УДК 519.711.3:519.68

А. Е. ПУТЯТИНА, асп. ХНУРЭ, Харьков

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ ДЛЯ МОДЕЛИ ХЕСТОНА

В цій статті розглянута задача оптимізації портфелю цінних паперів для моделі Хестона поведінки ціни акції. Запропонован метод розв’язання задачі оптимізації портфелю при наявності неповної інформації, тобто спостерігаются тільки ціни акції, але волатильність акції невідома. Оцінка волатильності виконується за допомогою фільтрації.

Ключові слова: акція, фільтрація, портфель цінних паперів, неповна інформація, інвестиційна стратегія, рівняння Гамильтона–Якобі–Беллмана

В данной статье рассмотрена задача оптимизации портфеля ценных бумаг для модели Хестона поведения цены акции. Предложен метод решения задачи оптимизации портфеля при наличии неполной информации, т.е. наблюдаются только цены акции, но волатильность акции неизвестна. Оценка волатильности производиться при помощи фильтрации.

Ключевые слова акция, фильтрация, портфель ценных бумаг, неполная информация, инвестиционная стратегия, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана.

In this paper we consider portfolio optimization problem for the Heston model of the asset price behaviour. A method was proposed for solving the portfolio optimization problem under partial information, i.e. only asset prices are observable, but not the volatility. Volatility is estimated by means of filtering.

Keywords: asset, filtering portfolio, partial information, portfolio strategy, HJB equation

Введение. Модель Хестона [1] – это модель поведения цены акции, в которой волатильность (среднеквадратическое отклонение) цены акции не является константой или детерминированной функцией, но является случайным процессом. Коэффициент сноса цены акции управляется тем же случайным процессом, что и волатильность. Цель задачи фильтрации – это оценка случайной волатильности цены акции, имея наблюдения цены акции. Коэффициенты модели Хестона не являются константами или линейными функциями, поэтому мы имеем дело с задачей нелинейной бесконечномерной фильтрации [2,3]. В настоящей статье предлагается решение приближенными методами. Основная идея получения приближенного решения – это линеаризация нелинейных коэффициентов в уравнениях, описывающих поведение цены акции и поведение волатильности цены акции с последующим применением фильтра Калмана к линеаризованной модели.

Задача оптимизации портфеля ценных бумаг состоящего из банковского счета и одинаковых акций, чье поведение подчиняется одной и той же модели Хестона, должна быть решена при условиях наличия полной и неполной (частичной) информации. Под понятием неполной информации подразумевается то, что процесс, описывающий волатильность акции, ненаблюдаем на рынке и его оценка должна быть получена с помощью фильтрации при условии наличия наблюдений цены акции.

Постановка задачи исследования. Рассмотрим модель Хестона, которая описывает динамику цены акции S_t, $t > 0$:

$$dS_t = S_t(r + \lambda z_t)dt + S_t\sqrt{z_t}dW_t, \tag{1}$$

$$dz_t = \kappa(\theta - z_t)dt + \sigma\sqrt{z_t}dV_t, \tag{2}$$

где z_t, $t > 0$ – стохастическая волатильность цены акции;

r – процентная ставка;

λ – действительное число;

θ – средняя волатильность, к которой стремиться математическое ожидание z_t;

$\kappa>0$ – скорость, с которой z_t стремиться к θ;

σ – коэффициент диффузии в уравнении волатильности z_t;

процессы W_t и V_t являются независимыми Винеровскими процессами.

В условиях финансового рынка инвестор имеет информацию о ценах акций, но не знает значения волатильности цены акции. Пусть цены акций наблюдаются только в дискретном времени, т.е. $S_1, S_2, \ldots, S_k, k \in N$. Имея дискретные наблюдения цен акций S_k, необходимо оценить значения волатильности z_t цены акции в соответствии с моделью (1)–(2) и затем применить оценку z_t для оптимизации портфеля ценных бумаг.

Имеем задачу нелинейной фильтрации, решение которой в явном виде представляет большую трудность. Ее решение возможно приближенно, если нелинейные коэффициенты модели (1)–(2) линеаризовать, используя метод статистической линеаризации [4].

Пусть y_t, z_t, – это случайные функции, такие что

$$y_t = \varphi(z_t), \tag{3}$$

где φ – нелинейная функция.

