DOI: 10.20998/2079-0023.2023.02.09
УДК 518.56

О. Б. АХІЕЗЕР, кандидат технічних наук, професор НТУ «ХПІ», завідуюча кафедрою комп'ютерної математики і аналізу даних, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; Україна, e-mail: Olena.Akhiiezer@khpi.edu.ua; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7087-9749

О. В. ТОНІЦА, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; Україна, e-mail: Oleh.Tonitsa@khpi.edu.ua, ORCID: https://orcid.org/0009-0001-8498-0522

О. А. ГЕЛЯРОВСЬКА, доцент кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна, e-mail: Oksana.Heliarovska@khpi.edu.ua, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8927-7465

І. В. СЕРДЮК, доцент кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна, e-mail: Iryna.Serdiuk @khpi.edu.ua, ORCID: https://orcid.org/0009-0001-1143-9145

М. О. АСЛАНДУКОВ, старший викладач кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна, e-mail: mykola.aslandukov@khpi.edu.ua, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8797-5817

ДОСЛІДЖЕННІ ДЕМОГРАФІЧНИХ СИТУАЦІЙ НА БАЗІ ЛАГОВИХ МОДЕЛЕЙ

Пропонується дослідження та прогнозування часових рядів на основі моделей з лагами, а також розрахунок достовірного прогнозу на основі даних про народжуваність по Україні. Економічне моделювання – це один із важливих сучасних інструментів оцінки впливу технологій на економічний сектор з метою отримання оптимального рішення. Економічні оцінки можуть ґрунтуватися на кількох різних підходах до моделювання, кожен з яких має свої сильні та слабкі сторони. Актуальність використання економіко-математичних моделей з метою вивчення демографії пов'язана з необхідністю вивчення популяційних та міграційних процесів, а також для подальшого планування та здійснення економічного та соціального розвитку країни. У кожній сфері економіки зустрічаються явища, які цікаво та важливо вивчати в їх розвитку, оскільки вони еволюціонують у часі. Ціни, економічні умови, режим протікання промислового процесу, демографічні дані мають властивість змінюватися протягом часу. Сукупність вимірювань подібного роду показників в залежності від часу представляє собою часовий ряд. Цілі вивчення часових рядів можуть бути різними. Можливо, наприклад, намагатися передбачити майбутнє на основі знань минулого, керувати процесом, який породжує ряд, намагатися з'ясувати механізм, який лежить в основі процесу, очистити ряд від компонентів, які затемнюють його динаміку, або просто стисло зробити опис характерних особливостей ряду. При вивченні взаємозв'язків між показниками або при аналізі їх розвитку в часі в якості пояснюючих змінних використовують не тільки поточне значення змінних, але й деякі попередні по часу значення, а також сам час. Моделі даного типу називаються динамічними. В економічному аналізі динамічні моделі використовуються достатньо широко. Це цілком природно, адже в багатьох випадках вплив одних економічних факторів на інші здійснюється не миттєво, а з деяким запізненням – лагом. Об'єктом дослідження роботи являється математична модель взаємозалежності векторного часового ряду «Народжуваність по Україні за січень 2005 – липень 2012 рр.» від реального доходу на душу населення. Дані вибрані досить актуально, адже без попереднього демографічного прогнозу неможливо уявити перспективи промисловості та споживання товарів та послуг, житлового будівництва, розвитку соціальної інфраструктури, охорони здоров'я та освіти, пенсіонної системи та рішення геополітичних проблем.

Ключові слова: економічне моделювання, економічний аналіз, часовий ряд, лаг, динамічні моделі, популяційні та міграційні процеси.

Вступ. При підготовці та обґрунтуванні прогнозів регіонів, визначенні потреб населення в послугах освіти, охорони здоров'я, житлово-комунального господарства широко використовуються демографічні прогнози, що визначає актуальність даного дослідження. Об'єктом дослідження є демографічні процеси, а предметом дослідження – їх економіко-математичне моделювання [1], [2]. При цьому необхідно проаналізувати сутність математичної моделі та методів прогнозування на її основі, підходи до оцінки адекватності моделі, демографічні тенденції по Україні та побудувати прогнозну модель кількості населення в Україні.

Математична постановка задачі. Необхідно провести повний аналіз даних часового ряду, обрати та ідентифікувати математичну модель, та зробити прогноз по визначеній моделі. Вихідними даними є взаємозв'язані дані про народжуваность та реальний дохід по Україні. Необхідно проаналізувати структуру даних та зробити прогноз. Для цього вирішити наступні задачі: обрати та побудувати лагову регресійну модель часового ряду, оцінити адекватність побудованої моделі, зробити прогноз демографічної ситуації.

