Харків, Україна, e mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0373-0626>

Г. Ю. СИДОРЕНКО, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій НТУ «ХПІ», доцент кафедри моделювання систем і технологій ХНУ ім. В. Н. Каразіна, м. Харків, Україна, e mail: annsydorenko01@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0761-2793>

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ У НЕОДНОРІДНОМУ НЕПОГЛИНАЮЧОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Розглянуто аналітичні рішення параболічного рівняння Ісімару для функції когерентності електромагнітного поля, що описують часові властивості імпульсу на виході неоднорідного недисипативного середовища. Отримано узагальнення підходу, використаного в моделі Ісімару для опису часової еволюції монохроматичного електромагнітного імпульсу, що огинає, в однорідних недисипативних середовищах, на випадок неоднорідних недисипативних середовищ. Тим самим було зроблено спробу врахувати вплив неоднорідності середовища на форму результуючого імпульсу. При вирішенні поставленої задачі подолано труднощі, пов'язані з обчисленням континуального інтеграла, що виникає, в просторі дифузійних траєкторій. Це дозволило отримати явний вираз для функції Гріна завдання та побудувати обчислювальний алгоритм, на базі якого проведено низку численних експериментів. Аналіз роботи проведено виходячи з апарату квадратичних інтегральних функціоналів, заснованих на рішеннях диференціальних стохастичних рівнянь. У роботі вивчені інваріантні часові властивості огинаючої монохроматичних електромагнітних імпульсів, що реєструються після проходження крізь плоский шар розсіюючого неоднорідного середовища, тобто. властивостей, які залишаються незмінними при варіації параметрів середовища, зокрема, розподілу концентрації центрів, що розсіюють. Проаналізовано динаміку формування часових шлейфів розсіяної хвилі, у яких хвостова частина розташована в периферійній часовій ділянці. При поширенні зі швидкістю перетворення фронту хвилі відбиває вид шарів області розсіювання та її подовжню форму. Зазначається, розвитком запропонованого апроксимаційного підходу щодо процесів, що впливають на часове затягування електромагнітних імпульсів, може бути облік згасання випромінювання при його поширенні в неоднорідному поглинаючому середовищі.

Ключові слова: монохроматичні електромагнітні імпульси, неоднорідне середовище, що розсіює, рівняння Ісімару, форма результуючого імпульсу, інваріантна лагерівська форма, чисельні експерименти.

Вступ. В статті поставлено і розглянуто завдання про форму імпульсу, що поширюється в неоднорідному і непоглинаючому середовищі типу, що розсіює. У роботі як вихідний використаний електромагнітний імпульс у вигляді δ -функції щодо напрямку поширення. Таким чином, йдеться, по суті, про функцію Гріна розглянутого завдання. Імпульси проходять крізь шар товщини L , що містить розсіювальні центри з довільним профілем концентрації $\rho(z)$ вздовж осі поширення z , при цьому саме розсіювання вважається малокутовим [1, 2].

При розгляді будуть прийняті такі припущення:

- вихідна (стартова хвиля) є плоскою;
- показники середовища, будучи змінними в просторі, є постійними в часі; ці характеристики будуть покладатися відомими та заданими;
- просторові характеристики середовища асиметрично симетричні щодо напрямку поширення випромінювання;

- розглянуте випромінювання являє собою монохроматичну хвилю з імпульсною огинаючою.

Третє припущення означає, що характеристики середовища змінюються шарами, паралельними до фронту вихідної плоскої хвилі. Хоча можна розглянути загальніший випадок, нижче ми обмежимося цим припущенням, маючи на увазі отримання результатів принципового плану.

У роботі розглянуті часові властивості огинаючої монохроматичних електромагнітних імпульсів, що реєструються після проходження крізь плоский шар неоднорідного середовища, що розсіює. Особливу увагу звернено на властивості, що характерні всім аналізованим середовищам. Завдяки інформації про інваріантні властивості стає можливим додаткова перевірка відповідності досвідчених даних та їх інтерпретація, не пов'язана з конкретними параметрами середовища розповсюдження. Такі властивості передавальної функції, як позитивна визначеність, звернення в нуль на початку імпульсу та на його периферії, єдиність

© Мазманішвілі О. С., Сидоренко Г. Ю., 2023



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом НТУ «ХПІ» у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХПІ» Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



максимуму та наявність лише двох точок перегину, є якісними ознаками і легко ідентифікуються.

