ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

APPLIED MATHEMATICS

DOI: 10.20998/2079-0023.2023.02.15
УДК 513.88

А. А. БОЄВА, кандидат фізико-математичних наук (PhD), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри комп’ютерної математики і аналіза даних, м. Харків, Україна; e-mail: annaboeva19@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0009-0001-3355-8460H

ПРО ОДИН КЛАС НЕСТАЦІОНАРНИХ КРИВИХ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Стаціонарні випадкові процеси достатньо добре вивчалися протягом останніх років, починаючи з робіт А. Н. Колмогорова. Можливість побудування кореляційної теорії нестаціонарних випадкових процесів розглядалася в монографіях М. С. Ліфшіца, А. А. Янцевича, В. А. Золотарьова. Деякі класи нестаціонарних кривих досліджувалися В. Е. Кацнельсоном та ін. В даній роботі розглядалися нестаціонарні випадкові процеси як криві, які «слабо відхиляються» від випадкових процесів з кореляційною функцією спеціального вигляду. Вводиться інфінітезимальна кореляційна функція, яка за змістом є відхилення від випадкового процесу з даною кореляційною функцією. В роботі розглядаються нестаціонарні випадкові процеси у випадку, коли оператор процесу має одновимірну уявну компоненту, і коли оператор є дисипативним з дискретним спектром. Показано, що нестаціонарність випадкового процесу тісно пов’язана з відхиленням оператора від свого спряженого. Використовуючи трикутну і універсальну моделі несамоспряжених операторів, можна отримати представлення для кореляційної функції у випадку нестаціонарного випадкового процесу, яке заміняє представлення Бохнера – Хінчина у випадку стаціонарних випадкових процесів. Отримано вираз для інфінітезимальної функції для різних випадків спектра (дискретний спектр, розташований в верхній напівплощині, і безконтрастний спектр в нулі). Для випадку оператора з дискретним спектром інфінітезимальна функція може бути знайдена через спеціальну лямбда-функцію. Для лебегового простору комплекснозначних інтегровних з квадратом функцій отримано вираз для інфінітезимальної функції через спеціальну модіфіковану функцію Бесселя нульового порядку. Показано, що аналогічний підхід можна використовувати для еволюційно представимих послідовностей в гільбертовому просторі.

Ключові слова: гільбертів простір, нестаціонарні випадкові процеси, кореляційна функція, інфінітезимальна функція, спряжений оператор, дисипативний оператор, спектр оператора, дискретний спектр, безконтрастний спектр.

Вступ. Розглянемо комплекснозначний процес $\xi(t)$ з $M\xi(t)\equiv 0$ і кореляційною функцією

$$K(t-s)=M\xi(t),\overline{\xi(s)}.$$

Кореляційна функція $K(t-s)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\frac{\partial K}{\partial s}=0.$$

Це рівняння може бути покладено в основу виділення нових класів випадкових, у загальному випадку, нестаціонарних, процесів [1]. Стаціонарному випадковому процесу $\xi(t)$ відповідає крива ξ_t в гільбертовому просторі $H_\xi=\overline{V(\xi_k)}_k$ [2–4], причому

$$K(t,s)=M\xi(t),\overline{\xi(s)}=\langle \xi_t,\xi_s\rangle.$$

Таким чином, в рамках кореляційної теорії можна використовувати гільбертів підхід. Стаціонарному випадковому процесу відповідає крива в просторі H_ξ

$$\xi_t=e^{itA}\xi_0,$$

де A – самоспряжений, взагалі кажучи, необмежений оператор [2–4].

Стаціонарні випадкові процеси в гільбертовому просторі вивчались, починаючи з робіт А. Н. Колмогорова [5]. Гільбертів підхід був положений в основу побудування деяких класів нестаціонарних процесів в монографії М. С. Ліфшица і А. А. Янцевича [1] та інших працях [6–9]. Якщо розглянути рівняння для кореляційної функції $K(t,s)$ вигляду

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\frac{\partial K}{\partial s}=-\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}\varphi_\alpha(t)I_{\alpha\beta}\overline{\varphi_\alpha(s)},$$

де матриця I задовольняє умову

$$I=I^*,\ \frac{A-A^*}{i}=-\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}\varphi_\alpha(t)I_{\alpha\beta}\overline{\varphi_\beta(s)},$$

і розглянути криві ξ_t в просторі H_ξ, які задовольняють рівняння

$$\frac{d\xi_t}{dt} = iA\xi_t,$$

де вже $A \neq A^*$, то

$$-\left(\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial s}\right) = \left\langle 2\,\mathrm{Im}\,A^*\xi_t, \xi_s\right\rangle.$$

Тобто нестаціонарність випадкового процеса тісно пов'язана з відхиленням оператора A від свого спряженого A^* [1]. Використовуючи трикутну і універсальну моделі несамоспряжених операторів, можна отримати представлення для $K(t,s)$ у випадку нестаціонарного випадкового процесу, яке заміняє представлення Бохнера – Хінчина у випадку стаціонарних випадкових процесів.

