УПРАВЛІННЯ В ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS

DOI: 10.20998/2079-0023.2024.01.04
УДК 681.5

О. С. КУЦЕНКО, доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій, м. Харків, Україна; e-mail: Oleksandr.Kutsenko@khpi.edu.ua; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6059-3694
М. І. БЕЗМЕНОВ, кандидат технічних наук (PhD), доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій, м. Харків, Україна; e-mail: Mykola.Bezmenov@khpi.edu.ua; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2995-2350
С. В. КОВАЛЕНКО, кандидат технічних наук (PhD), доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій, м. Харків, Україна; e-mail: Serhii.Kovalenko@khpi.edu.ua; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8763-0862

ДВА ПІДХОДИ ДО ФОРМУВАННЯ КІЛЬКІСНОЇ МІРИ СТІЙКОСТІ НА ОСНОВІ МНОЖИННИХ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ АНСАМБЛЮ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Стаття присвячена подальшому розвитку теорії стійкості динамічних систем, а саме кількісним методам оцінки стійкості. Проведено огляд та дано критичний аналіз різних підходів, що дозволяють тією чи іншою мірою запровадити кількісну міру стійкості динамічних систем. Обґрунтовано обмеженість існуючих методів, яка пов'язана насамперед з оцінкою поведінки перехідних процесів окремих траєкторій, а також зі складністю отримання оцінки поведінки ансамблю перехідних процесів при спробі застосування методів Н. Д. Моїсеєва. Обґрунтовано метод кількісної оцінки стійкості динамічної системи на основі чисельних оцінок поведінки області початкових відхилень від положення рівноваги на траєкторіях динамічної системи. Виходячи з формули Ліувілля, показано, що зміна об'єму області початкових відхилень на траєкторіях системи не залежить від форми останньої. Це дозволило обмежитися областю початкових відхилень у формі гіперсфери та отримати простий вираз для кількісної міри стійкості лінійної стаціонарної динамічної системи, геометричний зміст якої полягає в оцінці швидкості зміни об'єму контрольної поверхні. У статті запропоновано та обґрунтовано критерій рівномірності деформації області початкових відхилень. Суть проблеми полягає в тому, що в перехідному процесі значення деяких компонентів фазового вектора можуть досягати неприпустимих відхилень від положення рівноваги. Отримана теоретична оцінка нерівномірності деформації для лінійних систем, за яку прийнято відхилення сліду матриці еліпсоїда відхилень до сліду матриці гіперсфери відповідного об'єму. Запропоновано та обґрунтовано метод кількісної оцінки стійкості на основі інтегрального квадратичного функціоналу, обчисленого на множині перехідних процесів при початкових відхиленнях у формі множини еліпсоїдів з нормованим об'ємом. Як множина матриць інтегрального квадратичного критерію розглядаються діагональні додатні нормовані матриці. Запропоновано простий алгоритм обчислення множинного інтегрального квадратичного критерію.

Ключові слова: стійкість, технічна стійкість, еліпсоїд відхилень, положення рівноваги, інтегральний квадратичний функціонал, перехідний процес.

Вступ. Серед безлічі понять та визначень теорії автоматичного управління особливе значення мають такі фундаментальні якісні властивості керованих процесів як стійкість, керованість, спостережуваність та інші, що визначають принципову можливість вирішення тих чи інших задач управління.

У той самий час на практиці важливо представляти – якою мірою керований процес має ті чи інші із зазначених властивостей. Особливе значення кількісних оцінок якісних показників проявляється за умов невизначеностей різних параметрів математичних моделей досліджуваних процесів, і навіть під час вирішення задач параметричного синтезу регуляторів автоматичних систем.

Метою цього дослідження є обґрунтування низки кількісних заходів, що характеризують множинну поведінку стійких динамічних систем поблизу положення рівноваги.