Задачу про функцію Гріна середовища, що містить центри, що розсіюють, можна віднести до класичних. Різні фізичні та обчислювальні аспекти цієї проблеми вже давно обговорюються у наукових фахових виданнях [1–7]. Рівняння, які описують поширення імпульсів, дуже складні, тому отримання повних аналітичних рішень поставленої завдання є питанням майбутнього. Як правило, в публікаціях наводяться точні вирази для перших статистичних моментів огинаючої імпульсу або деякі вирази, справедливі в рамках обраних наближень. Наявні ж точні аналітичні вирази представлені переважно у вигляді континуальних інтегралів та/або розкладів у нескінченні ряди. У тих роботах, де наведено аналітичне рішення завдання у явному вигляді, воно, як правило, відноситься до спрощених моделей. Для вирішення вихідних рівнянь часто використовують різноманітні чисельні методи.

Мета роботи полягає у вивченні інваріантних властивостей огинаючої монохроматичних часових електромагнітних імпульсів, що реєструються після проходження крізь плоский шар розсіюючого неоднорідного середовища, тобто. властивостей, що залишаються незмінними при варіації параметрів середовища, зокрема, розподілу концентрації центрів, що розсіюють. Особливу увагу приділено поздовжнім розмірам результуючого імпульсу, що визначає його роздільні властивості.

Вихідні припущення. Поставимо завдання про форму імпульсу, який поширюється в неоднорідному і непоглинаючому середовищі типу, що розсіює.

Обговоримо зазначені вище припущення та обмеження, що впливають з них, на область застосування результуючих виразів. У лінійному наближенні вихідний $I_{in}(t)$ та імпульс на виході із середовища $I(t)$, пов'язані відомим виразом [1–3]

$$I(t) = \int G(t-t')I_{in}(t')dt' \quad (1)$$

і за формою $I_{in}(t)$ можна визначити $I(t)$, якщо визначена функція Гріна $G(t-t')$.

Перейдемо до формулювання вихідних рівнянь. Шукана функція Гріна є Фур'є-перетворенням функції когерентності Γ :

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma(\omega_d) \exp(-i\omega_d t) d\omega_d. \quad (2)$$

У свою чергу, для функції Γ в фізичній ситуації, що розглядається, поширення плоскої електромагнітної хвилі в дифузійно-розсіюючому непоглинаючому середовищі маємо [1, 2]

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ia \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + b(z)\mathbf{r}^2 \right) \Gamma(z, \mathbf{r}; \omega_d) = 0. \quad (3)$$

Тут $a = k_d/2k^2$; k – хвильове число монохроматичної хвилі, що поширюється; $k_d = \omega_d/c$; c – швидкість світла;

$$b(z) = (4\alpha_p)^{-1} \rho(z)\sigma_s(z)k^2, \quad (4)$$

де $\rho(z)$ – концентрація розсіювальних центрів; $\sigma_s(z)$ – переріз розсіювання; α_p – кутовий параметр розсіювання, а як аргументи функції когерентності Γ вказані поздовжня координата поширення z та поперечний вектор \mathbf{r} .

Рівняння (3) є диференціальним рівнянням у часткових похідних параболічного типу з потенціалом квадратичного виду

$$U(z, \mathbf{r}) = b(z)\mathbf{r}^2, \quad (5)$$

крутість якого залежить від координати z і початковою умовою $\Gamma(z=0, \mathbf{r})=1$, що забезпечує властивість функції Гріна $G(t-t')|_{z=0} = \delta(t-t')$.

Рівняння (3) відноситься до класу рівнянь Хілла і в загальному випадку його аналітичних рішень потенціалу $U(z, \mathbf{r})$ довільного виду отримати не вдається. Істотним виявляється тому те що, що з потенціалу квадратичного виду (5) апроксимаційне рішення функції Гріна $G(t)$ побудувати можливо.

Рівняння для двочастотної функції когерентності. Розглянемо шар, що розсіює, товщина якого (вздовж осі z) дорівнює L . Розіб'ємо довжину L на N ділянок $\{\Delta_n\}$: $L = \sum_{n=1}^N \Delta_n$. Нехай величини $\rho(z)$ та $\sigma_s(z)$ задані і є безперервними функціями z . Виберемо ділянки $\Delta_n = z_n - z_{n-1}$, $n = 1, \dots, N$ таким чином, щоб передати всі істотні деталі потенціалу $U(z, \mathbf{r})$, і позначимо $b_n = b(z_n)$, $\rho_n = \rho(z_n)$ і $\sigma_n = \sigma_s(z_n)$. Маючи на увазі випадок $N \gg 1$, замінимо в потенціалі $U(z, \mathbf{r})$ всі значення, що лежать усередині кожної n -ої ділянки, $1 \leq n \leq N$, на величину $U(z_n, \mathbf{r})$, де $z_n = \sum_{m=1}^n \Delta_m$ – права межа ділянки. Отриманий таким чином потенціал $U(z, \mathbf{r})$, що є кусково-постійною функцією від z , будемо використовувати нижче в апроксимаційному рівнянні (8).