Мета і завдання статті. Надалі $K(t,s)$ передбачається неперервною, також існують частинні похідні першого і другого порядку. В роботі В. А. Золотарьова і А. А. Янцевича [6] було запропоновано моделювати ξ_t в H_ξ за допомогою рівняння

$$\frac{d\xi_t}{dt} = iA\xi_t,$$

де $A(t)$ – сімейство операторів. Якщо $K(t,s)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial K}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial s} = 0,$$

то для $A(t)$ отримаємо операторне рівняння Ріккаті:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A^2 = B,\ A(0) = 0,\ A = A^*.$$

Випадок, коли $A(t) = A$, тобто не залежить від t, не розглядався. Дана стаття як раз і присвячена цьому випадку, причому $A \neq A^*$, а $K(t,s)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} = -\left(\frac{A^{*^2} - A^2}{i}\xi_t, \xi_s\right).$$

Якщо $K(t,s)$ може бути представлена у вигляді

$$K(t,s) = K_1(t+s) + K_2(t-s),$$

то

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} = 0;$$

у іншому випадку

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \neq 0.$$

Введемо функцію

$$W(t,s) = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial s^2}. \tag{1}$$

Назвемо $W(t,s)$ інфінітезимальною кореляційною функцією другого порядку. Надалі в якості ξ_t будемо розглядати еволюційно представлені криві ξ_t, які є розв'язками задачі Коші в гільбертовому просторі H_ξ [1, 9]

$$\frac{d\xi_t}{dt} = iA\xi_t,\ \xi_t\big|_{t=0} = \xi_0. \tag{2}$$

Тобто $\xi_t = e^{itA}\xi_0$, де e^{itA} – операторна експонента, яка може бути представлена в інтегральному вигляді:

$$e^{itA}\xi_0 = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma e^{\lambda t}\left(A - \lambda I\right)^{-1}\xi_0 d\lambda. \tag{3}$$

Тут γ – замкнений контур, що охоплює спектр оператора A [1, 3, 4].

Для таких кривих

$$W(t,s) = -i\left\langle \frac{A^2 - A^{*^2}}{i}\xi_t, \xi_s\right\rangle =$$

$$= -i\left\langle\left(A\frac{A - A^*}{i} + \frac{A - A^*}{i}A^*\right)\xi_t, \xi_s\right\rangle. \tag{4}$$

Якщо оператор A має одновимірну уявну компоненту [1], тобто

$$\frac{A - A^*}{i} = \langle\ ; g\rangle g, \tag{5}$$

де g – каналовий елемент оператора A [1], то

$$W(t,s) = -\frac{1}{i}\left\langle\left[\langle\xi_t, Ag\rangle g + \langle\xi_t, g\rangle Ag\right], \xi_s\right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{i}\sum_{\alpha,\beta}^{2} I_{\alpha\beta}\varphi_\alpha(t)\overline{\varphi_\beta(s)}, \tag{6}$$

де $g_1 = g$; $g_2 = Ag$;

$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – інволюція [1].

Розглянемо спочатку випадок, коли g є власним вектором оператора A, тобто $Ag = \lambda g$. Тоді

$$W(t,s) = -2\beta_0\varphi(t)\overline{\varphi(s)}, \tag{7}$$

де

$$\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0,\quad \varphi(t) = \left\langle e^{iAt}\xi_0, g\right\rangle.$$

Якщо A є дисипативним оператором з дискретним спектром [1], то

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{0k}\Lambda_k(t), \tag{8}$$

де

$$\Lambda_k = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \sqrt{2\operatorname{Im}\lambda_k}\,\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\lambda_j-\lambda}{\overline{\lambda_j}-\lambda}d\lambda$$

– так звана спеціальна Λ-функція [1].

Якщо $\{\lambda_j\}$ задовольняють умову [10]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j-\lambda_k|}<\infty, \tag{9}$$

то $\varphi(e)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{i\lambda_k t}$.