Нелинейное преобразование (3) может быть приближено линейной зависимостью U_t между случайными функциями y_t и z_t,:

$$U_t = \varphi_0 + k_1 z_t^0, \tag{4}$$

где z_t^0 – центрированная случайная величина.

Таким образом, $z_t^0 = z_t - m_z(t)$, где $m_z(t)$ – математическое ожидание случайной функции z_t. Коэффициенты k_1 и φ_0 могут быть определены по следующим формулам:

$$\varphi_0 = m_y(t), \tag{5}$$

$$k_1 = \pm \frac{\sigma_y(t)}{\sigma_z(t)} \tag{6}$$

или

$$k_1 = \pm \frac{Corr(z_t, y_t)}{D(z_t)} \tag{6a}$$

$$\sigma_y(t) = \sqrt{D(y_t)},$$

$$\sigma_z(t) = \sqrt{D(z_t)},$$

где $Corr$ – это обозначение коэффициента корреляции;
D – это дисперсия случайной величины.

Знак в первой формуле для k_1 выбирается таким образом, чтобы знаки истинной и аппроксимирующей функций совпадали.

Значения стохастической волатильности z_t не известны, но могут быть промоделированы исходя из уравнения (2). По сгенерированной выборке значений волатильности можно эмпирическим путем определить математическое ожидание m_z и стандартное отклонение σ_z. Таким же образом можно определить и параметры m_y и σ_y. Таким образом, коэффициенты k_1 и φ_0 могут быть определены приближенным способом.

В результате, модель Хестона может быть приближена и линеаризована следующим образом:

$$dS_t \approx S_t(r + \lambda z_t)dt + S_t(\varphi_0 + k_1(z_t - m_z))dW_t, \tag{7}$$

$$dz_t \approx \kappa(\theta - z_t)dt + \sigma(\varphi_0 + k_1(z_t - m_z))dV_t, \tag{8}$$

где m_z – математическое ожидание случайной величины z_t.

Приближенная модель (7)-(8) описывает поведение цены акции S_t, у которой волатильность z_t стохастическая. У данной модели, в отличие от модели Хестона (1)–(2), коэффициенты являются линейными функциями. Для получения оценки ненаблюдаемой волатильности z_t в дискретном времени может быть применен фильтр Калмана [2,3]. Однако в непрерывном времени применение фильтра Калмана становиться невозможным, следовательно, для решения задачи оптимизации портфеля ценных бумаг в непрерывном времени и при неполной информации нужен иной подход для оценивания ненаблюдаемой величины z_t. В разделе «Численные эксперименты» будет проведен сравнительный анализ результатов оптимизации портфеля ценных бумаг для модели (1)–(2) и для ее линеаризованной версии (7)–(8) при наличии полной информации. Представляет интерес решить задачу оптимизации портфеля ценных бумаг [5], состоящего из банковского счета и одинаковых акций, чье поведение подчиняется одной и той же модели Хестона, при условии наличия полной и неполной информации.

Оптимизация портфеля ценных бумаг. При наличии полной информации об акции (на финансовом рынке наблюдаются и цены акции S_t и значения волатильности z_t цены акции) можно использовать результаты статьи [1]. Способ решения задачи оптимизации портфеля ценных бумаг для модели Хестона при наличии неполной информации (наблюдаются только цены акции, но не волатильность) является новизной данной работы и будет рассматриваться в пункте 2.2. В разделе «Численные эксперименты» будет проведен сравнительный анализ результата решения задачи оптимизации портфеля ценных бумаг при полной информации по методу, рассмотренному в [1] и результата решения той же самой задачи оптимизации, но при наличии неполной информации. Будет вычислена ошибка, получаемая за счет неполной информации.

Оптимизация при наличии полной информации. В работе [1] рассмотрена задача оптимизации портфеля ценных бумаг, состоящего из банковского счета и акции, подчиняющейся модели Хестона.