Огляд та аналіз методів кількісної оцінки стійкості динамічних систем. Основні положення теорії стійкості динамічних систем, фундаментальні основи якої сформульовані О. М. Ляпуновим [1] та отримали подальший розвиток у працях Н. Г. Четаєва, І. Г. Малкіна, Г. Н. Дубошина, Н. Д. Мойсеєва, Є. О. Барбашина, Н. Н. Красовського, А. А. Мартинюка та інших, характеризуються одним основним недоліком – якісною бінарною оцінкою стійкості динамічної системи та відсутністю будь-яких кількісних оцінок цієї властивості. Слід зазначити, що якісній теорії стійкості передували окремі кількісні оцінки стійкості, що виникли з реальних практичних задач [2, 3]. У 1749 р. Л. Ейлер у своїй фундаментальній роботі «Корабельна наука» сформулював міру стійкості як момент, що відновлює рівновагу сили, який розвивається після того, як плаваюче тіло було відхилено від положення рівноваги. У 1837 р. К. Ф. Гауссом була введена багато в чому інтуїтивна та проста кількісна міра стійкості у вигляді логарифмічного декременту згасання.

Вперше постановку задачі про кількісну оцінку стійкості динамічних систем було сформульовано Н. Д. Мойсеєвим. У [2] їм запроваджено поняття «градієнт стійкості» і «імовірність стійкості», що дозволяють дати чисельну оцінку множині збурених рухів.

Запропоновані М. Д. Моїсеєвим міри стійкості, засновані на кількісних оцінках розмірів областей відхилення від положення рівноваги множини фазових траєкторій, що починаються в деякій фіксованій області фазового простору. Таким чином, підхід М. Д. Моїсеєва став кількісним розвитком Ляпунівського формулювання стійкості, в якій стверджується існування деяких наперед заданих областей фазового простору, в яких починаються і закінчуються фазові траєкторії стійких динамічних систем. Основним недоліком цих підходів є відсутність часових показників, що характеризують еволюцію області початкових збурень через рішення диференціальних рівнянь сталої системи.

Слід зазначити, що ідеологія множинного підходу до аналізу керованих динамічних систем була використана в роботах О. А. Красовського [4], О. Б. Куржанського [5], Ф. Л. Чорноусько [6]. Питання еволюції множини рішень системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь при еліпсоїдальній ділянці початкових значень розглянуті в [7] та [8].

З розвитком теорії та практики автоматичного управління процесами в технічних системах намітився напрямок близький, по суті, кількісній оцінці стійкості – це чисельна оцінка якості перехідних процесів у стійких системах автоматичного управління (САУ). Найбільш «корисними» з практичної точки зору видаються прямі показники якості одновимірних САУ: час перехідного процесу, перерегулювання, коливальність та ін, запроваджені в практику В. В. Солодовниковим [9].

Крім свого практичного значення для одновимірних САУ, прямі показники якості перехідних процесів мають принципове методологічне значення при обґрунтуванні аналогічних критеріїв для багатовимірних САУ. Зокрема, у [10] запропоновано один з можливих підходів до оцінки якості багатовимірних САУ. Його суть зводиться до вектора прямих показників якості по кожній регульованій змінній. Скалярні показники утворюються в результаті лінійної згортки всіх компонентів вектора показників або на підставі вибору найгіршої компоненти в якості визначальної.

Слід зазначити, що обчислення прямих показників якості є в загальному випадку досить складним завданням, пов'язаним з великими обсягами обчислень множини фазових траєкторій диференціальних рівнянь у багатовимірному просторі та аналізом розташування характерних точок траєкторій, які визначають прямі показники якості. Вочевидь, що такий підхід орієнтований переважно на задачу аналізу сконструйованої САУ. Для вирішення задач структурного та параметричного синтезу такий підхід є малоефективним.

Найбільшого поширення набули непрямі критерії якості САУ. Це пов'язано, передусім, з тим, що вони не вимагають складних обчислень і щодо них можуть бути запропоновані методи синтезу САУ, які оптимізують ці критерії. Серед непрямих критеріїв слід виділити дві групи, перша з яких базується на розподілі коренів характеристичного рівняння, а друга ґрунтується на інтегральних оцінках норм перехідних процесів у функціональному просторі.