Якщо $Ag\neq\lambda g$, то

$$\varphi_1(t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{0k}\Lambda_k(t),$$

а для $\varphi_2(t)$ маємо вираз

$$\varphi_2(t)=\left\langle e^{itA}\xi_0, Ag\right\rangle=\left\langle \xi_0, e^{itA^*}Ag\right\rangle.$$

Далі,

$$Ag=iA^*g+i\langle g,g\rangle g=iA^*g+\|g\|^2 g$$

(це співвдношення випливає з умови операторного вузла [1]),

$$\frac{A-A^*}{i}=\langle\ ,g\rangle g.$$

Таким чином,

$$\varphi_2(t)=\left\langle \xi_0, e^{itA^*}\left(iA^*g+\|g\|^2 g\right)\right\rangle=\left\langle \xi_0, e^{itA^*}iA^*g\right\rangle-\|g\|^2\left\langle \xi_0, e^{itA^*}g\right\rangle=$$

$$=i\frac{d}{dt}\left\langle \xi_0, e^{itA^*}g\right\rangle+i\|g\|^2\left\langle \xi_0, e^{itA^*}g\right\rangle.$$

Отже,

$$\varphi_2(t)=\left(-i\frac{d}{dt}+i\|g\|^2\right)\varphi_1(t)=\left(-i\frac{d}{dt}+i\|g\|^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}f_{0k}\Lambda_k(t),$$

якщо виконується умова (9).

Хай тепер $H_\xi=L^2_{[0,l]}$ [3, 4], а оператор A має вигляд

$$Af(x)=i\int_x^l f(y)dy. \tag{10}$$

Тоді

$$Af^*(x)=-\int_0^x f(y)dy,$$

і

$$\frac{A-A^*}{i}f=\langle f,g\rangle_{L^2_{[0,l]}}g,$$

де $g\equiv 1$ [1].

У цьому випадку

$$\varphi_1(t)=\left\langle e^{itA}\xi_0, g_1\right\rangle=\int_0^l \xi_0(y)I_0(2\sqrt{ty})dy,$$

де $I_0(z)$ – модіфікована функція Бесселя нульового порядку [1].

$$\varphi_2(t)=\left\langle e^{itA}\xi_0, g_2\right\rangle=\left\langle \xi_0, ie^{-itA^*}(x-l)g_2\right\rangle_{L^2_{[0,l]}}=$$

$$=-il\varphi_1(t)+i\left\langle \xi_0, e^{-itA^*}x\right\rangle_{L^2_{[0,l]}}=-il\varphi_1(t)+i\varphi_2(t),$$

де

$$\varphi_2(t)=\left\langle \xi_0, e^{-itA^*}x\right\rangle.$$

Далі,

$$e^{-itA}x=-\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma e^{itA}(A^*-\lambda I)^{-1}xd\lambda,$$

$$=\langle\ ,e\rangle e+\langle U^*,e\rangle U^*e=\langle\ ,g_1\rangle g_1+\langle\ ,g_2\rangle g_2,$$

$$\left(A^*-\lambda I\right)^{-1}x=h(x,\lambda),$$

$$x=A^*h-\lambda h,$$

звідки

$$1=-h(x,h)-\lambda h'(x,\lambda),\ h(0)=0.$$

Отже,

$$h(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{-\frac{1}{\lambda}(x-y)}dy\left|\frac{y}{\lambda}=u\right|=-e^{-\frac{i}{\lambda}x}\int_0^x e^{iu}du=-\frac{(1-e^{-\frac{i}{\lambda}x})}{i}.$$

Тоді

$$e^{-itA^*}x=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma -\frac{1}{i}e^{it\lambda}\left(1-e^{-\frac{i}{\lambda}x}\right)d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma e^{-\left(it\lambda+i\frac{x}{\lambda}\right)}d\lambda.$$

Використовуючи теорію лишків, остаточно отримаємо:

$$e^{-tA^*}x=-I_0(\sqrt{2xt}).$$

Таким чином,

$$\varphi_2(t)=-\frac{1}{i}\int_0^l \xi_0(y)I_0(2\sqrt{ty})dy=-\frac{1}{i}\varphi_1(y).$$