Математична модель і методи розв'язання задачі. Ряд спостережень $x(t_1), x(t_2), ..., x(t_N)$ випадкової величини $\xi(t)$, що проаналізована, проведених в послідовні рівновіддалені моменти часу $t_1, t_2, ..., t_N$, називається часовим рядом. Випадкова величина $\xi(t)$ залежить від параметру t, тобто мова йде про однопараметричне сімейство випадкових величин $\{\xi(t)\}$. Це означає, що закон розподілення ймовірностей цих випадкових величин може залежати від часу t (зокрема їх перші та другі моменти часу). Основними відмінностями часового ряду від послідовності спостережень $x_1, x_2, ..., x_n$, які утворюють випадкову вибірку, є члени часового ряду, які не є статистично незалежними, на відміну від елементів випадкової вибірки, члени часового ряду не є однаково розподіленими, тобто $P\{x(t_1)<x\}\neq P\{x(t_2)<x\}$ при $t_1\neq t_2$. Таким чином, взаємозалежність членів часового ряду створює свою специфічну базу для побудови прогнозних значень аналізованого показника (тобто для побудови оцінок $\tilde{x}(N+k)$ для невідомих значень $x(N+k)$) за спостереженими значеннями $x(1), x(2), ...,$ $x(N)$. Доцільно виділити основні типи факторів, під впливом яких формуються значення елементів значення часового ряду: довгочасові, які формують загальну тенденцію в зміні аналізованої ознаки $x(t)$, сезонні, які формують періодичні повторювальні у визначену пору року коливання аналізованої ознаки, циклічні, які формують зміни аналізованої ознаки, обумовленні діями довгочасових циклів економічної, демографічної або астрофізичної природи, а також випадкові, які не підлягають обліку та реєстрації. Їх вплив на формування значень часового ряду як раз й обумовлює стохастичну природу елементів $x(t)$. Виходячи з даних факторів, можна зробити висновки, щодо формулювання базисної цілі статистичного аналізу часового ряду. По даній траєкторії аналізованого часового ряду $x(t)$ необхідно визначити, які з невипадкових функцій у ньому присутні, побудувати «гарні» оцінки для присутніх невипадкових функцій, підібрати модель, яка адекватно описує поведінку «випадкових залишків» $\varepsilon(t)$, та статистично оцінити параметри цієї моделі.

Успішне рішення цих задач, обумовлене базисною ціллю статистичного аналізу часового ряду, є основою для досягнення кінцевих прикладних цілей дослідження та, у першу чергу, для рішення задачі прогнозу значень часового ряду. Ряди, які зустрічаються на практиці, належать звичайно до одного із трьох видів: ряди, які проявляють свої властивості стаціонарності в спливанні довгих періодів часу; ряди, які достатньо стаціонарні в спливанні коротких періодах часу та ряди, які є явно нестаціонарними.

Майже всі дані в економіці представляють собою нестаціонарний ряд. Часовий ряд називається нестаціонарним, якщо хоча б одна із ймовірнісних характеристик є непостійною. Нестаціонарні дані, як правило, є непередбачуваними та не можуть бути змодельовані або прогнозованими. Щоб отримати послідовні, надійні результати, нестаціонарні дані повинні бути перетворені в стаціонарні дані, тобто необхідно усунути або відфільтрувати нестаціонарну частину так, щоб залишився ряд, з яким можливо працювати як зі стаціонарним.

Ряд $x(t)$ називається строго стаціонарним (стаціонарним в вузькому значенні), якщо совісне розподілення ймовірностей m спостережень $x(t_1), x(t_2), ...,$ $x(t_m)$ таке саме, як і для m спостережень $x(t_1+\tau),$, $x(t_2+\tau), ..., x(t_m+\tau)$ при будь-яких m, $t_1, t_2, ..., t_m$ та τ. Інакше кажучи, властивості строго стаціонарного часового ряду не змінюються при зміні початку відліку часу. Зокрема, при $m=1$ із припущення про строгу стаціонарність часового ряду x_t треба, щоб закон розподілу ймовірностей випадкової величини X_t не залежав від t, а виходить, не залежали від t і всі його основні числові характеристики (якщо, звичайно, вони існують), у тому числі: математичне очікування $E(X_t)=\mu$ і дисперсія $D(X_t)=\sigma^2$ [3].

Значення μ визначає постійний рівень, щодо якого коливається аналізований часовий ряд x_t, а постійна σ характеризує розмах цих коливань.

