

А. С. КУЦЕНКО, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;

С. В. КОВАЛЕНКО, ст. преподаватель, НТУ «ХПИ»

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ МЕРА УСТОЙЧИВОСТИ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Пропонується підхід до кількісної оцінки стійкості лінійних динамічних систем, заснований на множинному інтегральному квадратичному функціоналі, обчисленому на ансамблі перехідних процесів стійкої системи. Як міра стійкості пропонується використовувати час досягнення множинним інтегральним функціоналом заданого значення.

Предлагается подход к количественной оценке устойчивости линейных динамических систем, основанный на множественном интегральном квадратичном функционале, вычисленном на ансамбле переходных процессов устойчивой системы. В качестве меры устойчивости предлагается использовать время достижения множественным интегральным функционалом заданного значения.

An approach to quantifying the stability of linear dynamic systems, based on the multiple integral quadratic functional, computed on an ensemble of transient of stable system is suggested in the article. The time to reach of a multiple integral functional to setpoint is suggested to use as a measure of stability.

Введение. Классическая теория устойчивости динамических систем, сформулированная А.М. Ляпуновым, не в полной мере удовлетворяет практическим требованиям специалистов в области создания систем автоматического управления. Это связано с тем, что, несмотря на выполнение условий устойчивости, синтезированные системы могут не удовлетворять элементарным практическим требованиям к переходным процессам. К последним относятся: время переходного процесса, перерегулирование, колебательность и т.п. В связи с этим, для одномерных систем автоматического управления предложены различные «инженерные» или прямые критерии количественной оценки качества переходных процессов. Вместе с тем прямые критерии качества переходных процессов не могут быть непосредственно использованы в качестве количественной меры устойчивости динамических систем. Это обусловлено тем, что в общем случае, как это предусмотрено теорией устойчивости, начальные отклонения возмущенной системы от положения равновесия могут быть произвольными по величине и направлению и приводить к принципиально различным классам переходных процессов в зависимости от вектора начального отклонения. Так, если среди собственных чисел линейного оператора динамической системы простой структуры, имеются вещественные и комплексно-сопряженные, то пространство состояний R^n можно представить в виде прямой суммы $R^n = R^l \oplus R^{n-l}$, где R^l – инвариантное

подпространство, натянутое на собственные векторы оператора системы, соответствующие вещественным собственным числам, а R^{n-l} – комплексно-сопряженным.

Таким образом, в случае начального отклонения $x_0 \in R^l$, любая фазовая траектория системы $x(t) \in R^l \quad \forall t \in (0, \infty)$ будет иметь чисто экспоненциальную структуру вида:

$$x(t) = \sum_{k=1}^l C_k e^{\lambda_k t} \quad (1)$$

где λ_k – вещественные собственные числа линейного оператора динамической системы, C_k – произвольные постоянные.

Если же $x_0 \in R^{n-l}$, то и $x(t) \in R^{n-l} \quad \forall t \in (0, \infty)$ будет иметь колебательную структуру вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\left(\frac{n-l}{2}\right)} e^{\alpha_k t} (A_k \sin \beta_k t + B_k \cos \beta_k t), \quad (2)$$

где $\alpha_k \pm i\beta_k$ – комплексно-сопряженные собственные числа, A_k и B_k – произвольные постоянные.

Исходя из разнообразия возможных переходных процессов можно сделать заключение о том, что если вектор x_0 имеет ненулевые проекции на R^l и R^{n-l} , то в зависимости от величины этих проекций в переходном процессе будут превалировать те или иные компоненты (1), (2), обусловленные величинами коэффициентов C_k , A_k , B_k , которые, в свою очередь, однозначным образом определяются из начальных условий x_0 .

Таким образом, для количественной оценки меры устойчивости динамической системы необходимо рассмотреть ансамбль переходных процессов, обусловленный некоторым достаточно представительным множеством начальных отклонений X_0 .

Очевидно, что для какой-либо численной оценки поведения ансамбля переходных процессов в целом необходимо иметь достаточно простой метод оценки каждого локального переходного процесса, входящего в рассматриваемое множество. В этом смысле наиболее удачной следует считать численную оценку возмущенного движения устойчивой линейной системы, на основе интегральных квадратичных функционалов (ИКФ). Этот подход, а также тесно связанная с ним линейно-квадратичная задача

оптимального управления (ЛКЗ) являются одними из фундаментальных в теории управления.