Наблизимо рішення рівняння $\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d)$, що є рішенням апроксимаційного рівняння зі кусково-постійним за z виразом $U_N(z, \mathbf{r})$ для потенціалу $U(z, \mathbf{r})$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ia \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U_N(z, \mathbf{r}) \right) \Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d) = 0, \quad (6)$$

з умовою $\Gamma_N(0, \mathbf{r}; \omega_d) = 1$. Якщо буде знайдено рішення рівняння (7) для Γ_N то потрібна функція когерентності буде впливати з нього в межі при $N \rightarrow \infty$. Рівнянню (6) еквівалентна послідовність рівнянь ($n = 1, \dots, N$)

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ia \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U_n(z_n, \mathbf{r}) \right) \Gamma_n(z, \mathbf{r}; \omega_d) = 0, \quad (7)$$

розв'язок яких визначаються початковою умовою $\Gamma_N(z=0, \mathbf{r}; \omega_d) = 1$ і ланцюжком граничних умов

$y_{n+1}(z_n) = y_n(z_n)$, $n = 1, \dots, N$, де $y_n(z)$ – функція $\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d)$ на n -й ділянці.

Перейдемо до розв'язання розгорнутої системи рівнянь (7). Розглянемо для цього n -ту ділянку в (7). У цій ділянці потенціал U_n залежить від координати z_n як от параметра, $U_N(z, \mathbf{r}) = b(z)\mathbf{r}^2 \equiv b_n\mathbf{r}^2$, де $b_n = (4\alpha_p)^{-1} \rho(z_n)\sigma_s(z_n)k^2$.

Кожне з рівнянь (10) є параболічним рівнянням за z у часткових похідних з кусково-постійним потенціалом. Шукатимемо рішення n -го рівняння на інтервалі (z_{n-1}, z_n) у вигляді:

$$\Gamma_n(z, \mathbf{r}; \omega_d) = \frac{1}{f(z)} \exp[g(z)\mathbf{r}^2]. \quad (8)$$

Така форма шуканого розв'язку обумовлена параболічною властивістю потенціалу по \mathbf{r} . З (7) і (8) випливають наступні рівняння для введених функцій $f(z)$ та $g(z)$:

$$-\frac{1}{f(z)} \frac{df(z)}{dz} + 4iag(z) = 0, \quad (9 \text{ a})$$

$$\frac{dg(z)}{dz} + 4iag^2(z) + b_n = 0. \quad (9 \text{ b})$$

Розглянемо друге рівняння із системи (9), що є рівнянням Ріккати. Нехай $g_n = g(z_n)$, тоді для всіх n розв'язання цього рівняння з початковою умовою $g(z_{n-1}) = g_{n-1}$ має вигляд

$$g(z) = \frac{g_{n-1} - (4ia/b_n)^{-1/2} \operatorname{tg}(\sqrt{4iab_n}(z - z_{n-1}))}{1 + (4ia/b_n)^{1/2} g_{n-1} \operatorname{tg}(\sqrt{4iab_n}(z - z_{n-1}))},$$

а на його правому кінці

$$g_n = \frac{g_{n-1} - (4ia/b_n)^{-1/2} \operatorname{tg}(\sqrt{4iab_n}\Delta_n)}{1 + (4ia/b_n)^{1/2} g_{n-1} \operatorname{tg}(\sqrt{4iab_n}\Delta_n)}. \quad (10)$$

Функція $f(z)$ знаходиться з (9) з початковою умовою $f(z_{n-1}) = f_{n-1}$, де f_{n-1} – значення функції на правому кінці попередньої $(n-1)$ -ої ділянки

$$\frac{f(z)}{f_{n-1}} = \cos(\sqrt{4iab_n}(z - z_{n-1})) + \sqrt{4ia/b_n} g_{n-1} \sin(\sqrt{4iab_n}(z - z_{n-1})),$$

а на його правому кінці

$$f_n = \left[\cos(\sqrt{4iab_n}\Delta_n) + \sqrt{\frac{4ia_n}{b_n}} g_{n-1} \sin(\sqrt{4iab_n}\Delta_n) \right] f_{n-1}. \quad (11)$$

Отже, функція когерентності $\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d)$ при $z = z_N = L$ дорівнює

$$\Gamma_N(z_N, \mathbf{r}; \omega_d) = \frac{1}{f_N} \exp(g_N \mathbf{r}^2), \quad (12)$$

при цьому послідовності $\{f_n\}$ і $\{g_n\}$, $1 < n \leq N$, визначаються з рекурентних співвідношень (10) і (11), а також початкових умов $f_0(0) = 1$ і $g_0(0) = 0$. Зокрема, у точці прийому, коли $\mathbf{r} = 0$ та $z = L$, маємо

$$\Gamma_N(L, \mathbf{r}; \omega_d) = \frac{1}{f_N(z_N)}. \quad (13)$$

Функція Гріна. Нехай T_1 – час поширення початкової точки імпульсу. Тоді функція імпульсного відгуку (функція Гріна) наступна

$$G_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega_d(t - T_1))}{f_N(\omega, \omega_d)} d\omega_d, \quad (14)$$

при цьому у функції $f_N = f_N(\omega, \omega_d)$ зазначена залежність як від частоти різниці ω_d (змінної інтегрування), так і від частоти ω монохроматичного імпульсу.