Кореневі методи [11] дозволяють приблизно оцінити такі характеристики, як час перехідного процесу, так і коливальні показники системи. В основу кореневих методів покладено два параметри, що характеризують розподіл коренів характеристичного рівняння – ступінь стійкості η та коливальність μ . На жаль, лише для ряду окремих випадків початкових умов вдається встановити однозначний зв'язок між μ та η й прямими показниками якості: часом перехідного процесу та перерегулюванням. Обмеженість методів оцінки якості перехідних процесів за найближчими до уявної осі коренями характеристичного рівняння апріорі обумовлена повним ігноруванням всього спектра лінійного оператора системи диференціальних рівнянь, а також множини допустимих початкових відхилень від положення рівноваги.

Одним з підходів, що дозволяють врахувати весь спектр коренів характеристичного рівняння, є оцінка швидкодії з урахуванням среднегеометричного значення коренів [12]. Водночас і цей опосередкований показник динамічних властивостей САУ не дозволяє одержати оцінки перехідних процесів з погляду прямих показників якості.

Непряма оцінка якості перехідних процесів у стійкій системі на основі інтегральних квадратичних функціоналів (ІКФ), запропонована в 1946 р. М. Д. Моїсеєвим та О. А. Красовським [3], вже багато десятиліть залучає дослідників у галузі аналізу та синтезу САУ. Це зумовлено насамперед тим, що з лінійних систем ІКФ досить легко обчислюється без інтегрування системи диференціальних рівнянь. Обчислення ІКФ зводиться до розв'язання алгебраїчного лінійного матричного рівняння Ляпунова, методи розв'язання якого добре розроблені. У той самий час, оцінці обуреного руху динамічної системи з урахуванням ІКФ властивий ряд важливих недоліків. Насамперед, результатом обчислення ІКФ деякого локального перехідного процесу є величина ніяк не пов'язана з практичними критеріями якості. По-друге, його величина залежить від вагових коефіцієнтів квадратичної форми, вибір яких у багатьох випадках здійснюється суб'єктивно.

Ще одним із підходів до кількісної оцінки стійкості динамічних систем можна вважати методи, що ґрунтуються на оцінці евклідової норми вектора стану [13, 14]. На жаль, ці методи у ряді випадків можуть дати значну похибку, оскільки вони засновані на максимальній та мінімальній величинах власних значень симетричних матриць, що однозначно залежать від вихідної матриці динамічної системи.

Заходи стійкості динамічних систем на основі технічної стійкості. Перейдемо тепер до кількісних показників, що характеризують множину процесів переходу в положення рівноваги стійких систем. Ряд таких показників тісно пов'язаний з поняттям технічної стійкості, запровадженим Н. Д. Моїсеєвим [15]. Технічна стійкість на відміну від стійкості за Ляпуновим дозволяє пов'язати час із зміною параметрів деякої області, що оточує положення рівноваги стійкої системи. Існує безліч визначень технічної стійкості, але узагальнюючою є таке визначення [16]. Нехай рівняння обуреного руху мають вигляд

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}, t\right),\ \boldsymbol{x} \in R^n,\ t \in \left[t_0, t_0 + T\right], \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{f}$ – вектор-функція, безперервна по t і диференційована по $\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{w} \in W$ – вектор конструктивних параметрів системи, а $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{w}, t\right) \equiv \boldsymbol{0}$. Нехай також задані дві компактні підмножини $G_{t_0} \subset R^n$ та $G_T \subset R^n$. Тоді нульове рішення системи (1) технічно стійко, якщо існує хоча б один вектор такий, що всі інтегральні криві системи (1), що починаються при $t = t_0$ на контрольній множині G_{t_0}, не виходять за межі множини G_T при $t \in \left[t_0, t_0 + T\right]$. Якщо розглядати систему (1) при фіксованому векторі, то висновок про технічну стійкість залежить від задавання чотирьох об'єктів $\left(G_{t_0}, G_T, t_0, T\right)$. Таке визначення технічної стійкості дає шлях побудови різних кількісних заходів стійкості, мають наочний геометричний і фізичний сенс [17].

