

А. С. КУЦЕНКО, д-р техн. наук, проф., зав. каф. НТУ «ХПИ»;
М. Л. ЛЮБЧИК, аспирант НТУ «ХПИ»

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ИНТЕРВАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ФИНАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Розглядається задача побудови інтервальних оцінок фінальних розподілів ймовірностей станів невизначених ланцюгів Маркова. Пропонується обчислювальний алгоритм, заснований на використанні регуляризованого методу множників Лагранжу.

Рассматривается задача построения интервальных оценок финальных распределений вероятностей состояний неопределенных цепей Маркова. Предлагается вычислительный алгоритм, основанный на применении регуляризованного метода множителей Лагранжа.

The problem of interval estimations design for uncertain Markov chains state probabilities final distribution is considered. The computational algorithm based on regularized Lagrange multipliers method is proposed.

Введение. Марковские цепи находят широкое применение в задачах математического моделирования технических и социальных систем, в частности, моделирования процессов страхования. Исследование марковской модели включает в себя в качестве одной из основных составляющих вычисление финальных векторов вероятностей состояний. Указанная задача значительно усложняется в том случае, когда переходная матрица марковской цепи в точности неизвестна, и задана лишь область возможных значений ее элементов. Для анализа таких цепей Маркова, называемых неопределенными, в последнее время широко применяется математический аппарат интервального анализа [1,2]. Сложность решения задачи интервального оценивания финального вектора связана с наличием стохастических ограничений на переменные. В настоящей работе предлагается новый подход к численному решению задачи построения интервальных оценок финальных распределений вероятностей состояний неопределенных цепей Маркова на основе регуляризованного метода множителей Лагранжа.

Постановка задачи интервального оценивания финальных вероятностей. Рассмотрим однородную цепь Маркова с множеством состояний $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ и матрицей вероятностей переходов $\Pi = \|\pi_{ij}\|$,

$$\pi_{ij} = \mathbf{P}\{x(n+1) = \omega_j | x(n) = \omega_i\},$$

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad \pi_{ij} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где $x(n) \in \Omega$ – состояние цепи Маркова в дискретный момент времени n .

Будем называть цепь Маркова (1) *неопределенной*, если точное значение элементов матрицы переходов $\Pi = \|\pi_{ij}\|$ неизвестно, а задано лишь множество их возможных значений (множество неопределенности переходной матрицы)

$$\Pi \in \mathbf{U}_{\Pi} = \{\pi_{ij} \mid 0 < \pi_{ij}^- \leq \pi_{ij} \leq \pi_{ij}^+ < 1, \quad i, j = \overline{1, N}\}. \quad (2)$$

Пусть все элементы множества неопределенности (2) являются стохастическими матрицами (1), удовлетворяющими условию эргодичности. Тогда для каждой матрицы переходов $\Pi \in \mathbf{U}_{\Pi}$ существует финальный вектор стационарного распределения вероятностей состояний $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)^T$,

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{x(n) = \omega_i\}, \quad i = \overline{1, N}, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

удовлетворяющий известным условиям

$$p^T (\Pi - I_N) = e^N, \quad p^T e^N = 1, \quad p \geq 0, \quad (4)$$

где I_N – единичная $(N \times N)$ матрица, $e^N = (1, 1, \dots, 1)^T$.

Примем в качестве *интервальной оценки* финального вектора цепи Маркова параллелепипед $\mathbf{I}_p = \{p \mid 0 < p_i^- \leq p_i \leq p_i^+ < 1, \quad i = \overline{1, N}\}$, параметры которого $\{(p_i^-, p_i^+)\}$, соответствующие множеству неопределенности переходной матрицы \mathbf{U}_{Π} (2), определяются решениями следующего набора $2N$ задач математического программирования:

$$\begin{aligned} p_i^+ &= \max_p p^T e^i, \quad p_i^- = \min_p p^T e^i, \quad e^i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_i^T, \quad i = \overline{1, N}, \\ p^T (\Pi - I_N) &= e^N, \quad p^T e^N = 1, \quad p \geq 0, \quad (\Pi - I_N) e^N = 0, \quad \Pi \in \mathbf{U}_{\Pi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, построение интервальной оценки \mathbf{I}_p сводится к решению $2N$ однотипных задач математического программирования (5) с линейными оптимизируемыми функциями, билинейными ограничениями типа равенств и ограничениями типа неравенств на переменные p_i, π_{ij} .