Шляхи подальших досліджень. Використовуючи універсальні моделі дисипативних операторів, можна отримати подання для $W(t,s)$ у випадку, коли [11]

$$\dim\overline{\frac{A-A^*}{i}H}=r<\infty.$$

Аналогічний підхід можна використовувати для еволюційно представимих нестаціонарних послідовностей в гільбертовому просторі, коли

$$\xi_n = T^n \xi_0,$$

де T – обмежений оператор , причому

$$\dim \overline{(I - T^* T) H} = r < \infty.$$

При цьому кореляційна різниця $W(n,m)$ визначається як

$$W(n,m) = K(n,m) - K(n+2, m+2) = \left\langle \left(I - T^{*^2} T^2 \right) \xi_n, \xi_m \right\rangle.$$

Якщо

$$I - T^* T = \langle \, , e \rangle e,$$

то

$$I - T^{*^2} T^2 = I - T^* T + T^* (I - T^* T) T =$$
$$= \langle \, , e \rangle e + \left\langle U^*, e \right\rangle U^* e = \langle \, , g_1 \rangle g_1 + \langle \, , g_2 \rangle g_2,$$

де

$$g_1 = e, \; g_2 = U^* e.$$

Як і для випадкових процесів, кореляційна функція $K(n,m)$ визначається як скалярний добуток в просторі H_ξ:

$$K(m,n) = \langle \xi_m, \xi_n \rangle_{L^2_{[0,l]}} .$$

Тоді

$$W(n,m) = \Phi_1(n) \overline{\Phi_1(m)} + \Phi_2(n) \overline{\Phi_2(m)},$$

де

$$\Phi_1(n) = \left\langle \xi_0, T^{*^n} g \right\rangle,$$
$$\Phi_2(n) = \left\langle \xi_0, T^{*^{n+1}} g \right\rangle = \Phi_2(n+1).$$

Використовуючи трикутну і універсальні моделі операторів стиску, можна отримати подання $\Phi_1(n)$ для різних випадків спектра [7, 12].

Висновки. В роботі отримано вираз для інфінітезимальної функції для різних випадків спектра. Якщо A є дисипативним оператором з дискретним спектром, то функція $W(t,s)$ може бути виражена через спеціальну Λ-функцію. В гільбертовому просторі $L^2_{[0,l]}$ інфінітезимальна функція виражається через спеціальну модіфіковану функцію Бесселя нульового порядку. Також розглядається можливість використання гільбертового підхіда для еволюційно представимих послідовностей.

Автор виражає подяку проф. А. А. Янцевичу за постановку задачі, допомогу і консультації.

Список використаної літератури

1. Livshitz M. S., Yantsevich A. A. *Operator colligations in Hilbert spaces.* .New-York: John Wiley and Sons, 1979. 226 p.
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*. Харьков: Вища школа, 1978. Т. 2. 288 с.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва: Наука, 1968. 492 с.
4. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу*. Москва: Мир, 1979. 587 с.
5. Kolmogorov A. N. Stationary sequences in Hilbert spaces. *Buyll. Mosk. Gos. Univ*. 1941. Vol. 2, no. 6. P. 1–40.
6. Золотарев В. А., Янцевич А. А. Нестационарные кривые в гильбертовом пространстве и нелинейные операторные уравнения. *Теория операторов субгармонических функций*. Киев: Наукова думка, 1991. С. 54–59.
7. Yantsevich A. A. Nonstationary sequences in Hilbert space. Correlation Theory. *Journal of Soviet Mathematics*. 1990. Vol. 48, no. 4. P. 440–443.
8. Yantsevich A. A. The application of operator colligations to the investigation of nonstationary random processes and sequences. *Materials of the All-Union Simposium on Random Processes*. Kyiv, 1973. P. 229–232.
9. Петрова А. Ю. Корреляционная теория некоторых классов случайных функций конечного ранга нестационарности. *Радиоэлектроника и информатика*. 2007. № 1. С. 67–71.
10. Кацнельсон В. Э. Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов. *Функциональный анализ и его приложения*. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 39–51.
11. Hatamleh R. On a class of nonhomogeneous fields in Hilbert space. *Journal of. Mathematics and Statistics*. 2007. Vol. 3, no. 4. P. 207–210.
12. Золотарев В. А. *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов*. Харьков: Изд-во ХНУ, 2003. 342 с.