З рекурентного співвідношення (11) випливає

$$f_N = \prod_{n=1}^{N-1} \left[\cos(\sqrt{4iab_n}\Delta_n) + \sqrt{\frac{4ia_n}{b_n}} g_{n-1} \sin(\sqrt{4iab_n}\Delta_n) \right]. \quad (15)$$

Припустимо далі, що функція $b(z)$ – гладка (різкі межі та розриви концентрації відсутні). Тоді з (11) випливає

$$\operatorname{tg}(\varphi_n) = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_{n-1}) - \operatorname{tg}(\sqrt{4iab_n}\Delta_n)}{1 + \operatorname{tg}(\varphi_{n-1}) \operatorname{tg}(\sqrt{4iab_n}\Delta_n)},$$

де $\operatorname{tg}(\varphi_n) = \sqrt{4ia/b_n} g_n$. Звідки отримуємо $\varphi_{n+1} = \varphi_n - \sqrt{4ia/b_n}\Delta_n$, що призводить до рівності $\varphi_N = -\sum_{n=1}^N \sqrt{4iab_n}\Delta_n$, тому

$$g_N = -\frac{1}{\sqrt{4ia/b_N}} \operatorname{tg}\left(\sum_{j=1}^N \sqrt{4iab_j}\Delta_j\right). \quad (16)$$

Підставляючи цей вираз у співвідношення (15), послідовно знайдемо

$$f_N = \cos\left(\sum_{n=1}^N \sqrt{4iab_n}\Delta_n\right). \quad (17)$$

Оскільки $ab_n = (\rho_n \sigma_n \omega_d)(8\alpha_p c)^{-1}$, де $\rho_n = \rho(z_n)$ та $\sigma_n = \sigma_s(z_n)$, тоді для функції Гріна отримаємо

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega_d(t - T_1))}{\cos\left(\sqrt{i\omega_d} \sum_{n=1}^N \Delta_n \sqrt{(\rho_n \sigma_n)/(2\alpha_p c)}\right)} d\omega_d. \quad (18)$$

У виразі $\tau^{1/2} = \sum_{n=1}^N \Delta_n \sqrt{(\rho_n \sigma_n)/(2\alpha_p c)}$ сума в правій частині в межі $N \rightarrow \infty$ перетворюється на інтеграл $\tau^{1/2} = (2\alpha_p c)^{-1/2} \int_0^L \sqrt{\rho(z)\sigma_s(z)} dz$, що дає такий вираз:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega_d(t-T_1))}{\cos \sqrt{i\omega_d \tau}} d\omega_d.$$

Використовуючи заміну $\omega_d = is$, отримаємо остаточно шуканий вираз для функції Гріна, що формально збігається з відомим рішенням рівняння Ісімару [1, 2] для однорідних розсіювальних середовищ

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp[s(t-T_1)]}{\operatorname{ch} \sqrt{s\tau}} ds. \quad (19)$$

Цей вираз залежить від двох параметрів T_1 та τ . Перший відповідає за час приходу імпульсу як цілого і дорівнює відношенню довжини шляху L до швидкості світла c . Другий визначає розширення імпульсу. Наведемо ще одне представлення для функції Гріна

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i \tau} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp[\eta(t-T_1)/\tau]}{\operatorname{ch} \sqrt{\eta}} d\eta, \quad (20 \text{ a})$$

$$T_1 = L/c, \quad \tau = \frac{1}{2\alpha_p c} \left(\int_0^L \sqrt{\rho(z)\sigma(z)} dz \right)^2. \quad (20 \text{ b})$$

Отримані вирази (20) відрізняються від відомого результату Ісімару [1] тим, що вони справедливі для неоднорідних середовищ.