Одна з головних відмінностей послідовності спостережень, що утворюють часовий ряд, полягає в тому, що члени часового ряду є, загалом кажучи, статистично взаємозалежними. Ступінь тісноти статистичного зв'язку між випадковими величинами X_t і $X_{t+\tau}$ може бути обмірювана парним коефіцієнтом кореляції

$$Corr(X_t, X_{t+\tau})=\frac{Cov(X_t, X_{t+\tau})}{\sqrt{D(X_t)\cdot D(X_{t+\tau})}}, \qquad (1)$$

де

$$Cov(X_t, X_{t+\tau})=E\left[(X_t-E(X_t))(X_{t+\tau}-E(X_{t+\tau}))\right]. \quad (2)$$

Якщо ряд x_t стаціонарний, то значення $Corr(X_t, X_{t+\tau})$ не залежить від t і є функцією тільки від τ; ми будемо використовувати для нього позначення $\gamma(\tau)$:

$$\gamma(\tau)=Cov(X_t, X_{t+\tau}). \qquad (3)$$

Зокрема,

$$D(X_t)=Cov(X_t, X_t)\equiv\gamma(0). \qquad (4)$$

Відповідно, для стаціонарного ряду й значення коефіцієнта кореляції $Corr(X_t, X_{t+\tau})$, що залежить тільки від τ, будемо використовувати для нього позначення $\rho(\tau)$, так що

$$\rho(\tau)=Corr(X_t, X_{t+\tau})=\frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}. \qquad (5)$$

Зокрема, $\rho(0)=1$.

Практична перевірка строгої стаціонарності ряду x_t на підставі спостереження значень $x_1, x_2, ..., x_n$ у загальному випадку скрутна. У зв'язку із цим під стаціонарним рядом на практиці часто мають на увазі часовий ряд x_t, у якого $E(X_t)\equiv\mu$, $D(X_t)\equiv\sigma^2$, $Cov(X_t, X_t)=\gamma(\tau)$, для будь-яких t і τ [4], [5].

Ряд, для якого виконані зазначені три умови, називають стаціонарним у широкому сенсі (слабко стаціонарним, стаціонарним другого порядку або коваріаційно стаціонарним).

Якщо ряд є стаціонарним у широкому сенсі, він не обов'язково є строго стаціонарним. У той же час, і строго стаціонарний ряд може не бути стаціонарним у широкому сенсі просто тому, що в ньому можуть не існувати математичне очікування й/або дисперсія. (Щодо останнього прикладом може служити випадкова вибірка з розподілу Коші.) Крім того, можливі ситуації, коли зазначені три умови виконуються, але, наприклад, $E(X_t^3)$ залежить від t [6].

Ряд x_t, $t = 1,...,n$, називається гауссівським, якщо спільний розподіл випадкових величин $X_1,...,X_n$ є n-мірним нормальним розподілом. Для гауссівського ряду поняття стаціонарності у вузькому й у широкому сенсі збігаються.

Отже, нехай x_t – стаціонарний ряд з $E(X_t) \equiv \mu$, $D(X_t) \equiv \sigma^2$, $Cov(X_t, X_t) = \gamma(\tau)$.

Оскільки в цьому випадку коефіцієнт $\rho(\tau)$ вимірює кореляцію між членами того самого часового ряду, його прийнято називати коефіцієнтом автокореляції (або просто автокореляцією).

Графік залежності $\rho(\tau)$ від τ часто називають корелограмою. Він може використовуватися для охарактеризування деяких властивостей механізму, що породжує часовий ряд. Якщо x_t – стаціонарний часовий ряд і c – деяка постійна, то часові ряди x_t і $(x_t + c)$ мають однакові корелограми [7].

Якщо припустити, що часовий ряд описується моделлю стаціонарного гауссівського процесу, то повний опис спільного розподілу випадкових величин $X_1,...,X_n$ вимагає завдання $n+1$ параметрів: μ, $\gamma(0)$, $\gamma(1)$, $\cdots$, $\gamma(n-1)$ (або μ, $\gamma(0)$, $\rho(1)$, $\cdots$, $\rho(n-1)$)... Це набагато менше, ніж без вимоги стаціонарності, але все-таки більше, ніж кількість спостережень.

Процесом білого шуму ("білим шумом", "чисто випадковим часовим рядом") називають стаціонарний часовий ряд x_t, для якого $E(X_t) \equiv 0$, $D(X_t) \equiv \sigma^2 > 0$ та $\rho(\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$.

В економіці дуже часто використовується поняття часового лага. Часто досліджувана вихідна величина змінюється не одразу після зміни значення фактору, що впливає, а через деякий час – часовий лаг.

Дистрибутивно-лагові моделі – це регресійні моделі з присутнім часовим лагом.

Загальний вигляд безкінечної дистрибутивно-лагової моделі:

$$y_t = const + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + ... + \varepsilon_t. \quad (6)$$

Дистрибутивно-лагова модель з кінцевим лагом у k періодів:

$$y_t = const + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + ... + \beta_k x_{k-2} + \varepsilon_t, \quad (7)$$

де t − поточній період,

$x_{t-i}, i = 1,2,3...$ − сумарне значення фактору, що впливає у $t-1$ період,

$\beta_i, i = 1,2,3...$ − коефіцієнти впливу i-го часового лага,

ε_t – похибка,

β_o − короткостроковий або впливовий мультиплікатор.

