УДК 517.935

Ю. И. ДОРОФЕЕВ, канд. техн. наук, доц. каф. САиУ НТУ «ХПИ»;
А. А. НИКУЛЬЧЕНКО, аспирант НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЕТЕЙ ПОСТАВОК КАК ОБЪЕКТОВ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

У статті розглядається побудова «розширеної» і «миттєвої» дискретних моделей у просторі станів для розподілених мереж поставок з запізнюваннями керованих потоків і інтервальною невизначеністю зовнішнього попиту.

В статье рассматривается построение «расширенной» и «мгновенной» дискретных моделей в пространстве состояний для распределенных сетей поставок с запаздываниями управляемых потоков и интервальной неопределенностью внешнего спроса.

The article deals with the synthesis of "extended" and "instantaneous" discrete state-space models for distributed supply networks with controlled flow delays and interval uncertainty in external demand.

Введение. Актуальность задач анализа и синтеза динамических систем управления запасами подтверждена многочисленными исследованиями [1]. Создание запасов необходимо для полного и своевременного удовлетворения спроса со стороны внешних потребителей, но связано с издержками вследствие необходимости создания складов и наличия затрат на хранение ресурсов. В результате возникает необходимость в разработке методов математического моделирования управляемых систем производства-хранения-распределения ресурсов с целью их анализа и построения оптимальных стратегий управления запасами.

В статье рассматриваются системы, представляющие собой совокупность взаимосвязанных объектов, осуществляющих добычу сырья, производство, хранение, транспортировку и распространение некоторого набора продукции. Предполагая производительности узлов сети ненулевыми и учитывая, что уровни запасов ресурсов в узлах изменяются с течением времени, получаем динамическую сетевую модель, которая описывает широкий класс систем, включая производственные системы, коммуникационные сети, системы распределения ресурсов, транспортно-складские системы и т.п.

Существуют различные типы топологии рассматриваемых систем, которые определяются спецификой и размещением потребителей и складов. Если некоторые виды сырья или полуфабрикатов используются в нескольких процессах, проходящих одновременно, система приобретает эшелонированную структуру, и, поскольку отношения местоположения узлов играют существенную роль с точки зрения анализа динамики сети, подобные системы называют распределенными сетями поставок.

Детерминированные модели, как правило, не учитывают априорную неопределенность, свойственную реальным системам управления запасами.

Стохастические модели требуют точного задания вероятностных характеристик неопределенных параметров системы и при этом довольно сложны в смысле получения численных результатов. Кроме того, во многих случаях нет основания или недостаточно информации, чтобы рассматривать факторы неопределенности как случайные (то есть адекватно описываемые теоретико-вероятностными моделями). Указанные соображения приводят к необходимости при построении моделей сетей поставок учитывать неопределенности нестохастической природы.

Построение математической модели объекта. Для графического представления сетей поставок используется ориентированный граф, вершины которого соответствуют узлам сети и предполагаются однономенклатурными. Дуги графа описывают управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки перераспределяют ресурсы между узлами, возможно перерабатывая их, и планируют поставки сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется как со стороны других узлов, так и внешнего окружения.

Граф, изображающий модель сети поставок, разделяется на уровни в зависимости от стадий переработки сырья и полуфабрикатов: уровень 1 содержит узлы сети, которые являются продавцами конечной продукции, уровень l содержит узлы, производящие либо сохраняющие ресурсы, которые используются для производства продукции уровнями строго меньше l, но не менее одного вида продукции уровня $(l-1)$.

Для математического описания сетей поставок предлагается подход, использующий «дискретно-событийные модели», при построении которых используются следующие предположения:

1) выбирается период дискретизации по времени Δt и все временные интервалы считаются кратными выбранному периоду;
2) время увеличивается пошагово, текущий момент времени обозначается $k = 0,1,2,\ldots$, в конце каждого периода времени состояние системы вычисляется с помощью уравнений модели;
3) состояние системы характеризуется уровнем запасов каждого вида ресурсов в течение данного периода.