Фізична інтерпретація. Імпульсу із заданою часовою залежністю $I_{in}(t)$ відповідатиме імпульс на виході з середовища, що описується виразом

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} I_{in}(t') dt' \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp[s(t-t'-T_1)]}{\operatorname{ch} \sqrt{s\tau}} ds. \quad (21)$$

Нехай площину $z=0$ стартовий імпульс досяг у момент часу $t=0$. Поширюючись в середовищі, що розсіює, він досягне площини $z=L$ і в цьому місці буде мати форму $I(t)$ [8]. Проаналізуємо параметри цього імпульсу. З цією метою визначимо значення його перших трьох моментів $\langle t^n \rangle = \int_0^{\infty} t^n I(t) dt$, $n=0,1,2$, при цьому приймемо, не обмежуючи спільності, що стартовий імпульс має запасну енергію, за величиною чисельно рівну одиниці. Цікаві моменти будемо відраховувати від T_1 :

$$\langle (t-t'-T_1)^n \rangle = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{s\tau}} \Big|_{s=0}. \quad (22)$$

З урахуванням припущення про одиничну енергію стартового імпульсу при $n=0$ для нульовому моменту знайдемо $\langle 1 \rangle_L = 1$, що відповідає прийнятій моделі поширення випромінювання без поглинання. Далі з (22) отримаємо

$$\langle (t-T_1) \rangle_L = \frac{1}{2} \tau + \langle t' \rangle_0, \quad (23)$$

звідки випливає, що середній за імпульсом момент приходу дорівнює $T_1 + \tau/2$ з урахуванням першого

моменту $\langle t' \rangle_0$ стартового імпульсу. При $n=2$ знайдемо для середньої тривалості імпульсу $\sqrt{D_L}$

$$D_L = \langle (t-T_1)^2 \rangle_L = \frac{1}{6} \tau^2 + D_0, \quad (24)$$

де $\sqrt{D_0}$ – середня тривалість вихідного імпульсу. Таким чином, до дисперсії D_0 додається величина $\tau^2/6$. Якщо вихідний імпульс як функція часу є δ -функцією, $I_{in}(t') = \delta(t')$, то в результаті поширення в розсіюючому середовищі його середня тривалість складе

$$\sqrt{D_L} = \tau/\sqrt{6} = \frac{1}{\sqrt{24\alpha_p c}} \left(\int_0^L \sqrt{\rho(z)\sigma_s(z)} dz \right)^2, \quad (25)$$

таким чином, тривалість імпульсу відображає поздовжні варіації концентрації середовища, що розсіює. У окремому випадку однорідної вздовж осі z середовища, коли $\rho(z)$ та $\sigma(z)$ постійні, отримаємо $\sqrt{D_L} = (\rho\sigma_s L^2)(\sqrt{24\alpha_p c})^{-1}$, тобто середня тривалість імпульсу зростає пропорційно квадрату прогонової відстані L [9].

Чисельне моделювання. Через значне різноманіття варіантів параметрів середовища, що розсіює, чисельне моделювання проведемо, використовуючи відносні значення [10–12].

Як робочу формулу використовуємо наступну

$$I(t, L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_{in}(t') dt' \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp[iu(t-t'-L/v)]}{\operatorname{ch} \sqrt{iut}} du, \quad (26)$$

де L – довжина пройденого шляху фронту зондувального імпульсу на момент t , v – швидкість імпульсу, а сам імпульс виберемо гауссівської форми з дисперсією τ^2 :

$$I_{in}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\tau^2}\right). \quad (27)$$

Як ефективне середньоквадратичне відхилення τ оберемо

$$\tau = \left(\int_0^L N(z) dz \right)^2, \quad (28)$$

де $N(z)$ – ефективна густина центрів розсіювання середовища.

Для чисельного моделювання виберемо як форму зондувального імпульсу гауссівську функцію (27), яка має середньоквадратичне відхилення на старті $\tau = 0.05$ і поширюється зі швидкістю $v = 0.1$.

На рис. 1–5 показані приклади утворення 5 шлейфів розсіяної хвилі на вибраних відстанях у разі відсутності розсіювальних центрів та у разі їх наявності на інтервалі.

У першому випадку (рис. 1) розсіювальне середовище відсутнє і стартовий імпульс $I_{in}(t')$ поширюється зі швидкістю v без змін як ціле.

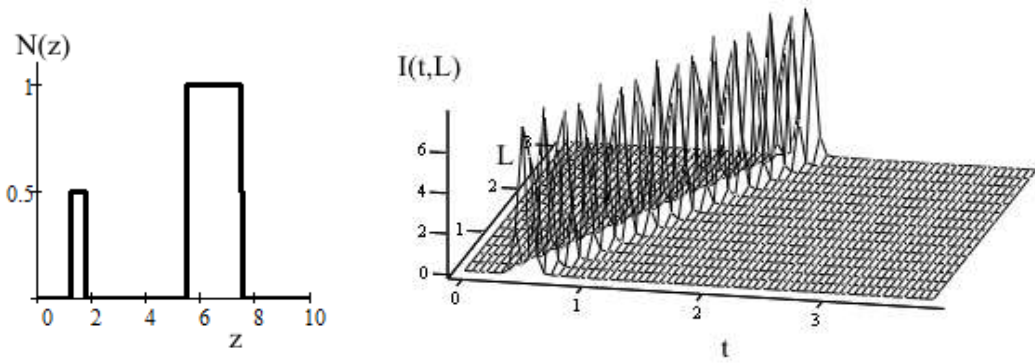


Рис. 1. Профіль зони розсіювання та сімейство часових імпульсів $I(t, L)$; $N(z) = 0$