Зафіксуємо t_0 і G_{t_0} та побудуємо множину G_t, що є множиною точок всіх траєкторій системи (1) у момент часу t, що починаються на множині G_{t_0}. Множина траєкторій рішень системи (1) у $\left(n+1\right)$-вимірному просторі утворює деяку трубку L перетин якої перпендикулярно до осі часу являє собою область G_t (рис. 1)

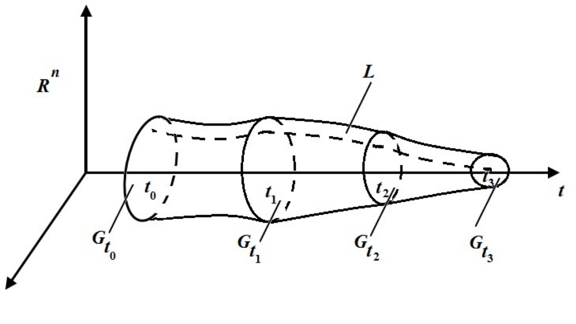

Рис. 1. Множина інтегральних траєкторій сталої системи

Еволюція області G_t у часі визначає макроскопічну поведінку ансамблю траєкторій динамічної системи. Таке уявлення поведінки динамічної системи дозволяє шляхом введення числових характеристик $\rho\left(G_t\right)$ окремих перерізів G_t трубки L і всієї L у цілому отримати кількісні оцінки, що характеризують здатність стійкої динамічної системи досягати положення рівноваги. Як числові характеристики множини G_t можуть бути обрані такі скалярні міри замкнутих множин, як об'єм або діаметр.

Введемо у розгляд величину $\varepsilon\left(t\right) = \dfrac{\rho\left(G_t\right)}{\rho\left(G_{t_0}\right)}$ – ступінь стиснення контрольної множини. Вочевидь, що з стійкої системи $\varepsilon\left(t_0\right) = 1$, а $\varepsilon\left(t\right) \to 0$ при $t \to \infty$.

Таким чином, якщо залежність $\varepsilon\left(t\right)$ відома, можна запропонувати ряд числових характеристик, що описують процес збіжності ансамблю фазових траєкторій, які починаються на заданій контрольній множині G_{t_0}. До таких показників за аналогією з прямими показниками якості перехідних процесів одновимірних систем автоматичного регулювання може бути віднесено умовний час t^*, який відповідає заданому значенню ступеня стиснення ε^*. Ще одним із кількісних показників є інтегральний показник

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \varepsilon\left(t\right) dt, \qquad (2)$$

що являє собою відносний об'єм трубки L. Цей показник має перевагу, що його величина не залежить від вибору ε^*.

Особливо просто ступінь стиснення фазового об'єму $\varepsilon\left(t\right)$ обчислюється у разі лінійних стаціонарних систем виду

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n, \qquad (3)$$

де A – $n \times n$ гурвіцева матриця.

Попередньо розглянемо систему однорідних звичайних диференціальних рівнянь загального вигляду

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right),\ x \in R^n, \qquad (4)$$

де $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)$ – n-вимірна диференційована вектор функція.

Нехай також задана довільна замкнута область $G_{t_0} \subset R^n$. Розглянемо множину траєкторій – рішень системи (4) з початковими умовами $\boldsymbol{x}\left(t_0\right) \in G_{t_0}$. Нехай також є G_t множина значень рішень системи (4) у момент часу t, що відповідають $\boldsymbol{x}\left(t_0\right) \in G_{t_0}$. Тоді для швидкості зміни об'єму області G_t [18] має місце співвідношення

$$\frac{dv}{dt} = \int_{G_t} \mathrm{div} f dx. \qquad (5)$$

У випадку лінійної системи (3), як неважко бачити,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{f} = \mathrm{div}\boldsymbol{Ax} = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}. \qquad (6)$$

Таким чином, вираз (5) з урахуванням (6) дає наступний результат:

$$\frac{dv}{dt} = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}\int_{G_t} dx \,. \qquad (7)$$

Очевидно, що інтеграл у правій частині (7) є об'ємом області $G_t \partial$. Отже, з (7) безпосередньо слідує диференціальне рівняння зміни об'єму контрольної області

$$\dot{v}(t) = v\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A} \,,$$

рішення якого можна записати як

$$v(t) = v(t_0)\,e^{\mathrm{tr}A(t-t_0)} . \qquad (8)$$

Оскільки система (3) автономна, нічого не заважає нам покласти $t_0 = 0$. Тоді ступінь стиснення фазового об'єму $\varepsilon(t)$ запишеться у вигляді

$$\varepsilon(t) = e^{\mathrm{tr}At} . \qquad (9)$$

Відповідно до (9) умовний час множинного перехідного процесу, що відповідає заданому ступеню стиснення фазового об'єму ε^*, може бути обчислений за формулою

$$t^* = \frac{\ln \varepsilon^*}{\mathrm{tr}\boldsymbol{A}} .$$

Слід зазначити те, що з лінійних систем функція $\varepsilon(t)$ а, отже, і t^* залежить від області G_{t_0} .