Враховуючи важливість використання дистрибутивно-лагової моделі в економіці та інших галузях життєдіяльності людини, є затребуваною адекватна оцінка параметрів такої моделі. Маємо завдання оцінити параметри α та β_0, як найбільш значимі. Розглянемо декілька підходів, що вирішують дану проблему.

Припустимо, що x_t − не стохастичні, тоді маємо, що $x_{t-i}, i = 1,2,3...$ також не стохастичні, тому можливо застосувати метод найменших квадратів (МНК).

Розглянемо підхід Койка. Припустимо, що коефіцієнти β_i для моделі з невизначеним лагом мають однаковий знак та змінюються за геометричною прогресією, тоді $\beta_k = \beta_0 \lambda^k$, причому $0 < \lambda < 1$ − темп спадання, і модель стає кінцевою, тобто $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \beta_0 (\frac{1}{1-\lambda})$.

Вплив лага на y_t з часом спадає і модель можна записати наступним чином:

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_0 \lambda x_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-2} + ... + \varepsilon_t. \quad (8)$$

Далі в модель вводиться затримка на один період та множиться на λ, тоді маємо:

$$\lambda y_{t-1} = \lambda\alpha + \beta_0 \lambda x_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-2} + \beta_0 \lambda^3 x_{t-3} + ... + \varepsilon_t. \quad (9)$$

Віднімаючи (9) від (8), отримуємо перетворення Койка:

$$y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta_0 x_t + \lambda y_{t-1} + \nu_t, \quad (10)$$

де $\nu_t = \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$

Відмітимо деякі особливості перетворення Койка:

- Заміна безкінечної кількості параметрів на лише 3, які необхідно оцінити, тобто зникла проблема мультиколініарності.
- Модель із дистрибутивно-лагової перетворилася в авто регресійну [8].

Але оскільки модель Койка є послідовною моделлю, яка не моє чіткого теоретичного обґрунтування, були запропоновані дві модифікаціїцієї моделі:

- Модель адаптивних очікувань, яка відображає підтверджувані на практиці міркування, що наступне навчання відбувається на базі минулого досвіду, і чим старше досвід, тим його вплив менший.
- Модель часткових пристосувань, запропонована М. Нерлоу.

Дані моделі являються авторегресійними та їх можна представити у вигляді:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 y_{t-1} + \nu_t . \qquad (11)$$

Для оцінки параметрів $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ можна використовувати метод найменших квадратів, тільки якщо правильним являється припущення, що стохастична незалежна величина y_{t-1} не корелює з випадковою величиною v_t [9], [10].

Основним недоліком цих методів являється припущення, що коефіцієнти β_i убувають у геометричній прогресії, що на практиці в деяких ситуаціях являється досить строгим.

Розглянемо поліноміальний лаг Альмона.
Ш. Альмоном був запропонований підхід, при якому коефіцієнти β_i згідно теоремі Вейерштраса можна апроксимувати поліномом відповідної ступені від i -величини часового лагу, тобто:

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + ... + a_m i^m , \qquad (12)$$

де m − ступінь полінома, при чому $m < k$ [6].

Підставимо (12) у кінцеву дистрибутивно-лагову модель та зробимо заміну:

$$\begin{cases} Z_{0t} = \sum_{i=0}^{k} x_{t-i}, \\ Z_{1t} = \sum_{i=0}^{k} i x_{t-i}, \\ ... \\ Z_{mt} = \sum_{i=0}^{k} i^m x_{t-i}. \end{cases}$$

Отримуємо модель Альмона:

$$y_t = \alpha + a_0 Z_{0t} + a_1 Z_{1t} + a_2 Z_{2t} + ... a_m Z_{mt} + \varepsilon_t . \qquad (13)$$

При умові, що ε_t задовольняє всім припущенням щодо класичної моделі лінійної регресії, для оцінки параметрів можна використовувати стандартний МНК. Таким чином, у відмінності від метода Койка, немає проблем, пов'язаних з присутністю залежних змінних, але є проблема мультиколініарності змінних Z_i [11].

Розглянемо деякі методи дослідження, зокрема, перевірку наявності аномальних значень та їх виключення. Попередня обробка часових рядів міститься у виявленні аномальних значень ряду. Аномальні значення часового ряду не відповідають потенціалу досліджуваної економічної системи, та їх використання для побудови трендової моделі може сильно спотворити результати, що отримуємо.