Причиной этому следует считать, прежде всего, математическую и практическую обоснованность постановки ЛКЗ для многомерных систем автоматического управления. Вторым немаловажным обстоятельством является возможность решения ЛКЗ на основе применения достаточно простых численных методов, а в ряде случаев, и в аналитической форме. В то же время имеет место ряд принципиальных проблем, ограничивающих практическое использование ЛКЗ. К разряду этих проблем следует отнести, прежде всего, проблему выбора коэффициентов матриц квадратичных форм ИКФ. Другим ограничительным моментом следует считать отсутствие инженерной трактовки абсолютной величины квадратичного критерия качества в отличие от принятых на практике прямых показателей качества переходных процессов одномерных систем. В традиционной постановке ЛКЗ оптимального управления, указанные выше проблемы очевидным образом взаимосвязаны, поскольку выбор величин коэффициентов ИКФ, известным образом влияет на величину последнего. Если еще учесть и тот факт, что величина ИКФ зависит от вектора начальных отклонений динамической системы от положения равновесия, то вопрос о практической значимости ЛКЗ максимальным образом обостряется.

Целью настоящей работы является обоснование метода получения количественной оценки устойчивости линейной динамической системы на основе интегрального квадратичного критерия качества, имеющего наглядную практическую интерпретацию.

Алгоритм определения ИКФ ансамбля переходных процессов. Рассмотрим зависимость величины интегрального квадратичного критерия качества от времени, прошедшего с начала переходного процесса. Т.е. найдем зависимость

$$J(t) = \int_t^{\infty} x^T(\tau) Q x(\tau) d\tau,$$

где Q – положительная симметрическая матрица квадратичной формы, которую можно интерпретировать как квадрат некоторой нормы вектора состояния $x \in R^n$ линейной стационарной, динамической системы.

На основании вида функции $J(t)$, стремящейся к нулю на бесконечности для устойчивых систем, могут быть построены различные оценки качества ансамбля переходных процессов, подобные прямым критериям качества переходных процессов одномерных систем автоматического управления.

Известно, [1], что функцию $J(t)$ можно вычислить по следующей формуле:

$$J(t) = x^T(t) S x(t), \quad (3)$$

где матрица S является решением матричного уравнения Ляпунова

$$A^T S + SA + Q = 0, \quad (4)$$

а $x(t)$ – решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0,$$

которое может быть представлено в виде

$$x(t) = e^{At} x(0). \quad (5)$$

С учетом соотношения (5) выражение (3) для $J(t)$ может быть записано как

$$J(x_0, t) = x^T(0) e^{A^T t} S e^{At} x(0) = x_0^T P(t) x_0, \quad (6)$$

где обозначение $J(x_0, t)$ – отражает зависимость критерия (3) от вектора начальных отклонений x_0 .

В свою очередь, матрица

$$P(t) = e^{A^T t} S e^{At}$$

является решением линейного матричного дифференциального уравнения

$$\dot{P} = A^T P + PA, \quad P(0) = S. \quad (7)$$

Таким образом, для нахождения функции $J(x_0, t)$ необходимо решить уравнение Ляпунова (4) относительно матрицы S и, приняв ее за начальное условие, решить матричное дифференциальное уравнение (7).

Как было отмечено ранее, вид переходного процесса, а следовательно, и величина ИКФ в значительной мере зависят от начального отклонения системы от положения равновесия. В связи с этим для количественной оценки степени устойчивости будем рассматривать интегральный показатель ансамбля переходных процессов на множестве X_0 допустимых начальных отклонений

$$\bar{J}(t) = \int_{X_0} J(x_0, t) dX_0. \quad (8)$$

Найдем величину (8) для случая, когда X_0 представляет собой единичный шар:

$$X_0 = \{x_0 \in X_0 \mid x_0^T x_0 \leq 1\}.$$

Тогда выражение (8) с учетом (6) примет вид

$$\bar{J}(t) = \int_{X_0} x_0^T P(t) x_0 dX_0. \quad (9)$$

Из теории квадратичных форм известно, что существует ортогональное преобразование координат

$$x = Ty \quad (10)$$

такое, что квадратичная форма под знаком интеграла в выражении (9) примет диагональный вид

$$y_0^T \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] y_0,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы $P(t)$, являющиеся функциями времени.