Вираз для ступеня стиснення фазового об'єму (9) дозволяє легко обчислити інтегральну міру стійкості (2):

$$J = \int_0^\infty e^{\mathrm{tr}\,At} dt = -\frac{1}{\mathrm{tr}\boldsymbol{A}} . \qquad (10)$$

Оцінка нерівномірності деформації у контрольній області. Оцінки ступеня стиснення деякої області фазового простору стійкої системи, отримані вище, інваріантні стосовно її конфігурації. Разом з тим, у перехідному процесі значення деяких компонент фазового вектора можуть в окремі моменти часу досягати значних відхилень від рівноваги, що є деяким аналогом перерегулювання в одновимірних системах автоматичного регулювання. Таким чином, нерівномірність деформації контрольної області фазового простору на рішеннях системи диференціальних рівнянь є ще однією характеристикою перехідного множинного процесу. Для оцінки нерівномірності деформації контрольної області розглянемо комплекс фазових траєкторій, що починаються з одиничної кулі. Тоді послідовність областей являтиме собою еліпсоїди

$$G_t = \left\{ \boldsymbol{x} \middle| \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}^{-1}(t) \boldsymbol{x} \le 1 \right\} . \qquad (11)$$

Неважко переконатися простою перевіркою, що матриця задовольняє матричному диференціального рівнянню

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \,, \boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{E} \,. \qquad (12)$$

Рішення (12) можна подати у вигляді

$$\boldsymbol{R}(t) = \sum_{i,j} \boldsymbol{U}_{ij} \mathrm{tr} \boldsymbol{V}_{ij} e^{\lambda_{ij} t} \,, \qquad (13)$$

де $\lambda_{ij} = \lambda_i + \lambda_j$, $\boldsymbol{U}_{ij} = \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{V}_{ij} = \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}$, $i, j = \overline{1,n}$, а $\boldsymbol{u}_i$ і $\boldsymbol{v}_i$ – власні вектори матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, що відповідають власним числам λ_i матриці $\boldsymbol{A}$. При цьому системи векторів $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n)$ і $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n)$ квазібіортогональні [19] і нормовані: $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера.

Матриці $\boldsymbol{U}_{ij}$ і $\boldsymbol{V}_{ij}$ являють собою власні вектори взаємно пов'язаних матричних лінійних операторів $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ і $\hat{\boldsymbol{A}}^*(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$, що відповідають власним числам λ_{ij} операторів $\hat{\boldsymbol{A}}$ і $\hat{\boldsymbol{A}}^*$ й утворюють квазібіортогональні базиси в просторі $n \times n$ квадратних матриць. Квазібіортогональність базисних систем $\boldsymbol{U}_{ij}$ і $\boldsymbol{V}_{ij}$ випливає з квазібіортогональності систем власних векторів $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n)$ та $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n)$. З умови нормування для $\boldsymbol{u}_i$ і $\boldsymbol{v}_j$ випливає аналогічна умова для матриць $\boldsymbol{U}_{ij}$ і $\boldsymbol{V}_{ks}$: $(\boldsymbol{U}_{ij}, \boldsymbol{V}_{ks}) = \delta_{ijks}$, де $\delta_{ijks} = 1$ при $i = j = k = s$ і нулю інакше.

Оскільки власні числа матричних лінійних операторів можуть бути дійсними або комплексно пов'язаними, то є сенс розглянути структуру рішення (13) для зазначених класів власних чисел окремо.

Для дійсних λ_{ij} доданки рішення (13) матимуть вигляд (13).