References (transliterated)

1. Livshitz M. S., Yantsevich A. A. *Operator colligations in Hilbert spaces.* New-York, John Wiley and Sons, 1979. 226 p.
2. Akhiyezer N. I., Glazman I. M. *Teoriya lineynykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [The theory of linear operators in Hilbert space]. Kharkov, Vischa Shkola Publ., 1978, vol. 2. 300 p.
3. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementi teoriy funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of function theory and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 492 p.
4. Riesz F. , Sz. – Nagy B. *Functional analysis.* 6th Revised ed. Budapest, 1972, 587 p. (Russ. ed.: Riesz F. , Sz. – Nagy B. *Lektsii po functional'nomu analizu.* Moscow, Mir Publ., 1979. 587 p.).
5. Kolmogorov A. N. Stationary sequences in Hilbert spaces. *Buyll. Mosk. Gos. Univ*. 1941, vol. 2, no. 6, pp. 1–40.
6. Zolotarev V. A., Yantsevich A. A. Nestatsionarnyye krivyye v gil'bertovom prostranstve i nelineyynyye operatornyye uravneniya [The nonstationary curves in Hilbert space and nonlinear operator equations]. *Teoriya operatorov subgarmonicheskikh funksiy* [The theory of the operators of subharmonic functions]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1991, pp. 54–59.
7. Yantsevich A. A. Nonstationary sequences in Hilbert space. Correlation Theory. *Journal of. Soviet Mathematics.* 1990, vol. 48, no. 4, pp. 440–443.
8. Yantsevich A. A. The application of operator colligatioins to the investigation of nonstationary random processes and sequences. *Materials of the All-Union Simposium on Random Processes*. Kyiv, 1973, pp. 229–232.
9. Petrova A. Yu. Korrelyatsyonnaya teoriya nekotorikh klassov sluchaynykh funksiy konechnogo ranga nestatsionarnosti [The correlation theory of some classes of functions of final rank of nonstationarity]. *Radioelektronika i Informatika.* 2007, vol. 1, pp. 67–71.
10. Katsnelson V. E. Ob usloviyakh bazisnosti sistemy kornevykh vektorov nekotorikh klassov operatorov [On the base conditions of the system root vektors of some classes of operators]. *Functional'nyy analiz i yego prilozheniya*. 1967, vol. 1, issue 2, pp. 39–51.

11. Hatamleh R. On a class of nonhomogeneous fields in Hilbert space. *Journal of Mathematics and Statistics*. 2007, vol. 3, no. 1, pp. 207–210.
12. Zolotarev V. A. *Analiticheskiye metody spektral'nykh predstavleniy nesamosopryadzennykh i neunitarnykh operatorov* [The analytical methods of spectral representation of nonselfajoint and nonunitary operators]. Kharkov, KhNU Publ., 2003, 342 p.

Надійшла (received) 09.11.2023

UDC 513.88

A. A. BOEVA, Candidate of Physical and Mathematical Sciences (PhD), National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of Computer Mathematics and Data Analysis, Kharkiv, Ukraine; e-mail: annaboeva19@gmail.com; ORCID: http://orcid.org/0009-0001-3355-8460H

ON A CLASS OF NONSTATIONARY CURVES IN HILBERT SPACE

Stationary random processes have been studied quite well over recent years starting with the works of A. N. Kolmogorov. The possibility of building nonstationary random process correlation theory was considered in the monographs by M. S. Livshits, A. A. Yantsevich, V. A. Zolotarev and others. Some classes of nonstationary curves were investigated by V. E. Katsnelson. In this paper nonstationary random processes are represented as curves in Hilbert space which "slightly deviate" from random processes with the correlation function of special kind. The infinitesimal correlation function has been introduced; in essence, this function characterizes the deviation from the correlation process with the given correlation function. The paper discusses the cases of nonstationary random processes, the operator of which has one-dimensional imaginary component. Cases of a dissipative operator with descrete spectrum are also considered in this work. It is shown that the nonstationarity of the random process is closely related to the deviation of the operator from its conjugated operator. Using the triangle and universal models of non-self-ajoint operators it is possible to obtain the representation for the correlation function in the case of nonstationary process which replaces the Bochner – Khinchin representation for stationary random processes. The expresson for the infinitesimal correlation function was obtained for different cases of operator spectrum: for the descrete spectrum placed in the upper half-plane and for the contrast-free spectrum at zero. In the case of dissipative operator with descrete spectrum the infinitesimal function can be found in terms of special lambda function. For Lebesque spaces of compex-valued squared integratable functions the expresson of infinitesimal function was found in terms of special zero order modified Bessel function. It was shown that a similar approach can be applied for the evolutionarily represented sequences in Hilbert spaces.

Keywords: Hilbert space, nonstationary random processes, correlational function, infinitesimal function, conjugate operator, dissipative operator, operator spectrum, dissipative spectrum, contrast-free spectrum.

Повні імена авторів / Author's full name

Автор 1 / Author 1: Боєва Анна Анатоліївна, Boeva Anna Anatoliivna