Причинами появи аномальних рівней можуть бути технічні помилки при зборі та передачі інформації. Такі помилки називаються помилками першого роду, їх можливо виявити та усунути або прийняти міри до їх не допуску. Крім того, аномальні рівні можуть виникати через вплив факторів, які мають об'єктивний характер, але які діють епізодично. Такі помилки називаються помилками другого роду, і їх неможливо усунути, але можливо виключити з розглядання, змінив аномальне значення на середнє арифметичне двох сусідніх значень.

Для виявлення аномальних значень ряду використовують критерій Ірвіна, згідно якого аномальною вважається точка X_t, яка віддалена від попередньої точки X_{t-1} на величину, більшу середньоквадратичного відхилення:

$$\lambda_i = \frac{|X_t - X_{t-1}|}{\sigma}, \qquad (14)$$

де λ_i − критерій Ірвіна,

σ − середнє квадратичне відхилення: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_t - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$.

Точка вважається аномальною, якщо $\lambda_i > \lambda^*$. Табличне значення λ^* зменшується зі збільшенням довжини ряду (табл. 1).

Таблиця 1 – Значення критерію Ірвіна

n	10	20	30	50	100
λ^*	1,2	1,3	1,2	1,1	1,0

Розглянемо критерій Дарбіна – Уотсона. Розглядаючи послідовність залишків як часовий ряд, можливо побудувати графік їх залежності від часу. У відповідності з передумовами методу найменших квадратів залишки ε_t повинні бути випадковими. Однак при моделюванні часових рядів нерідко зустрічається ситуація, коли залишки містять у собі тенденцію або циклічні коливання. Це свідчить про те, що кожне наступне значення залишків залежить від попередніх. В цьому випадку кажуть про наявність автокореляційних залишків [12].

Існує два найбільш розповсюджених метода визначення автокореляції залишків. Перший метод – це побудова графіка залежності залишків від часу та візуальне визначення наявності або відсутності автокореляції. Другий метод – використання критерію Дарбіна – Уотсона та розрахунок наступної величини:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2} . \qquad (15)$$

Таким чином, d являється відношення суми квадратів різностей послідовних значень залишків до остаточної суми квадратів по моделі регресії.

Висновки та перспективи подальших досліджень. На народжуваність впливає багато факторів: війни, соціальні умови, медичне обслуговування, рівень культури та освіти та ін. Але найбільш народжуваність залежить саме від добробуту сім'ї, її сукупного доходу. Саме тому в якості початкових даних для дослідження було обрано взаємозв'язані ряди: народжуваність та реальний дохід по Україні за період січень 2005 р. − липень 2012 р. (рис. 1–2).

Виходячи з графіків, бачимо, що необхідно виділити аномальні значення для народжуваності, оскільки деякі показники ряду дуже відхиляються від сусіднього. Таким чином, отриманий ряд, представлений на рис. 3.