Решение задачи на основе регуляризованного метода множителей Лагранжа. Для решения каждой задачи математического программирования из набора (5) введем соответствующую функцию Лагранжа, включающую в себя ограничения типа равенств

$$L(\bar{p}, \bar{\lambda}) = \pm p^T d + \sum_{j=1}^N \lambda_j (p^T \pi^j - p^T e^j) + \nu^T (\sum_{j=1}^N \pi^j - e^N), \quad (6)$$

где $d = e^i$ при нахождении p_i^- , $i = \overline{1, N}$ и $d = -e^i$ при нахождении p_i^+ ,

$\{\pi^j\}_{j=1}^N$ – столбцы матрицы вероятностей переходов Π ,

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)^T$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N)^T$ – векторы множителей Лагранжа,

$\bar{p} = \text{colon}(p, \pi^1, \dots, \pi^N)$, $\bar{\lambda} = \text{colon}(\lambda, \nu)$.

Известно [3], что задача условной оптимизации вида (5) эквивалентна задаче нахождения седловой точки функции Лагранжа (6) $L(\bar{p}, \bar{\lambda})$, $\bar{\lambda} \in \mathbf{R}^{2N}$ на выпуклом множестве ограничений

$$\bar{p} \in \bar{\mathbf{S}}_{\bar{p}} = \mathbf{S}^N \times \mathbf{P}_{\pi}^1 \times \dots \times \mathbf{P}_{\pi}^N, \quad (7)$$

где \mathbf{R}^m – m -мерное евклидово векторное пространство ($m = 2N$),

$\mathbf{S}^N = \{p \mid p^T e^N = 1, p \geq 0\}$ – N -мерный симплекс,

$\mathbf{P}_{\pi}^j = \{\pi^j \mid \pi_{ij}^- \leq \pi_{ij} \leq \pi_{ij}^+\}$, $i, j = \overline{1, N}$.

Таким образом, для оптимальности вектора $\bar{p}^* \in \bar{\mathbf{S}}_{\bar{p}}$, т.е. для того, чтобы он являлся решением задачи математического программирования (5), необходимо и достаточно, чтобы для некоторого вектора множителей Лагранжа $\bar{\lambda}^* \in \mathbf{R}^{2N}$ и любых $\bar{p} \in \bar{\mathbf{S}}_{\bar{p}}$ и $\bar{\lambda} \in \mathbf{R}^{2N}$ выполнялись неравенства

$$L(\bar{p}^*, \bar{\lambda}) \leq L(\bar{p}^*, \bar{\lambda}^*) \leq L(\bar{p}, \bar{\lambda}^*). \quad (8)$$

Для нахождения седловой точки (8) функции Лагранжа (6) на множестве ограничений (7) можно воспользоваться проекционной модификацией итеративного вычислительного алгоритма Эрроу–Гурвица–Удзавы [4] с использованием в качестве векторов движений по переменным $(\bar{p}, \bar{\lambda})$ градиентов функции $L(\bar{p}, \bar{\lambda})$ по этим переменным. Однако, как отмечалось в [5], соответствующий вычислительный алгоритм для функции Лагранжа (6) будет неустойчив, что является следствием наличия в ее структуре билинейных слагаемых.