Для упрощения вывода формул введем в модели Хестона (1)–(2) следующие обозначения:

$$a(z_t,t)=\kappa(\theta-z_t),\ b(z_t,t)=\sigma\sqrt{z_t},\ \mu(z_t,t)=r+\lambda z_t\ \text{и}\ \sigma(z_t,t)=\sqrt{z_t}.$$

Обозначим стоимость портфеля ценных бумаг X_t^π (капитал) следующим образом:

$$\begin{aligned}dX_t^\pi &= X_t^\pi\pi_t[\mu(z_t,t)dt+\sigma(z_t,t)dW_t]+X_t^\pi(1-\pi_t)rdt=\\&=X_t^\pi\pi_t[(\mu(z_t,t)-r)dt+\sigma(z_t,t)dW_t]+X_t^\pi rdt=\\&=X_t^\pi\pi_t[(r+(\mu(z_t,t)-r)\pi_t)dt+\pi_t\sqrt{z_t}dW_t]=\\&=X_t^\pi\pi_t[(r+\lambda z_t\pi_t)dt+\pi_t\sqrt{z_t}dW_t],\end{aligned}$$

где π_t – инвестиционная стратегия, т.е. процентная часть капитала, вложенная в акции.

Задача оптимизации портфеля заключается в том, чтобы найти оптимальную инвестиционную стратегию, т.е. максимизировать математическое ожидание полезности капитала X_t^π в конечный момент времени *T*, т.е.

$$\max_\pi M\left[\frac{1}{\gamma}(X_T^\pi)^\gamma\right].$$

Полезность определяется функцией полезности

$$U:[0,\infty)\to R\cup\{-\infty\},$$

которая строго возрастающая, строго выпуклая и дважды непрерывно дифференцируемая на (0,∞) [5]. Рассматривается степенная функция полезности

$$U(x)=x^\gamma/\gamma,\ \gamma<1,\ \gamma\neq 0.$$

Функция значения $J(t,x,z)$, определенная следующим образом

$$J(t,x,z)=\max_\pi M\left[\frac{1}{\gamma}(X_T^\pi)^\gamma \middle| X_t^\pi = x, z_t = z\right]$$

является решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\max_\pi\left(\frac{\partial}{\partial t}J(t,x,z)+x(r+(\mu(z,t)-r)\pi)\frac{\partial}{\partial x}J(t,x,z)+a(z,t)\frac{\partial}{\partial z}J(t,x,z)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}x^2(\sigma(z,t))^2\pi^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}J(t,x,z)+xb(z,t)\sigma(z,t)\pi\rho\frac{\partial^2}{\partial xz}J(t,x,z)+$$

$$\left.+\frac{1}{2}(b(z,t))^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}J(t,x,z)\right)=0, \qquad (9)$$

где x – значение X_t^π в момент времени *t*;

z – значение z_t в момент времени *t*;

π – значение π_t в момент времени *t*;

Функция значения $J(t,x,z)$ задается следующей формулой:

$$J(t,x,z)=\frac{x^\gamma}{\gamma}(f(t,z))^{\frac{1-\gamma}{1-\gamma+\rho^2\gamma}},$$

где функция *f* имеет действительные значения и следующее представление:

$$f(t,z_t)=\exp\left(\frac{\gamma}{c}r(T-t)-A_f(t,T)-B_f(t,T)z_t\right),$$

если

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}\lambda\left(\frac{\kappa\rho}{\sigma}+\frac{\lambda}{2}\right)<\frac{\kappa^2}{2\sigma^2},$$

где $A_f(t,T)$ – это C^1-функция с действительными значениями;

$$B_f(t,T)=2\tilde{\beta}\frac{e^{\tilde{\alpha}(T-t)}-1}{e^{\tilde{\alpha}(T-t)}(\kappa+\alpha)-\kappa+\tilde{\alpha}}.$$

Здесь

$$\tilde{\beta}=-\frac{1}{2c}\frac{\gamma}{1-\gamma}\lambda^2,\ \tilde{\alpha}=\sqrt{\tilde{\kappa}^2+2\tilde{\beta}\sigma^2},\ c=\frac{1-\gamma}{1-\gamma+\rho^2\gamma},\ \tilde{\kappa}=\kappa-\frac{\gamma}{1-\gamma}\rho\lambda\sigma,\ \tilde{\kappa}>0.$$

Подставляя функцию $J(t,x,z)$ в уравнение (9), получаем формулу для оптимальной инвестиционной стратегии π_t^* для модели Хестона:

$$\pi_t^*=\frac{\lambda}{1-\gamma}. \tag{10}$$

Таким образом, оптимальная инвестиционная стратегия для модели Хестона является константой.