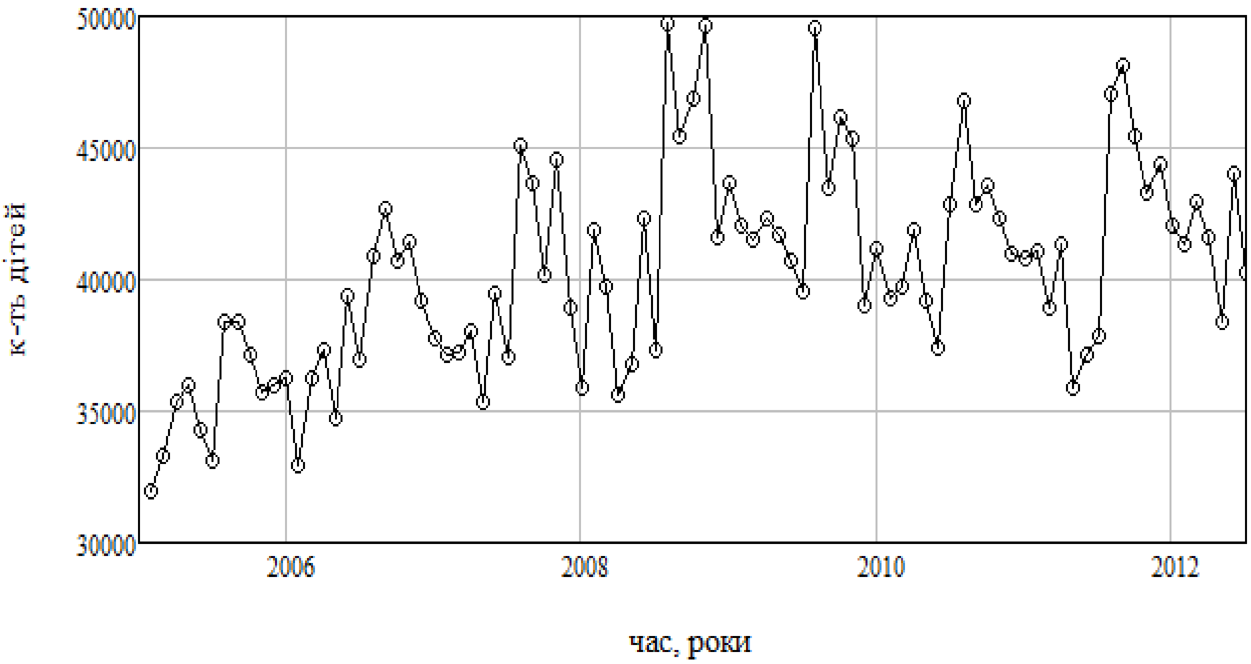

Рис. 1 Кількість народжених дітей у період 2005 – липень 2012 рр.

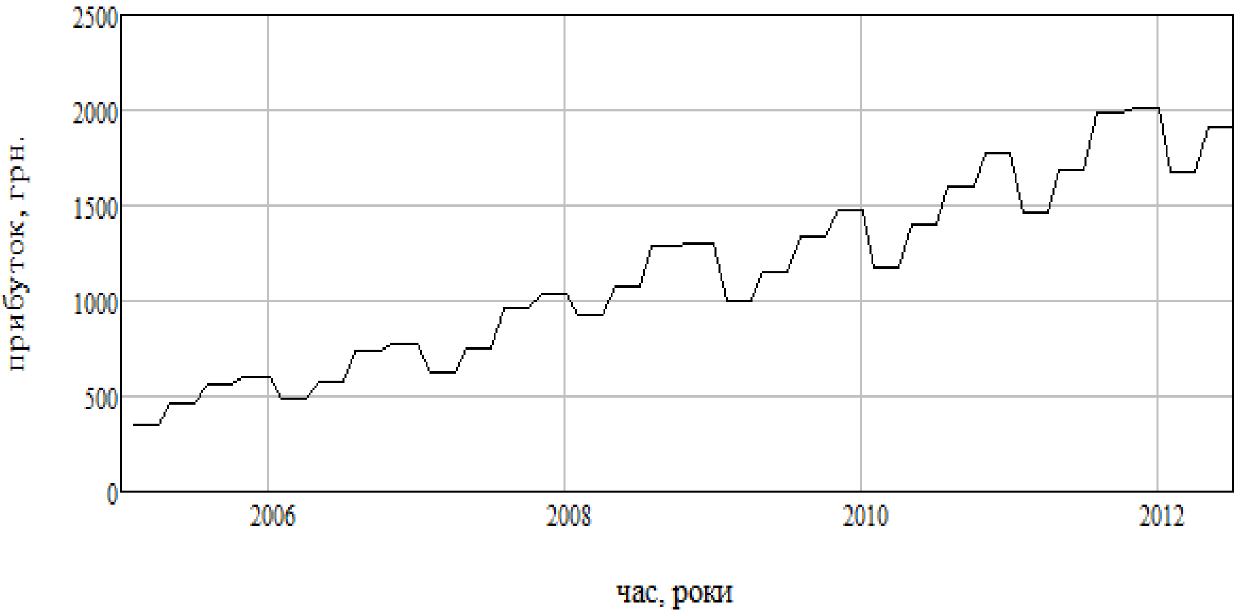

Рис. 2 Реальний дохід по Україні в період 2005 – липень 2012 рр.

Рис. 3 Вихідний ряд народжуваності, після виключення з нього аномальних значень

Розглянуто та використано на практиці методи моделювання та прогнозування часових рядів; при вивченні різних підходів для моделей з розподіленими лагами, був обраний підхід, який базується на послідовній оцінці народжуваності та були розглянуті альтернативні моделі сезонної складової. Адекватність розробленої моделі була перевірена на екзаменаційній виборці за перше півріччя 2012 року.