Для преодоления этой трудности, в соответствии с предложенной в [5] методикой, воспользуемся регуляризованной модификацией функции Лагранжа, зависящей от параметра регуляризации $\delta > 0$

$$L_{\delta}(\bar{p}, \bar{\lambda}) = L(\bar{p}, \bar{\lambda}) + \frac{\delta}{2} (\|\bar{p}\|^2 - \|\bar{\lambda}\|^2). \quad (9)$$

Седловая точка функции (9) ищется на множестве регуляризованных ограничений $\bar{\mathbf{S}}_p^\varepsilon$ вида (7), в которых вместо симплекса \mathbf{S}_p используется так называемый ε -симплекс $\mathbf{S}_\varepsilon^N = \{p \mid p \in \mathbf{S}^N, p_i \geq \varepsilon, i = \overline{1, N}\}$, $\varepsilon \in [0, N^{-1}]$.

Очевидно, что регуляризованная функция Лагранжа (9) строго выпукла по переменным \bar{p} при любых $\bar{\lambda}$ и строго вогнута по переменным $\bar{\lambda}$ при любых \bar{p} , что гарантирует существование у нее единственной седловой точки на множестве ε -ограничений $\{\bar{p} \in \bar{\mathbf{S}}_p^\varepsilon = \mathbf{S}_\varepsilon^N \times \mathbf{P}_\pi^1 \times \dots \times \mathbf{P}_\pi^N, \bar{\lambda} \in \mathbf{R}^{2N}\}$ и устойчивость соответствующей вычислительной процедуры ее поиска [5,6].

При этом в силу непрерывной зависимости решения регуляризованной задачи $(\bar{p}_{\varepsilon, \delta}^*, \bar{\lambda}_{\varepsilon, \delta}^*)$ от параметров регуляризации (ε, δ) , при достаточно малых значениях параметров (ε, δ) указанное регуляризованное решение в свою очередь будет достаточно близко к решению $(\bar{p}^*, \bar{\lambda}^*)$ исходной задачи.

Вычислительный алгоритм нахождения интервальной оценки. Для построения алгоритма вычисления оптимальных интервальных оценок на основе нахождения седловой точки регуляризованной функции Лагранжа, запишем вначале определяющие указанную седловую точку условия, вычисляя градиенты функции (6), (9) по соответствующим векторам:

$$\begin{aligned} \nabla_p L_\delta(\bar{p}, \bar{\lambda}) &= d - (\Pi - I_N)\lambda + \delta p = 0, \\ \nabla_{\pi^k} L_\delta(\bar{p}, \bar{\lambda}) &= \lambda_k p + \upsilon = 0, \quad k = \overline{1, N}, \\ \nabla_\lambda L_\delta(\bar{p}, \bar{\lambda}) &= (\Pi - I_N)^T p - \delta \lambda = 0, \\ \nabla_\upsilon L_\delta(\bar{p}, \bar{\lambda}) &= (\Pi - I_N)e^N - \delta \upsilon = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Решение системы векторно-матричных билинейных уравнений (10) с учетом ограничений $\bar{p} \in \bar{\mathbf{S}}_p^\varepsilon$ может быть получено с помощью итеративного вычислительного алгоритма проекционного типа [4,5] с переменными параметрами регуляризации:

$$\begin{aligned} p(n+1) &= \text{Pr}_{\mathbf{S}_{\varepsilon(n)}^N} \left\{ p(n) - \gamma(n)[d - A(n)\lambda(n) + \delta(n)p(n)] \right\}, \\ \pi^j(n+1) &= \text{Pr}_{\mathbf{P}_\pi^j} \left\{ \pi^j(n) - \gamma(n)[\lambda_k(n)p(n) + \upsilon(n)] \right\}, \quad j = \overline{1, N}, \\ \lambda(n+1) &= \lambda(n) + \gamma(n)[A(n)^T p(n) - \delta(n)\lambda(n)], \\ \upsilon(n+1) &= \upsilon(n) + \gamma(n)[A(n)e^N - \delta(n)\upsilon(n)], \quad A(n) = \Pi(n) - I_N, \end{aligned} \tag{11}$$

где $(p(n), \pi^j(n), \lambda(n), \upsilon(n))$ – приближение к решению на n -том шаге,

$P(n)$ – квадратная матрица, составленная из столбцов $\pi^j(n)$, $j = \overline{1, N}$,
 $\{\varepsilon(n), \delta(n)\}$ – последовательность параметров регуляризации,
 $\{\gamma(n)\}$ – переменный коэффициент шага алгоритма.