Возвратившись к линеаризованной модели Хестона (7)–(8), решим задачу оптимизации аналогично [1], и получим оптимальную инвестиционную стратегию π_t^*, представляемую следующей формулой:

$$\pi^*(z,t)=\frac{\lambda z}{(1-\gamma)(\varphi_0+k_1(z-m_z))}. \tag{11}$$

Основываясь на результатах численных экспериментов (параграф «Численные эксперименты»), можно сделать вывод, что линеаризованная модель Хестона (7)–(8) незначительно отличается от исконной модели Хестона (7)–(8).

Процесс статистической линеаризации значительно упрощает внешний вид модели с нелинейными коэффициентами и позволяет применять дискретный фильтр Калмана для оценки ненаблюдаемой случайной величины. Однако, для линеаризованной модели Хестона (7)–(8), нельзя применить фильтр Калмана в непрерывном времени, а, следовательно, нельзя решить теоретически в непрерывном времени задачу оптимизации портфеля ценных бумаг. Поэтому, рассмотрим другой подход для фильтрации модели Хестона (1)–(2) и для решения задачи оптимизации портфеля.

Оптимизация при наличии неполной информации. Термин «неполная информация» означает, что только цены акций S_t наблюдаются на финансовом рынке, но не стохастическая волатильность z_t. Для решения задачи оптимизации портфеля ценных бумаг следует вычислить оценку ненаблюдаемой величины z_t. В модели Хестона (1)–(2) коэффициенты диффузии не являются константами, поэтому нельзя применить фильтр Калмана для оценивания z_t. Также для статистически линеаризованной версии (7)–(8) модели Хестона в непрерывном времени фильтрация Калмана не может быть применена, так как коэффициенты диффузии в обоих стохастических дифференциальных уравнениях являются линейными функциями, а не константами. Основной задачей и новизной данной статьи является поиск решения задачи оптимизации портфеля ценных бумаг для модели Хестона при неполной информации.

Расширенный фильтр Калмана [3] может быть применен и в непрерывном времени для оценивания волатильности z_t. Представим модель Хестона (1)–(2) в следующей общей форме:

$$ds_t = \frac{dS_t}{S_t} = (r + \lambda z_t)dt + \sqrt{z_t}\,dW_t = h(z_t)dt + g(z_t)dW_t,$$

$$dz_t = \kappa(\theta - z_t)dt + \sigma\sqrt{z_t}\,dV_t = f(z_t)dt + \sigma(z_t)dV_t,$$

где $f(z_t) = \kappa(\theta - z_t)$, $\sigma(z_t) = \sigma\sqrt{z_t}$, $h(z_t) = r + \lambda z_t$, $g(z_t) = \sqrt{z_t}$.

Стохастические дифференциальные уравнения с нелинейными коэффициентами могут быть приближены с помощью разложения Тейлора:

$$ds_t \approx (h'(\bar{z}_t)(z_t - \bar{z}_t) + h(\bar{z}_t))dt + g(\bar{z}_t)dW_t,$$

$$dz_t \approx (f'(\bar{z}_t)(z_t - \bar{z}_t) + f(\bar{z}_t))dt + \sigma(\bar{z}_t)dV_t,$$

где h' и f' – первые производные функций h и f соответственно;

$\bar{z}$ – решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dz_t}{dt} = f(\bar{z}_t),\ \bar{z}_0 = z_0. \qquad (12)$$

Фильтр Калмана может быть применен после преобразования модели Хестона с помощью разложения Тейлора.