Список використаної літератури

1. Руська Р. В. *Економетрика: навчальний посібник.* Тернопіль: Тайп, 2012. 224 с.
2. Волошин О. Р., Галайко Н. В. *Економетрія.* Львів: Львівський державний університет внутрішніх справ, 2012. 192 с.
3. Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В., Орел Б. П., Штабалюк П. І. *Теорія ймовірностей та математична статистика.* Київ: Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В., Орел Б. П., Штабалюк П. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Київ: НТУУ «КПІ», 2014. 212 с.
4. Lyubchyk L., Grinberg G., Lubchick M., Galuza A., Akhiiezer O. Interval Evaluation of Stationary State Probabilities for Markov Set-Chain Models. *10th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT).* Deggendorf, Germany, 2020. P. 82–-85. DOI: 10.1109/ACIT49673.2020.9208932
5. Dzubenko M. I., Kolenov I. V., Pelipenko V. P., Dakhov N. F., Galuza A. A. Pulse power supply unit with microcontroller control for a laser diode array pumped erbium-ytterbium laser. *Telecommunications and Radio Engineering.* 2020. Vol.79, issue 10. P. 891–902. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v79.i10.60.
6. Гур'янова Л. С., Клебанова Т. С., Сергієнко О. А. Економетрика: навчальний посібник для студентів напряму підготовки "Економічна кібернетика" усіх форм навчання. Харків: ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. 384 с.
7. Васильків І. М. *Основи теорії ймовірностей і математичної статистики.* Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2020. 184 с.
8. Млавець Ю. Ю., Шаркаді М. М. *Теорія ймовірностей і математична статистика.* Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2015. 48 с.
9. Гардер С. Є., Корніль Т. Л. Фрактальний аналіз та прогнозування тенденції фінансового часового ряду. *Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ»: зб.наук. пр. Темат. вип.: Математичне моделювання в техніці та технологіях.* Харків: НТУ «ХПІ», 2018. № 3. С. 37–40.
10. Недашківський Є. А. Теоретико-методологічні аспекти прогнозування тимчасових рядів з фрактальними властивостями на основі лінгвістичного моделювання. *Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія: технічні науки.* 2019. № 2. С. 155–160.
11. Кондратенко К. А., Гардер С. Є. Прогнозування фінансового часового ряду з використанням рекурентної нейронної мережі. *XIII Міжнародна науково-практична конференція магістрантів та аспірантів НТУ «ХПІ».* Харків: НТУ «ХПІ», 2019. С. 66–67.
12. Шапошнікова І. О. Аналіз часових рядів первинного ринку житлової нерухомості міста Києва. *Економічний вісник Київського національного університетк будівництва і архітектури.* Київ: КНУБА, 2018. № 36/1. С. 140–147.

References (transliterated)

1. Rus'ka R. V. *Ekonometryka: navchal'nyy posibnyk* [Econometrics: a study guide]. Ternopil', Tayp Publ., 2012. 224 p.
2. Voloshyn O. R., Halayko N. V. *Ekonometriya* [Econometrics]. L'viv: L'vivs'kyy derzhavnyy universytet vnutrishnikh sprav Publ., 2012. 192 p.
3. Kushlyk-Dyvul's'ka O. I., Polishchuk N. V., Orel B. P., Shtabalyuk P. I. *Teoriya ymovirnostey ta matematychna statystyka* [Probability theory and mathematical statistics]. Kyyiv, NTUU "KPI" Publ., 2014. 212 p.
4. Lyubchyk L. Grinberg G., Lubchick M., Galuza A., Akhiiezer O. Interval Evaluation of Stationary State Probabilities for Markov Set-Chain Models. *10th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT).* Deggendorf, Germany, 2020, pp. 82–85. DOI: 10.1109/ACIT49673.2020.9208932
5. Dzubenko M. I., Kolenov I. V., Pelipenko V. P., Dakhov N. F., Galuza A. A. Pulse power supply unit with microcontroller control for a laser diode array pumped erbium-ytterbium laser. *Telecommunications and Radio Engineering.* 2020, vol. 79, issue 10, pp. 891–902. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v79.i10.60.
6. Hur'yanova L. S., Klebanova T. S., Serhiyenko O. A. *Ekonometryka: navchal'nyy posibnyk dlya studentiv napryamu pidhotovky "Ekonomichna kibernetyka" usikh form navchannya.* [Econometrics: a basic textbook for students directly preparing "Economic Cybernetics" for all forms of learning]. Kharkiv, KhNEU im. S. Kuznetsya Publ., 2015. 384 p.
7. Vasyl'kiv I. M. *Osnovy teoriyi ymovirnostey i* matematychnoyi *statystyky* [Basics of probability theory and mathematical statistics]. L'viv, LNU im. Ivana Franka Publ., 2020. 184 p.
8. Mlavets' Yu. Yu., Sharkadi M. M. *Teoriya ymovirnostey i matematychna statystyka* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Uzhhorod, DVNZ "UzhNU" Publ., 2015. 48 p.