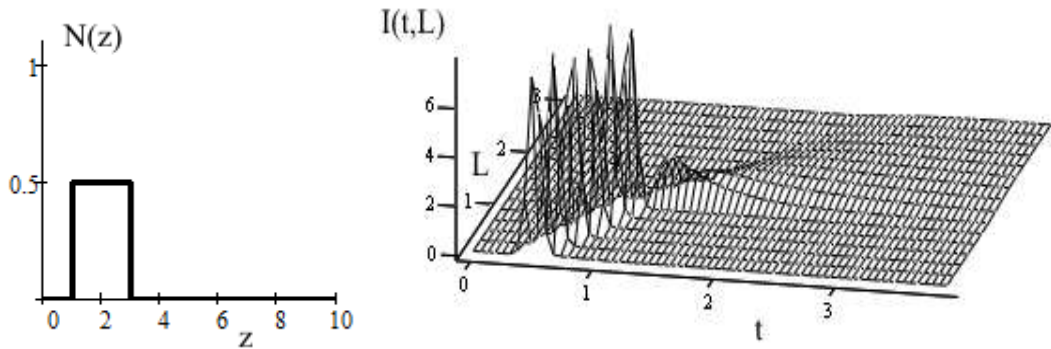


Рис. 2. Профіль зони розсіювання та сімейство часових імпульсів $I(t, L)$; $N(z) = 0.1$ на інтервалі $1 \leq z \leq 3$

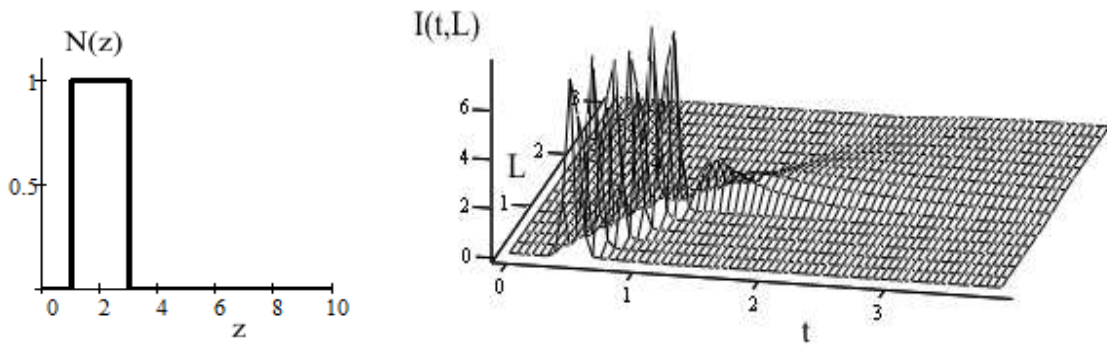


Рис. 3. Профіль зони розсіювання та сімейство часових імпульсів $I(t, L)$; $N(z) = 0.2$ на інтервалі $1 \leq z \leq 3$

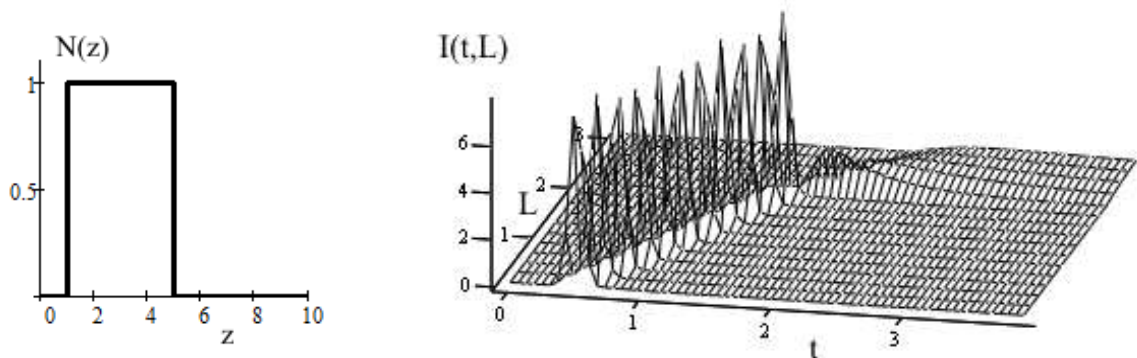
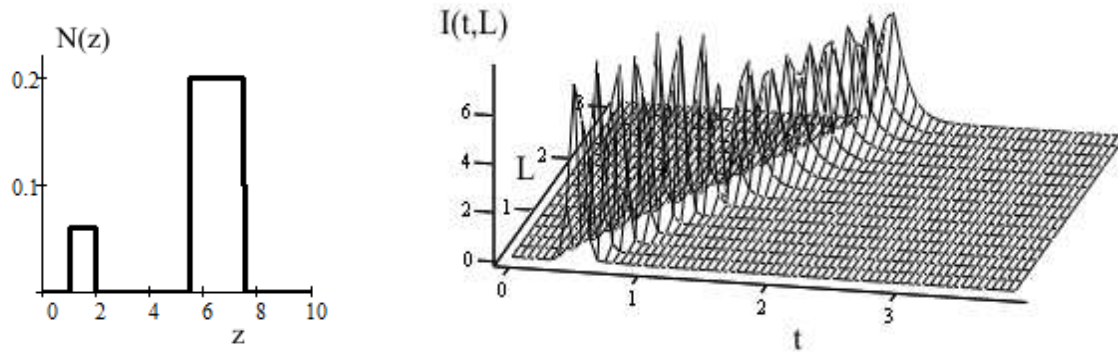