Принимая во внимание, что $f(z_t)=\kappa(\theta-z_t)$, решение уравнения (12) следующее:

$$\bar{z}_t=(z_0-\theta)e^{-\kappa t}+\theta.$$

Далее, $f'(z)=\kappa$ и $h'(z)=\lambda$, таким образом

$$ds_t\approx(\lambda(z_t-\bar{z}_t)+r+\lambda\bar{z}_t)dt+g(\bar{z}_t)dW_t,$$

$$dz_t\approx(-\kappa(z_t-\bar{z}_t)+(\kappa(\theta-\bar{z}_t))dt+\sigma(\bar{z}_t)dW_t,$$

или

$$\begin{aligned}ds_t&\approx(r+\lambda z_t)dt+g(\bar{z}_t)dW_t=(r+\lambda z_t)dt+\sqrt{\bar{z}_t}dW_t=\\&=h(z_t)dt+\sqrt{\bar{z}_t}dW_t,\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}dz_t&\approx\kappa(\theta-z_t)dt+\sigma(\bar{z}_t)dV_t=\kappa(\theta-z_t)dt+\sigma\sqrt{\bar{z}_t}dV_t=\\&=f(z_t)dt+\sigma\sqrt{\bar{z}_t}dV_t.\end{aligned}\tag{14}$$

Можно получить оптимальную инвестиционную стратегию при наличии неполной информации. Условное математическое ожидание (F_t^S – это сигма-алгебра, построенная на наблюдениях цены акции)

$$\hat{z}_t=M[z_t\,|\,F_t^S],$$

процесса сноса z_t удовлетворяет уравнениям фильтра Калмана [2]:

$$d\hat{z}_t=\kappa(\theta-\hat{z}_t)dt+(\Omega_t+R)(g(\bar{z}_t))^{-2}(ds_t-(\lambda\hat{z}_t+r)dt),$$

где R задается следующей формулой:

$$R=\rho g(\bar{z}_t)\sigma(\bar{z}_t).$$

Здесь ρ – коэффициент корреляции между Винеровскими процессами W_t и V_t, который в случае модели Хестона равен нулю;

Ω_t – матрица условных ковариаций, которая является решением детерминированного уравнения Рикатти

$$\frac{d\Omega_t}{dt}=\sigma(\bar{z}_t)-2\kappa\Omega_t-(\Omega_t+\rho)(g(\bar{z}_t))^{-2}(\Omega_t+\rho).$$

Процесс изменения стоимости капитала X_t^π с учетом линеаризованной модели (13)–(14)) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} dX_t^{\pi} &= X_t^{\pi}\pi_t[h(\hat{z}_t)dt+\sqrt{\bar{z}_t}dW_t]+X_t^{\pi}(1-\pi_t)rdt= \\ &= X_t^{\pi}\pi_t[(h(\hat{z}_t)-r)dt+\sqrt{\bar{z}_t}dW_t]+X_t^{\pi}rdt= \\ &= X_t^{\pi}[(r+(h(\hat{z}_t)-r)\pi_t)dt+\pi_t\sqrt{\bar{z}_t}dW_t]= \\ &= X_t^{\pi}[(r+\lambda\hat{z}_t\pi_t)dt+\pi_t\sqrt{\bar{z}_t}dW_t]. \end{aligned}$$

Задача оптимизации портфеля ценных бумаг заключается в вычислении такой инвестиционной стратегии π_t, чтобы максимизировать ожидаемую полезность капитала X_t^{π} в конечный момент времени *T*. Без потери общности решения [6] положим $r=0$.

Рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для нашей задачи оптимизации при неполной информации:

$$\begin{aligned} &\max_{\pi}\Bigg(\frac{\partial}{\partial t}\hat{J}(t,x,\hat{z})+x(r+\lambda\hat{z}\pi)\frac{\partial}{\partial x}\hat{J}(t,x,\hat{z})+(\kappa\theta-\kappa\hat{z})\frac{\partial}{\partial\hat{z}}\hat{J}(t,x,\hat{z})+ \\ &+\frac{1}{2}x^2(g(\bar{z}_t))^2\pi^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{J}(t,x,\hat{z})+x(\Omega_t+R)\pi\frac{\partial^2}{\partial x\partial\hat{z}}\hat{J}(t,x,\hat{z})+ \\ &+\frac{1}{2}(\Omega_t+R)^2(g(\bar{z}_t))^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\hat{z}^2}\hat{J}(t,x,\hat{z})\Bigg)=0, \end{aligned}$$

где x – значение X_t^{π} в момент времени *t*;

$\hat{z}$ – значение $\hat{z}_t$ момент времени *t*;

π – значение π_t в момент времени *t*.