Для описания узлов сети введем следующие обозначения:

N − количество узлов сети поставок;

$\Pi = \{\pi_{ij}\},\ i, j = \overline{1, N}$ − производственная матрица, значение (i, j)-го элемента которой равно количеству ресурсов i, измеренному в единицах, которое требуется для производства единицы продукции j;

$T_{j,i}$ − целочисленная переменная, значение которой кратно Δt, обозначающая время транспортировки продукции из узла j в узел i;

$LT_i -$ целочисленная переменная, обозначающая время выполнения заказа в узле i;

$Cost_i$ и $H_i -$ стоимости производства и хранения (соответственно) в течение периода времени Δt единицы продукции i, измеряемые в у.е.;

$War_i -$ максимально допустимая вместимость склада узла i, измеряемая в единицах.

Учитывая тот факт, что пополнение запасов всегда происходит с некоторым запаздыванием относительно момента отправки требования, необходимо определить максимальное значение периода запаздывания материальных потоков между узлами сети:

$$\Lambda_{\max} = \max_i \Lambda_i^{\max}, \;\; \Lambda_i^{\max} = \max_j \Lambda_{j,i}, \;\; i, j = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где $\Lambda_{j,i} = T_{j,i} + LT_i$ – период запаздывания потоков между узлами j и i, т.е. заказ на поставку продукции j, отправленный из узла i в момент времени k, будет доставлен в момент времени $(k+T_{j,i})$, и будет переработан и помещен в хранилище в момент времени $(k+T_{j,i}+LT_i)$. Предполагается, что значения временных интервалов известны и не меняются в процессе функционирования сети

Тогда динамика сети поставок с запаздываниями управляемых потоков описывается следующим рекуррентным соотношением:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda_{\max}} B_t u(k-t) + Ed(k), \tag{2}$$

где $x(k) \in R^N$ – вектор состояний, элементами которого являются уровни запаса ресурсов в узлах сети, имеющиеся в наличии в момент времени k;

$u(k) \in R^m$ – вектор управляющих воздействий, элементы которого отражают объемы заявок на поставку ресурсов, формируемые узлами в момент k;

$d(k) \in R^q$ – вектор внешних возмущений, элементами которого являются размеры внешнего спроса на конечную продукцию, которые поступают в момент k на узлы первого уровня сети поставок;

структура сети определяется структурой матриц влияния управлений $B_t \in R^{N\times m}, \;\; t = \overline{0, \Lambda_{max}}$ и матрицы влияния возмущений $E \in R^{N\times q}$.

Поясним на примере принцип формирования матриц B_t и E. Пусть управляемый поток u_n представляет процесс транспортировки и сборки, в результате которого из 10 единиц продукции i, время транспортировки которой равно $T_{i,n} = 2$, и 5 единиц продукции j, время транспортировки равно $T_{j,n} = 1$, получают 1 единицу продукции n, время выполнения заказа равно $LT_n = 1$. Определим максимальное значение периода запаздывания для узла n: $\Lambda_n^{\max} = \max\left\{\Lambda_{i,n} = T_{i,n} + LT_n = 3,\ \Lambda_{j,n} = T_{j,n} + LT_n = 2\right\} = 3$. На графе этот поток представляется гипер-дугой, соединяющей узлы i и j с узлом n (см. рис. 1). Значение времени транспортировки и количество единиц продукции, которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле узла n в круглых скобках указано значение времени выполнения заказа LT_n.

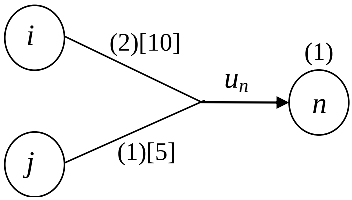

Рис. 1 – Графическое представление управляемого потока

Тогда в матрицах $B_t, t = \overline{0,3}$ управляемый поток u_n будет представлен следующими ненулевыми элементами: $[B_0]_{in} = -10$, $[B_0]_{jn} = -5$, $[B_3]_{nn} = 1$.

Аналогично, неуправляемый поток d_p, представляющий внешний спрос на продукцию узла r, формирует столбец p матрицы внешних возмущений E, который содержит один ненулевой элемент $[E]_{rp} = -1$.

Учитывая физический смысл переменных, должны выполняться конструктивные ограничения на значения вектора состояний и вектора управлений, которые могут быть представлены в виде выпуклых многогранников в пространствах соответствующей размерности:

$$x(k) \in X = \left\{x \in R^N \middle|\ 0 \le x \le x^+\right\},\ u(k) \in U = \left\{u \in R^m \middle|\ 0 \le u \le u^+\right\}, \tag{3}$$

где элементы векторов x^+ и u^+ описывают максимальные вместимости хранилищ и объемы транспортировок и предполагаются заданными.