Поскольку преобразование (10) ортогонально, то единичная сфера X_0 в координатах x отобразится в единичную сферу Y_0 в координатах y . Таким образом, (9) можно записать в виде

$$\bar{J}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \int_{Y_0} y_{0i}^2 dY_0. \quad (11)$$

Очевидно, что величина интеграла в выражении для $\bar{J}(t)$ (11) не зависит от индекса i . Окончательно

$$\bar{J}(t) = J_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) = J_0 \text{tr} P(t),$$

где $J_0 = \int_{Y_0} y_{01}^2 dY_0 = \int_{Y_0} y_{02}^2 dY_0 = \dots = \int_{Y_0} y_{0n}^2 dY_0$ – постоянная, зависящая только от размерности n .

Величину постоянной J_0 легко определить, воспользовавшись формулой Дирихле для вычисления кратных интегралов по гиперсферической области [2]:

$$J_0 = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(2 + \frac{n}{2}\right)}.$$

Таким образом, функцию времени $\bar{J}(t)$ можно рассматривать в качестве некоторого интегрального переходного процесса на множестве всевозможных начальных возмущений, расположенных внутри единичной сферы.

В качестве безразмерной характеристики множественного переходного процесса удобно рассматривать функцию $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \frac{\bar{J}(t)}{J(0)} = \frac{trP(t)}{trS}.$$

Нетрудно видеть, что $\sigma(t)$ для устойчивой системы представляет собой невозрастающую функцию времени, удовлетворяющую условиям $\sigma(0)=1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t)=0$. По отношению к $\sigma(t)$ можно ввести ее количественную характеристику аналогичную времени переходного процесса для одномерных САУ, а именно: время τ за которое величина σ достигает наперед заданной величины ε . Эту величину и будем в дальнейшем ассоциировать с количественной мерой устойчивости.

Численные эксперименты. Предложенный подход к количественной оценке устойчивости на основе ИКФ был апробирован применительно к динамическим системам 2 и 3-го порядков. Основной целью численных экспериментов был анализ поведения функции $\sigma(t)$ в зависимости от матрицы Q весовых коэффициентов ИКФ. При проведении численных экспериментов было выбрано каноническое представление матриц системы и критерия. В этом случае матрицы A и Q имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & 0 & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & q_n \end{pmatrix},$$

где коэффициенты a_1, \dots, a_n удовлетворяют условиям устойчивости Гурвица, а q_1, q_2, \dots, q_n – условиям нормировки $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ и положительной определенности $q_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

На рис. 1 приведены графики интегральных переходных процессов $\sigma(t)$ для систем 2-го и 3-го порядков при различных значениях коэффициентов q_k .

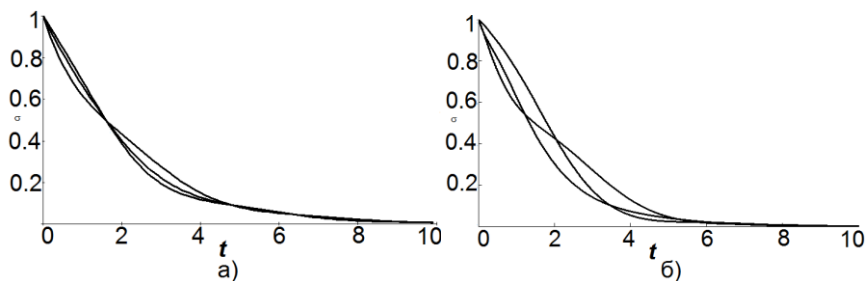


Рис. 1 – Интегральные переходные процессы для систем а) 2–го б) 3–го порядков при различных весовых коэффициентах

В таблице приведены значения времени интегральных переходных процессов, соответствующие $\varepsilon = 0,01$.

Значения времени интегральных переходных процессов

Порядок системы n	Весовые коэффициенты			Время переходного процесса τ
	q_1	q_2	q_3	
2	0.1	0.9	-	9.2
2	0.5	0.5	-	9.1
2	0.9	0.1	-	8.9
3	0.1	0.1	0.8	7.06
3	0.8	0.1	0.1	7.51
3	0.1	0.8	0.1	7.36

Обсуждение результатов. Как видно из результатов численных экспериментов, иллюстрируемых рисунком и таблицей, можно сделать предварительное заключение о том, что интегральные переходные процессы в малой степени зависят от выбора коэффициентов ИКФ. Поскольку время переходного процесса τ незначительно изменяется при различных матрицах ИКФ, то эта величина может быть принята в качестве количественной меры устойчивости.

Список литературы: 1. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю. Н. Андреев – М. : Наука, 1976. – 424 с. 2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3 / Г. М. Фихтенгольц – М. : ОГИЗ – Гостехиздат, 1949. – 783 с.

Надійшла до редколегії 05.02.2012