Функция

$$\hat{J}(t,x,\hat{z})=\hat{J}(t,x,\hat{z},\Omega_t)$$

– это функция значения при детерминированной величине Ω_t.

Подставим в последнее уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана функцию значения следующего вида [6]:

$$\hat{J}(t,x,\hat{z})=\frac{x^{\gamma}}{\gamma}\exp(\hat{z}^2A_t+\hat{z}B_t+C_t),$$

и продифференцируем его по π. В результате получим оптимальную инвестиционную стратегию, задаваемую следующей формулой:

$$\pi^*(t,\hat{z}) = \frac{\lambda\hat{z} + (\Omega_t + R)(2\hat{z}A_t + B_t)}{(1-\gamma)(g(\bar{z}_t))^2},$$

где коэффициенты A_t, B_t, C_t определяются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dA_t}{dt} = -\frac{\gamma(\lambda + 2(\Omega_t + R)A_t)^2}{2(1-\gamma)(g(\bar{z}_t))^2} - \frac{2(\Omega_t + R)^2 A_t}{(g(\bar{z}_t))^2} + 2\kappa A_t,$$

$$\frac{dB_t}{dt} = -\frac{\gamma}{2(1-\gamma)(g(\bar{z}_t))^2}(3\lambda r + 4r(\Omega_t + R)A_t + 2\lambda(\Omega_t + R)B_t -$$

$$-4(\Omega_t + R)^2 A_t B_t) - \frac{2(\Omega_t + R)^2 A_t B_t}{(g(\bar{z}_t))^2} - 2\kappa\theta A_t + \kappa B_t,$$

$$\frac{dC_t}{dt} = -\frac{\gamma}{2(1-\gamma)(g(\bar{z}_t))^2}(r^2 + 3(\Omega_t + R)rB_t + (\Omega_t + R)^2 B_t^2) -$$

$$-\kappa\theta B_t - \frac{(\Omega_t + R)^2(2A_t + B_t^2)}{2(g(\bar{z}_t))^2}.$$

Численные эксперименты. Для численных экспериментов выбрана модель Хестона со следующими параметрами:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (0 + 1\cdot z_t)dt + \sqrt{z_t}\,dW_t,$$

$$dz_t = 0.5(0.5 - z_t)dt + 0.3\sqrt{z_t}\,dV_t$$

где dV_t и dW_t имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и среднеквадратическим отклонением соответственно 0.3 и 0.5.

Ниже представлены соответствующие рисунки. На рис. 1 представлена динамика поведения цены акции, в соответствии с моделью Хестона (1)–(2). Рис. 2 показывает истинный процесс стохастической волатильности z_t, линеаризованную волатильность и оценку $\hat{z}_t$ стохастической волатильности, полученную при помощи расширенного фильтра Калмана. Можно заметить, что линеаризованный процесс стохастической волатильности практически неотличим от истинного процесса z_t. Расширенный фильтр Калмана дал оценку $\hat{z}_t$, довольно близкую к истинному процессу z_t.

На рис. 3 представлены оптимальные инвестиционные стратегии: при наличии полной информации для модели Хестона (1)–(2) и для линеаризованной модели Хестона (7)–(8), при наличии неполной информации для модели Хестона (1)–(2) с применением расширенного фильтра Калмана для нахождения оценки $\hat{z}_t$.