9. Harder C. Ye., Kornil' T. L. Fraktal'nyy analiz ta prohnozuvannya tendentsiyi finansovoho chasovoho ryadu [Fractal analysis and trend forecasting of financial time series]. *Visnyk Nats. tekhn. un-tu «KhPI»: zb.nauk. pr. Temat. vyp.: Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI": a collection of scientific works. Thematic issue: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018, no. 3, pp. 37–40.
10. Nedashkivs'kyy Ye. A. Teoretyko-metodolohichni aspekty prohnozuvannya tymchasovykh ryadiv z fraktal'nymy vlastyvostyamy na osnovi linhvistychnoho modelyuvannya [Theoretical and methodological aspects of forecasting time series with fractal properties based on linguistic modeling]. *Vcheni zapysky TNU imeni V.I. Vernads'koho. Seriya: tekhnichni nauky* [Academic notes of TNU named after V.I. Vernadskyi. Series: technical sciences]. 2019, no. 2, pp. 155–160.
11. Kondratenko K. A., Harder S. Ye. Prohnozuvannya finansovoho chasovoho ryadu z vykorystannyam rekurentnoyi neyronnoyi merezhi [Financial time series forecasting using a recurrent neural network]. *XIII Mizhnarodna naukovo-praktychna konferentsiya mahistrantiv ta aspirantiv NTU "KhPI"* [XIII International scientific and practical conference of master's and postgraduate students of NTU "KhPI"]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2019, pp. 66–67.
12. Shaposhnikova I. O. Analiz chasovykh ryadiv pervynnoho rynku zhytlovoyi nerukhomosti mista Kyyeva [Analysis of time series of the primary market of residential real estate in Kyiv]. *Ekonomichnyy visnyk Kyyivs'koho natsional'noho universytetk budivnytstva i arkhitektury* [Economic Bulletin of the Kyiv National University of Construction and Architecture]. Kyyiv, KNUBA Publ., 2018, no. 36/1, pp. 140–147.

Надійшла (received) 01.12.2023

UDC 518.56

O. B. AHIEZER, Candidate of Technical Sciences, Professor of NTU "KhPI", Head of the Department of Computer Mathematics and Data Analysis, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine, e-mail: Olena.Akhiiezer@khpi.edu.ua, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7087-9749
O. V. TONITSA, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor in the Department of Computer Mathematics and Data Analysis, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine, e-mail: Oleh.Tonitsa@khpi.edu.ua, ORCID: https://orcid.org/0009-0001-8498-0522
O. A. GELYAROVSKA, Associate Professor at the Department of Computer Mathematics and Data Analysis, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine, e-mail: Oksana.Heliarovska@khpi.edu.ua, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8927-7465
I. V. SERDYUK, Associate Professor at the Department of Computer Mathematics and Data Analysis, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine, e-mail: Oksana. Iryna.Serdiuk @khpi.edu.ua, ORCID: https://orcid.org/0009-0001-1143-9145
M. O. ASLANDUKOV, Senior Lecturer at the Department of Computer Mathematics and Data Analysis, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine, e-mail: mykola.aslandukov@khpi.edu.ua, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8797-5817

ADVANCED DEMOGRAPHIC SITUATIONS BASED ON LAG MODELS

Research and forecasting of time series based on models with lags is offered, as well as calculation of a reliable forecast based on data on birth rates in Ukraine. Economic modeling is one of the important modern tools for assessing the impact of technologies on the economic sector in order to obtain an optimal solution. Economic evaluations can be based on several different modeling approaches, each with its own strengths and weaknesses. The relevance of the use of economic and mathematical models for the purpose of studying demography is connected with the need to study population and migration processes, as well as for further planning and implementation of the country's economic and social development. In every sphere of the economy, there are phenomena that are interesting and important to study in their development, as they evolve over time. Prices, economic conditions, industrial processes, and demographic data tend to change over time. The set of measurements of this kind of indicators depending on time is a time series. The goals of studying time series can be different. It is possible, for example, to try to predict the future on the basis of knowledge of the past, to control the process that generates the series, to try to find out the mechanism underlying the process, to clear the series of components that obscure its dynamics, or simply to briefly describe the characteristic features of the series. When studying the relationships between indicators or when analyzing their development over time, not only the current value of the variables, but also some previous values in time, as well as time itself, are used as explanatory variables. Models of this type are called dynamic. In economic analysis, dynamic models are used quite widely. This is quite natural, because in many cases the influence of some economic factors on others is not carried out immediately, but with some delay − a lag. The object of research is the mathematical model of the interdependence of the vector time series "Births in Ukraine for January 2005 − July 2012." The data are chosen quite relevantly, because without a preliminary demographic forecast it is impossible to imagine the prospects of industry and consumption of goods and services, housing construction, development of social infrastructure, health care and education, pension system and solutions to geopolitical problems.

Keywords: economic modeling, economic analysis, time series, lag, dynamic models, population and migration processes.

Повні імена авторів / Author's full names

Автор 1 / Author 1: Ахієзер Олена Борисівна, Ahiezer Olena Borysivna
Автор 2 / Author 2: Тоніца Олег Володимирович, Tonitsa Oleg Volodimirovych
Автор 3 / Author 3: Геляровська Оксана Анатоліївна, Gelyarovska Oksana Anatoliivna
Автор 4 / Author 4: Сердюк Ірина Василівна, Serdyuk Irina Vasilivna
Автор 5 / Author 5: Асландуков Микола Олексійович, Aslandukov Mykola Oleksiyovych