Рис. 4. Профіль зони розсіювання та сімейство часових імпульсів $I(t, L)$; $N(z) = 0.2$ на інтервалі $2 \leq z \leq 6$

Рис. 5. Профіль зони розсіювання та сімейство часових імпульсів $I(t, L)$;

$$N(z) = 0.5 \text{ на інтервалі } 1 \leq z \leq 2 \text{ та } N(z) = 1.0 \text{ на інтервалі } 5.5 \leq z \leq 7.5$$

У другому випадку розглянуті різні шари, що розсіюють. На рис. 2–5 видно динаміку формування часових шлейфів розсіяної хвилі, у яких хвостова частина розташована в периферійній часовій ділянці t .

При поширенні зі швидкістю v перетворення фронту хвилі відбиває вид шарів області розсіювання та її поздовжню форму. Шлейф, що утворюється за фронтом хвилі, тим довший, чим більша ефективна дисперсія τ^2 , яка в свою чергу визначається ефективною щільністю центрів розсіювання середовища $N(z)$.

При цьому дисперсія τ^2 в результаті інтегрування утворюється з усіх можливих ділянок зони розсіювання згідно (27).

З сімейства кривих $I(t, L)$, наведених на рис. 1–5, видно, що вони мають лагерривську властивість [9], а саме: функція $I(t, L)$ тотожно дорівнює нулю при $t = 0$ (флуктуаційна область), функція $I(t, L)$ має один максимум і дві точки перегину (основна область), функція $I(t, L)$ має експонентну асимптотику при великих t (периферійна область). Зазначимо, що з формул (27), (28) випливає можливість розгляду різних видів залежності концентрації та перерізу розсіювання від поточної координати z .

Висновок. Зазначимо, що розвитком запропонованого апроксимаційного підходу щодо процесів, що впливають на часове затягування електромагнітних імпульсів, може бути облік згасання випромінювання при його поширенні в неоднорідному поглинаючому середовищі. Математичною основою при цьому послужить облік у параболічному рівнянні (3) доданку, пов'язаного з поглинанням, при цьому коефіцієнти рівняння можуть залежати від поздовжньої координати. Зазначимо також, що аналіз еволюції форми часового імпульсу при його поширенні дає можливість судити про просторовий розподіл характеристик розсіювального середовища вздовж осі розповсюдження.

Список використаної літератури

1. Ishimaru A. Theory and Application of Wave Propagation and Scattering in Random Media. *Proc. IEEE*. 1977. Vol 65. P. 1030–1061.

2. Исимару А. *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*. Москва: Мир, 1981. Т.1, 280 с. Т. 2. 317 с.
3. Flatte S. M. Wave Propagation Through Random Media: Contributions from Ocean Acoustics. *Proc. IEEE*. 1983. Vol. 71. P. 1267–1294.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. *Введение в статистическую радиофизику*. Москва: Наука, 1966. 404 с.
5. Хелстром К. *Квантовая теория проверки гипотез и оценивания*. Москва: Мир, 1979. 344 с.
6. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения*. Москва: Мир, 1984. 640 с.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва: Наука, 2004. 356 с.
8. Галуза А. А., Мазманишвили А. С. Форма импульса, распространяющегося с неоднородной непоглощающей среде. *Радиофизика и Радиоастрономия*. 1997. № 2. С. 353–358.
9. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва: Наука, 2004. 356 с.
10. Вірченко Н. О. *Основні методи розв'язання задач математичної фізики*. Київ: Воля, 2006. 332 с.
11. Пирс Дж. Р. *Теория и расчет электронных потоков*. Москва: Сов. радио, 1956. 254 с.
12. Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В. *Чисельні методи в комп'ютерних науках*. Львів: Новий світ-2000, 2018. 536 с.