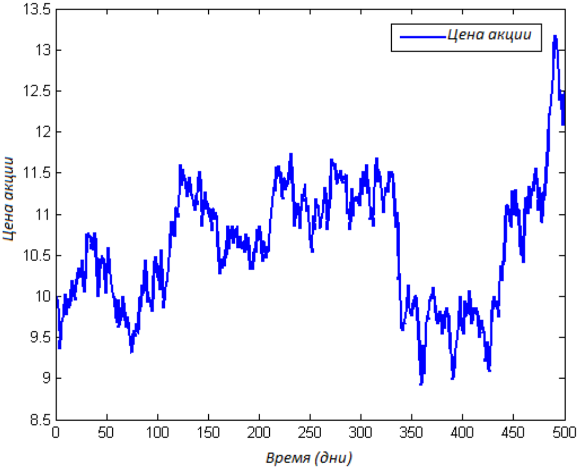

Рис. 1 – Поведение цены акции

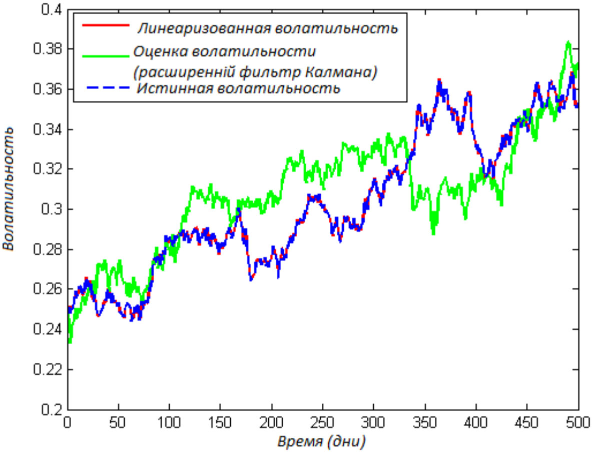

Рис. 2 – Истинная и оцененная волатильность цены акции

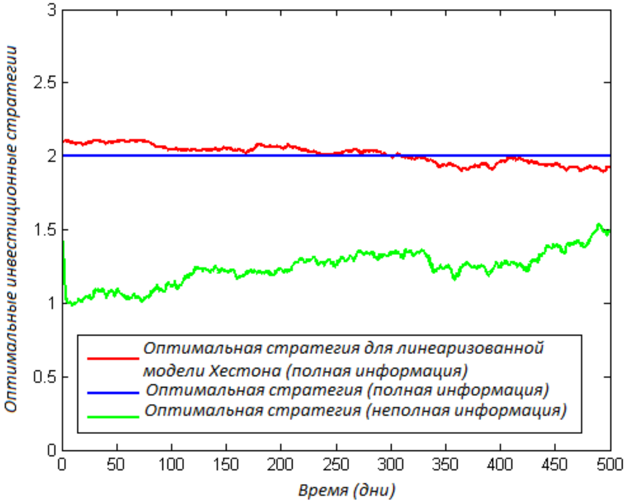

Рис. 3 – Оптимальные инвестиционные стратегии

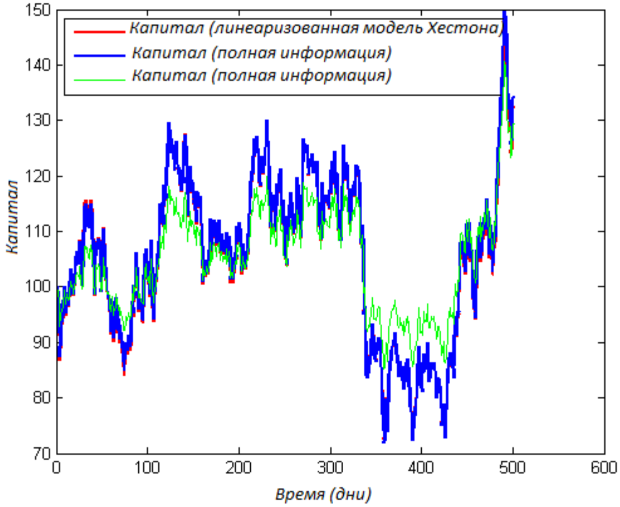

Рис. 4 – Динамика капитала при применении трех различных инвестиционных стратегий

Рис. 4 показывает динамику изменения капитала, полученного при применении трех различных инвестиционных стратегий, представленных на рис. 3.

Проведем краткий анализ полученных результатов. Среднее отклонение между истинным процессом z_t и оценкой, полученной с применением расширенного фильтра Калмана, составляет 0.0198. Средние отклонения между оптимальной стратегией при наличии полной информации и оптимальными стратегиями при неполной информации и статистической линеаризации составляют соответственно 0.7620 и 0.3496. Средние отклонения между капиталом при полной информации и капиталами при неполной информации и статистической линеаризации составляют соответственно 4.9344 и 0.3496.

Отклонение между капиталами, полученными без применения и с применением приближенных методов, может быть оценено как потери в ожидаемой полезности, т.е.

$$M[U(X_T^{\pi})]-M[U(X_T^{approx})],$$

где X_t^{π} – капитал полученный без применения приближений и численных методов;

X_t^{approx} – капитал, полученный с применением приближений;

M означает математическое ожидание случайной функции.