Для определения оптимальной стратегии управления запасами необходимо задание характеристик внешнего спроса. Однако, при решении практических задач эти характеристики точно не известны. Поэтому используется подход, предложенный в работе [2], согласно которому предполагается, что сеть поставок функционирует в условиях неизвестного, но ограниченного спроса, который характеризуется интервальной неопределенностью. Тогда к рассмотренным ограничениям добавляется:

$$d(k) \in D = \left\{ d \in R^q \middle| \ d^- \le d \le d^+ \right\}, \tag{4}$$

где значения векторов d^- и d^+ определяются на основании изучения статистики прошлых продаж.

Таким образом, ограничения на значения вектора состояний и вектора управляющих воздействий (3) определяются физическими возможностями системы, а на значения вектора внешних возмущений (4) – неопределенностью спроса на конечную продукцию.

Для преобразования модели (2) к стандартному виду без запаздываний применяется техника расширения пространства состояний путем включения в вектор состояний векторов, представляющих размеры ранее заказанных ресурсов, находящихся в процессе транспортировки:

$$\xi(k) = \left[x(k)^{\mathbf{T}},\ u(k-1)^{\mathbf{T}},\ u(k-2)^{\mathbf{T}},\ \ldots,\ u(k-\Lambda_{max})^{\mathbf{T}} \right]^{\mathbf{T}}. \tag{5}$$

Уравнения *расширенной* модели сети поставок с запаздываниями управляемых потоков примут вид:

$$\begin{aligned} &\xi(k+1) = A\xi(k) + Fu(k) + Gd(k), \\ &x(k) = C\xi(k), \end{aligned} \tag{6}$$

где матрицы $A,\ F,\ G,\ C$ имеют соответствующую блочную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} I_{N\times N} & B_1 & \cdots & B_{\Lambda_{\max}-1} & B_{\Lambda_{\max}} \\ [0]_{m\times N} & [0]_{m\times m} & \cdots & [0]_{m\times m} & [0]_{m\times m} \\ [0]_{m\times N} & I_{m\times m} & \cdots & [0]_{m\times m} & [0]_{m\times m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{m\times N} & [0]_{m\times m} & \cdots & I_{m\times m} & [0]_{m\times m} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} B_0 \\ I_{m\times m} \\ [0]_{m\times m} \\ \vdots \\ [0]_{m\times m} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} E \\ [0]_{m\times q} \\ [0]_{m\times q} \\ \vdots \\ [0]_{m\times q} \end{pmatrix}, C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} I_{N\times N} \\ [0]_{N\times m} \\ \vdots \\ [0]_{N\times m} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Использовать расширенную модель для анализа свойств сети сложно из-за больших размерностей. Поэтому с помощью замены базиса строится модель, вектор состояний которой имеет вид:

$$\hat{\xi}(k) = \left[z(k)^{\mathbf{T}},\ u(k-1)^{\mathbf{T}},\ u(k-2)^{\mathbf{T}},\ \ldots,\ u(k-\Lambda_{max})^{\mathbf{T}} \right]^{\mathbf{T}}, \tag{8}$$

где элементы вектора $z(k) \in R^N$ называют *фиктивными* уровнями запаса и определяют как сумму уровня запаса ресурсов, находящихся в хранилищах, и ресурсов, которые находятся в процессе транспортировки между узлами сети:

$$z(k) = x(k) + \sum_{t=1}^{\Lambda_{\max}} \hat{B}_t u(k-t), \text{ где } \hat{B}_i = \sum_{t=i}^{\Lambda_{\max}} B_t, \ i = \overline{1, \Lambda_{\max}}. \qquad (9)$$

Полученная система с вектором состояний $\hat{\xi}(k)$ допускает декомпозицию на две подсистемы. Первая представляет собой так называемую *мгновенную* модель сети, поскольку все запаздывания равны нулю, и описывается уравнением:

$$z(k+1) = z(k) + Bu(k) + Ed(k), \text{ где } B = \sum_{t=0}^{\Lambda_{\max}} B_t. \qquad (10)$$

Переменными состояний второй подсистемы являются управляющие воздействия с запаздываниями расширенной модели сети $u(k-t), t = \overline{1, \Lambda_{max}}$. При этом вторая подсистема является асимптотически устойчивой, поскольку ее матрица динамики является нильпотентной. Поэтому для анализа динамических свойств распределенных сетей поставок целесообразно использовать мгновенную модель (10).