References (transliterated)

1. Ishimaru A. Theory and Application of Wave Propagation and Scattering in Random Media. *Proc. IEEE*. 1977, vol. 65, pp. 1030–1061.
2. Ishimaru A. *Rasprostranenie i rassejanie voln v sluchajno-neodnorodnykh sredah*. [Propagation and scattering of waves in randomly inhomogeneous media]. Moscow, Myr Publ., 1981, vol. 1, 280 p.; vol. 2. 317 p.
3. Flatte S. M. Wave Propagation Through Random Media: Contributions from Ocean Acoustics. *Proc. IEEE*. 1983, vol. 71, pp. 1267–1294.
4. Rytov S. M., Kravzov Yu. A., Tatarskiy V. I. *Vvedenie v stohasticheskuyu fiziku* [Introduction to statistical radiophysics]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 404 p.
5. Helstrom K. *Quantovaya teoriya proverki gypotez i ocenivaniya* [Quantum theory of hypothesis testing and estimation]. Moscow, Myr Publ., 1979. 344 p.
6. Feller V. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i eje prilogeniya* [Introduction to Probability Theory and Its Applications]. Moscow, Myr Publ., 1979. 640 p.
7. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsiy i funkcional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 2004. 356 p.
8. Galuza A. A., Mazmanishvili A. S. Forma impul'sa, rasprostranyayutshegosja s neodnorodnoy nepoglotschayuschey srede [Shape of a pulse propagating in a non-uniform non-absorbing medium]. *Radiofizika i Radioastronomiya* [Radiophysics and Radio Astronomy]. 1997, vol. 2, pp. 353–358.

9. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 2004. 356 p.
10. Virchenko N. O. *Osnovni metody rozv'yazannya zadach matematychnoyi fizyky* [Basic methods of solving mathematical physics problems]. Kyiv, Volya Publ., 2006. 332 p.
11. Pirs Jh. P. *Teoriya i raschet elektronnykh potokov* [Theory and calculation of electron currents]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1956. 254 p.
12. Andrunyk V. A., Vysoc`ka V. A., Pasychnyk V. V. *Chysel`ny metody v komp'yuternykh naukah* [Numerical methods in computer science]. Lviv, Novyi svit-2000 Publ., 2018. 536 p.

Надійшла (received) 05.11.2023

UDC 51-73

O. S. MAZMANISHVILI, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, senior staff scientist, National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology"; Kharkov, Ukraine, e-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0373-0626>

G. YU. SYDORENKO, Candidate of Technical Sciences (PhD), Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of system analysis and information-analytical technologies, V. N. Karazin Kharkiv National University, Associate Professor at the Department of modeling of systems and technologies, Kharkiv, Ukraine, e-mail: annsydorenko01@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0761-2793>

SIMULATION OF THE PROPAGATION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE IN AN INHOMOGENEOUS NONABSORBING MEDIUM

Analytical solutions of the Ishimaru's parabolic equation for the coherence function of the electromagnetic field, which describe the temporal properties of the pulse at the output of a heterogeneous non-dissipative medium, are considered. A generalization of the approach used in the Ishimaru model to describe the time evolution of a monochromatic electromagnetic pulse enveloping in homogeneous non-dissipative media is obtained for the case of non-homogeneous non-dissipative media. Thus, an attempt was made to take into account the influence of the heterogeneity of the medium on the shape of the resulting pulse. When solving the given problem, the difficulties associated with the calculation of the continuous integral arising in the space of diffusion trajectories were overcome. This made it possible to obtain an explicit expression for the Green's function of the task and to build a computational algorithm based on which a number of numerous experiments were conducted. The analysis of the work was carried out based on the apparatus of quadratic integral functionals based on the solutions of differential stochastic equations. In the paper, the invariant temporal properties of the envelope of monochromatic electromagnetic pulses recorded after passing through a flat layer of a scattering heterogeneous medium, i.e., properties that remain unchanged when the parameters of the medium vary, in particular, the distribution of the concentration of scattering centers. The dynamics of the formation of time plumes of the scattered wave, in which the tail part is located in the peripheral time area, were analyzed. When propagating at the speed of transformation of the wave front, it reflects the appearance of the layers of the scattering region and its longitudinal shape. It is noted that the development of the proposed approximation approach to the processes affecting the time delay of electromagnetic pulses can be the accounting for the attenuation of radiation during its propagation in an inhomogeneous absorbing medium.

Keywords: electron beam, magnetron gun, electron dynamics, motion direction transformation, gradient magnetic field, control, mathematical modeling.

Повні імена авторів / Author's full names

Автор 1 / Author 1: Мазманішвілі Олександр Сергійович, Mazmanishvili Oleksandr Serhiyovych

Автор 2 / Author 2: Сидоренко Ганна Юріївна, Sydorenko Ganna Yuriyivna