Потери ожидаемой полезности между капиталом, полученным при полной информации и капиталами, полученными при неполной информации, и статистической линеаризации составляют соответственно 0.0062 и $7.56\cdot10^{-4}$. Функция полезности имеет вид

$$U(x)=x^{\gamma}/\gamma$$

при γ=0.5. Математические ожидания были оценены, основываясь на выборке в 1000 значений.

Выводы. В данной статье была рассмотрена модель Хестона поведения цены акции. Особенность этой модели заключается в том, что волатильность цены акции не является константой, а является случайным процессом. Такая модель более реалистична, чем модель, в которой коэффициенты неслучайны. В статье был рассмотрен портфель ценных бумаг, состоящий из банковского счета (безрисковое вложение) и рискованной акции (чья цена подчиняется модели Хестона). Задача оптимального вложения средств в рискованные акции является задачей оптимизации портфеля ценных бумаг. Такая задача может довольно часто возникать у фирм, которые занимаются инвестированием денежных средств. К примеру, в системе негосударственного пенсионного страхования это компании по управлению активами, деятельность которых была подробно рассмотрена в [7].

Система негосударственного пенсионного страхования в последние годы становиться все более актуальной, так как средний возраст населения увеличивается и, следовательно, пенсионных взносов трудоспособного населения не хватает для выплат пенсий. В системе негосударственного пенсионного страхования каждый трудоспособный человек может делать взносы в негосударственные пенсионные фонды. Эти фонды передают собранные взносы в компании по управлению активами, деятельность которых заключается в том, что бы правильно инвестировать денежные средства. Оптимальное инвестирование денежных средств и является задачей оптимизации портфеля ценных бумаг. Компании по управлению активами должны так оптимально инвестировать пенсионные взносы, что бы к моменту выхода на пенсию человек мог получать достойную пенсию. Хотя в большинстве стран мира система негосударственного пенсионного страхования развивается и внедряется очень быстро, эта система по-прежнему остается достаточно рискованным мероприятием, требующим новых подходов к решению возникающих проблем.

На финансовом рынке инвестор наблюдает только цены акций, и не имеет никакой информации о волатильности акции, т.е. возникает ситуация неполной информации. Поэтому особенно важно решить задачу оптимизации портфеля ценных бумаг в условиях неполной информации, что и было сделано в данной статье. В статье так же было приведено решение задачи оптимизации в условиях полной информации, для того, что бы сравнить и оценить потерю капитала при наличии неполной информации. Ситуация полной информации – это чисто теоретическая ситуация. На реальном рынке всегда будет только неполная информация, поэтому решение задачи оптимизации при неполной информации – это единственное решение, которое будет иметь инвестор на реальном рынке.

Список литературы: **1.** *Kraft H.* Optimal portfolio and Heston's stochastic volatility model: an explicit solution for power utility / *H. Kraft* // Quantitative Finance. – 2005. – Vol. 5, Issue 3. – P. 303–313. **2.** *Липцер Р. Ш.* Статистика случайных процессов / *Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяее* // М. : Наука, 1974. – 696 с. **3.** *Bain A.* Fundamentals of Stochastic Filtering / *A. Bain, D. Crisan* // Springer Science + Business Media, LLC, 2009. – 366 p. **4.** *Казаков И. Е.* Статистическая динамика нелинейных автоматических систем / *И. Е. Казаков, Б. Г. Доступов* // М. : Физматгиз, 1962. – 332 с. **5.** *Hahn M.* Portfolio optimization with non-constant volatility and partial information / *M. Hahn, W. Putschoegl, J. Sas* // Brazilian Journal of Probability and Statistics. – 2007. – Vol. 21. – P. 27– 61. **6.** *Brendle S.* Portfolio selection under incomplete information / *S. Brendle* // Stochastic Processes and their Applications. – 2006. – Vol. 116. – P. 701–723. **7.** *Путятина А. Е.* Управление негосударственными пенсионными фондами в условиях развивающейся экономики / *А. Е. Путятина* // Вестник НТУ «ХПИ». – 2007. – № 3.

Надійшла до редколегії 11.12.2012