Для кожної комплексно пов'язаної пари $\lambda_{ij} = \alpha_{ij} \pm i\beta_{ij}$ шукатимемо відповідну суму часткових рішень $\boldsymbol{R}_{ij}(t)$ та $\bar{\boldsymbol{R}}_{ij}(t)$

$$\boldsymbol{R}_{ij}(t) + \bar{\boldsymbol{R}}_{ij}(t) = \boldsymbol{U}_{ij} \mathrm{tr} \boldsymbol{V}_{ij} e^{(\alpha_{ij} + i\beta_{ij})t} + \bar{\boldsymbol{U}}_{ij} \mathrm{tr} \bar{\boldsymbol{V}}_{ij} e^{(\alpha_{ij} - i\beta_{ij})t} \,, \quad (14)$$

де $\boldsymbol{U}_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij} + i\boldsymbol{B}_{ij}$, $\bar{\boldsymbol{U}}_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij} - i\boldsymbol{B}_{ij}$, $\boldsymbol{V}_{ij} = \boldsymbol{C}_{ij} + i\boldsymbol{D}_{ij}$, $\bar{\boldsymbol{V}}_{ij} = \boldsymbol{C}_{ij} - i\boldsymbol{D}_{ij}$; $\boldsymbol{A}_{ij}, \boldsymbol{B}_{ij}, \boldsymbol{C}_{ij}, \boldsymbol{D}_{ij}$ – дійсні $n \times n$ матриці.

Підставляючи останні співвідношення в (14), отримаємо

$$\boldsymbol{R}_{ij}(t) + \bar{\boldsymbol{R}}_{ij}(t) =$$

$$= \left(\boldsymbol{P}_{ij} + i\boldsymbol{S}_{ij}\right) e^{(\alpha_{ij} + i\beta_{ij})t} + \left(\boldsymbol{P}_{ij} - i\boldsymbol{S}_{ij}\right) e^{(\alpha_{ij} - i\beta_{ij})t} \,, \qquad (15)$$

де

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij} \mathrm{tr}\, \boldsymbol{C}_{ij} - \boldsymbol{B}_{ij} \mathrm{tr}\, \boldsymbol{D}_{ij} \,,$$
$$\boldsymbol{S}_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij} \mathrm{tr}\, \boldsymbol{D}_{ij} + \boldsymbol{B}_{ij} \mathrm{tr}\, \boldsymbol{C}_{ij} \,.$$

Після переходу в (15) до тригонометричної форми комплексних чисел отримаємо остаточно

$$\boldsymbol{R}_{ij}(t) + \bar{\boldsymbol{R}}_{ij}(t) = 2\left(\boldsymbol{P}_{ij} \cos \beta_{ij} t - \boldsymbol{S}_{ij} \sin \beta_{ij} t\right) e^{\alpha_{ij} t} .$$

Таким чином, загальне рішення матричного диференціального рівняння (12), що описує еволюцію одиничної кулі на рішеннях лінійної системи диференціальних рівнянь, остаточно набуде вигляду

$$\boldsymbol{R}(t) = \sum_{i,j} \boldsymbol{R}_{ij} e^{\lambda_{ij} t} + 2\sum_{i,j} (\boldsymbol{P}_{ij} \cos \boldsymbol{\beta}_{ij} t - \boldsymbol{S}_{ij} \sin \boldsymbol{\beta}_{ij} t) e^{\boldsymbol{\alpha}_{ij} t} \,, \quad (16)$$

де перша сума береться за всіма парами (i, j), що відповідають дійсним, а друга – комплексно пов'язаним власним значенням оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$.

Приймемо як кількісну міру нерівномірності стійкості величину сліду матриці $\boldsymbol{R}(t)$, що є сумою квадратів довжин півосей еліпсоїда (11).

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{R}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k .$$

Неважко показати, що величина $\operatorname{tr}\boldsymbol{R}(t)$ при фіксованому об'ємі еліпсоїда буде мінімальна для сфери. Справді, умова сталості об'єму еліпсоїда еквівалентна умові

$$\prod_{k=1}^{n} c_k = C , \tag{17}$$

де C – деяка стала.