Проекционные операторы $\text{Pr}_{S_{\varepsilon(n)}^N} \{ \cdot \}$, $\text{Pr}_{P_{\pi}} \{ \cdot \}$ действуют по правилам:

$$\text{Pr}_{S_{\varepsilon(n)}^N} \{ q \} = \arg \min_{p \in S_{\varepsilon(n)}^N} \| p - q \|^2, \quad q \in \mathbf{R}^N, \quad \text{Pr}_{P_{\pi}} \{ q \} = \bar{q} = (\bar{q}_1 \ \bar{q}_2 \ \dots \ \bar{q}_N)^T, \quad (12)$$

$$\bar{q}_i = q_i \text{ при } \pi_{ij}^- \leq q_i \leq \pi_{ij}^+, \quad \bar{q}_i = \pi_{ij}^- \text{ при } q_i < \pi_{ij}^-, \quad \bar{q}_i = \pi_{ij}^+ \text{ при } q_i > \pi_{ij}^+.$$

Выбор параметров алгоритма (12) в соответствии с условиями [5]

$$\gamma(n) > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\varepsilon(n), \delta(n)) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) / \delta(n) = \zeta < \infty \quad (13)$$

обеспечивает его сходимость к оптимальному решению $(\bar{p}^*, \bar{\lambda}^*)$.

Используя алгоритм (12) с набором векторов $d = \pm e^i$, $i = \overline{1, N}$, получим решения $2N$ оптимизационных задач (5), определяющие границы $\{(p_i^-, p_i^+)\}$, $i = \overline{1, N}$ интервальных оценок $p \in \mathbf{I}_p$ финальных распределений вероятностей состояний неопределенной марковской цепи.

В качестве окончательной оценки финального вектора, учитывающей симплексные ограничения, можно взять пересечение $\mathbf{I}_p^S \in \mathbf{I}_p \cap \mathbf{S}^N$.

Выводы. В данной работе предложен вычислительный подход к построению интервальной оценки финального распределения вероятностей состояний неопределенной цепи Маркова на основе сведения задачи интервального оценивания к решению специального набора задач нелинейного программирования. Преимуществом предложенного метода является простота вычислительного алгоритма и возможность обеспечения его устойчивости путем реализации процедуры динамической регуляризации. Дальнейшее развитие такого подхода связано с возможностью использования множеств неопределенности переходной матрицы различной структуры.

Список литературы: 1. *Skulj D.* Finite discrete time Markov chains with interval probabilities / *D. Skulj* // *Soft Methods for Integrated Uncertainty Modeling*. – Springer–Verlag. – 2006. – P. 299–306. 2. *Kozine I. O.* Interval-valued finite Markov chains / *I. O. Kozine, L. V. Utkin* // *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, No. 2. – P. 97–113. 3. *Зангвилл У. И.* Нелинейное программирование / *У. И. Зангвилл*. – М.: Сов. Радио, – 1973. – 226 с. 4. *Эрроу К. Дж.* Исследования по линейному и нелинейному программированию / *К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава*. – М. : Иностран. лит. – 1962. – 345 с. 5. *Назин А. В.* Адаптивный выбор вариантов / *А. В. Назин, А. С. Позняк*. – М. : Наука. – 1986. – 128 с. 6. *Беленький В. З.* Итеративные методы в теории игр и программировании / *В. З. Беленький, В. А. Волконский*. – М. : Наука, – 1974. – 324 с.