Численный пример. В качестве примера рассмотрим сеть поставок, которая изучалась в работе [3]. Граф, представляющий модель сети, можно описать следующим образом $G = (V = \{1,2,3,4,5\}, E = \{(5,1), (5,2), (5,3), (4,3), (3,1), (3,2)\})$.

Сеть содержит $N = 5$ узлов, которые разделены на три уровня: узлы 1 и 2, образующие уровень 1 сети поставок, перерабатывают продукцию узлов 3 и 5, и имеют склады, которые хранят, соответственно, продукцию типа 1 и продукцию типа 2; узел 3 перерабатывает продукцию узлов 4 и 5, хранит продукцию типа 3, и составляет уровень 2 сети поставок; узлы 4 и 5 являются поставщиками сырья соответствующего типа и составляют уровень 3 сети поставок. Даны значения времени выполнения заказа в узлах сети: $LT_1 = LT_3 = LT_5 = 1$, $LT_2 = LT_4 = 2$ и времени транспортировки ресурсов между узлами сети: $T_{5,1} = T_{5,2} = T_{5,3} = T_{4,3} = T_{3,1} = T_{3,2} = 1$.

Представим управляемые потоки в виде гипер-дуг, изображенных непрерывными линиями, добавив два потока, которые представляют поставки сырья извне, и пронумеруем, как показано на рис. 2. Дуги d_1, d_2, изображенные пунктирными линиями, представляют внешний спрос. Значение времени транспортировки $T_{i,j}$ и количество единиц продукции π_{ij}, которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле каждого узла в круглых скобках указаны значения времени выполнения заказа LT_i.

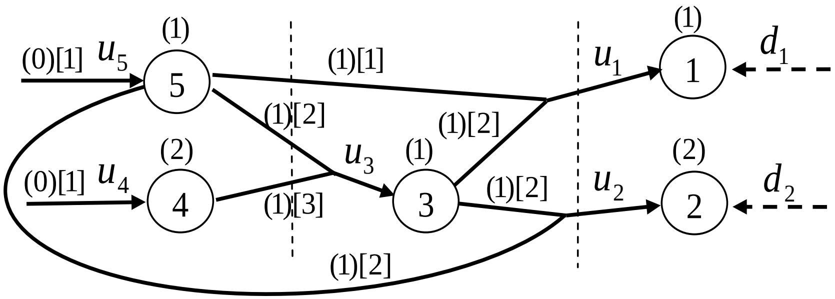

Рис. 2 – Графическое представление модели сети поставок

В соответствии с технологическим описанием производственных процессов составлена производственная матрица Π. Матрица влияния управляющих воздействий B, вычисленная в соответствии с (10), и матрица влияния внешних возмущений E равны:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, размерность вектора состояний мгновенной модели $\dim z(k) = N$ определяется количеством узлов сети поставок и для рассматриваемого примера равна 5, в то время как размерность вектора состояний расширенной модели $\dim \xi(k) = N + \Lambda_{\max} m$ зависит также от максимального значения периода запаздывания потоков в сети и размерности вектора управлений, и для рассматриваемого примера равна 20.

Выводы. В статье рассмотрена методика построения математических моделей распределенных сетей поставок с запаздываниями управляемых потоков и интервальной неопределенностью внешнего спроса, которая позволяет сформировать:

1) мгновенную дискретную модель сети в пространстве состояний для анализа динамических свойств системы;
2) расширенную дискретную модель сети в пространстве состояний для синтеза стратегии управления запасами.

Список литературы: **1.** *Лотоцкий В. А.* Модели и методы управления запасами / *В. А. Лотоцкий, А. С. Мандель.* – М. : Наука, 1991. – 189 с. **2.** *Blanchini F.* Least inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown inputs / *F. Blanchini, F. Rinaldi, W. Ukovich* // IEEE Transaction on robotics and automation. – 1997. – Vol. 13. – P. 633–645. **3.** *Hennet J.-C.*

A bimodal scheme for multi-stage production and inventory control // Automatica. – 2003. – № 39. – P. 793–805.

Надійшла до редколегії 19.03.2012