Складемо функцію Лагранжа

$$F\left(c_1,\ldots,c_n,\mu\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k + \mu\left(\prod_{k=1}^{n} c_k - C\right). \tag{18}$$

Диференціюючи (18) по c_k $(k = \overline{1,n})$ і прирівнюючи результати нулю, отримаємо систему n рівнянь

$$\begin{aligned} &1+\mu c_2 c_3 \ldots c_n = 0,\\ &1+\mu c_1 c_3 \ldots c_n = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &1+\mu c_1 c_2 \ldots c_{n-1} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

З (19) та умови зв'язку (17) неважко отримати:

$$c_k = -\mu C ,\ k = \overline{1,n} ,$$

з чого випливає справедливість твердження про мінімум величини сліду матриці $\boldsymbol{R}$ для сфери, як еліпсоїда фіксованого об'єму.

Таким чином, як показник нерівномірності деформації контрольної множини будемо розглядати відношення сліду матриці $\boldsymbol{R}(t)$ до сліду матриці кулі еквівалентного об'єму. Оскільки об'єм кулі можна обчислити за формулою (8), то її радіус

$$r = \sqrt[n]{e^{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}t}} .$$

Тоді шуканий показник нерівномірності деформації одиничної кулі набуде вигляду

$$\sigma\left(t\right) = \frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{R}(t)}{n\sqrt[n]{e^{2\operatorname{tr}\boldsymbol{A}t}}} .$$

Замість величини $\operatorname{tr}\boldsymbol{R}(t)$ зручно користуватися її оцінкою, замінивши коливальні доданки в (16) їх амплітудами:

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{R}(t) \le \sum_{i,j} \boldsymbol{R}_{ij} e^{\lambda_{ij} t} + 2\sum_{i,j} \sqrt{\boldsymbol{R}_{ij}^2 + \boldsymbol{J}_{ij}^2}\, e^{\alpha_{ij} t} ,$$

а як кількісну міру деформації можна прийняти максимальне значення $\sigma(t)$ на інтервалі $\left[0, t^*\right]$.

Міра стійкості на основі інтегральних квадратичних функціоналів. Кількісна оцінка ансамблю траєкторій стійкої динамічної системи може бути отримана на основі ІКФ, обчисленого для кожної окремої траєкторії, початкова точка якої належить деякій фіксованій області фазового простору [20]. Вибір ІКФ як міри окремої траєкторії обґрунтований відносною простотою його обчислення. Дійсно, для стійкої системи (3) величина ІКФ

$$J = \int_0^\infty \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(t\right)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\left(t\right)dt , \tag{20}$$

де $\boldsymbol{Q}$ – деяка сильвестрова матриця, що обчислюється у вигляді

$$J = \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}_0 , \tag{21}$$

де $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}\left(0\right) \in X$, $\boldsymbol{P}$ – рішення матричного рівняння Ляпунова

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0} . \tag{22}$$

Таким чином величина локального критерію (20) залежить від стартової точки і матриці квадратичної форми і може бути обчислена на основі рішення рівняння (22) і підстановки $\boldsymbol{x}_0$ та $\boldsymbol{P}$ у (21).

Множинна міра стійкості для ансамблю фазових траєкторій, що починаються з X_0 на основі ІКФ (20), може бути отримана в результаті обчислення інтеграла

$$\overline{J} = \int_{X_0} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n . \tag{23}$$

В якості контрольної множини X_0 приймемо деякий еліпсоїд θ, що належить множині еліпсоїдів $\overline{\theta}$, приведених до головних осей і нормованих за об'ємом

$$\begin{aligned} \overline{\theta} = \Big\{\theta \Big| \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{x} \le 1,\ \ &\boldsymbol{R} = \operatorname{diag}\left\{r_1, r_2, \ldots, r_n\right\},\\ r_k > 0,\ \ &\prod_{k=1}^{n} r_k = 1\Big\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Для обчислення (23) знайдемо перетворення $\boldsymbol{Z}$ координат

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{y} \tag{25}$$

таке, що симетричні матриці $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{R}^{-1}$ одночасно приводяться до діагональної форми, причому $\boldsymbol{R}^{-1}$ в координатах $\boldsymbol{y}$ є одиничною матрицею.

Для цього, слідуючи [21], знайдемо власні числа $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ пучка матриць $\left(\boldsymbol{P} - \rho\boldsymbol{R}^{-1}\right)$. Вирішуючи n систем лінійних однорідних рівнянь

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}_k = \rho_k \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z}_k ,\ k = \overline{1,n} \tag{26}$$

і нормуючи $\boldsymbol{z}_k$ у $\boldsymbol{R}^{-1}$ метриці

$$\boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z}_k = \delta_{ik}, \quad \forall i, k = \overline{1,n} ,$$

отримаємо матрицю шуканого перетворення $\boldsymbol{Z}$ у вигляді

$$\boldsymbol{Z} = \left(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_n\right) .$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z} &= \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n\}, \\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} &= \boldsymbol{E}, \end{aligned} \tag{27}$$

тобто в координатах $\boldsymbol{y}$ еліпсоїд θ відобразитися у сферу одиничного радіусу.

Обчислимо множинний ІКФ (23) з урахуванням (25) та (27):

$$\int_{\theta} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}dx_1dx_2\ldots dx_n = \int_{y^T y\le 1}\sum_{k=1}^{n}\rho_k y_k^2 |\boldsymbol{Z}| dy_1dy_2\ldots dy_n =$$

$$= |\boldsymbol{Z}|\sum_{k=1}^{n}\rho_k \int_{y^T y\le 1} y_k^2 dy_1dy_2\ldots dy_n = J_0|\boldsymbol{Z}|\sum_{k=1}^{n}\rho_k,$$

де J_0 постійна, залежить тільки від розмірності n системи [22]:

$$J_0 = \int_{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\le 1} y_k^2 dy_1dy_2\ldots dy_n = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{\pi^2}{\Gamma\left(2+\frac{\pi}{2}\right)}$$

а визначник $|\boldsymbol{Z}|$ можна обчислити виходячи з (27), скориставшись відомими співвідношеннями теорії визначників

$$\left|\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\mathrm{Z}\right| = \left|\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\right|\left|\boldsymbol{R}^{-1}\right|\left|\boldsymbol{Z}\right| = |\boldsymbol{Z}|^2|\boldsymbol{R}|^{-1} = 1,$$

з чого випливає

$$|\boldsymbol{Z}| = |\boldsymbol{R}|^{1/2}. \tag{28}$$

Оскільки $\boldsymbol{R}^{-1}$ матриця еліпсоїда, то визначник $|\boldsymbol{R}| > 0$, тобто співвідношення (33) коректне. Крім того, з (26) випливає, що власні числа пучка матриць $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}^{-1})$ збігаються з власними числами $\lambda_k(\boldsymbol{RP})$ матриці $\bar{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{RP}$.

Таким чином, множинна оцінка ІКФ при початкових умовах усередині еліпсоїда θ набуде вигляду

$$\bar{J} = J_0|\boldsymbol{R}|^{1/2}\operatorname{tr}\boldsymbol{RP}. \tag{29}$$

Для вибраного класу еліпсоїдів $\bar{\theta}$ (24) вираз (29) можна подати у вигляді

$$\bar{J} = J_0\sum_{k=1}^{n} p_{kk}r_k, \tag{30}$$

де p_{kk} – k-й діагональний елемент матриці $\boldsymbol{P}$.

Оскільки матриця $\boldsymbol{P}$ залежить від вибору вагової матриці $\boldsymbol{Q}$ критерію (20), то для зниження ступеня суб'єктивізму при множинній оцінці ІКФ на множині початкових умов введемо оцінку ІКФ на множині вагових матриць $\bar{\boldsymbol{Q}}$. У якості $\bar{\boldsymbol{Q}}$ виберемо множину діагональних додатних нормованих матриць

$$\bar{\boldsymbol{Q}} = \left\{\operatorname{diag}\{q_1, q_2, \ldots, q_n\} \middle| q_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} q_i = 1,\ i = \overline{1,n}\right\}. \tag{31}$$

Величини p_{kk}, що входять у (30), є рішеннями системи лінійних рівнянь (22) і можуть бути представлені у вигляді

$$p_{kk} = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}q_i, \tag{32}$$

де коефіцієнти c_{ik} залежить тільки від параметрів $\boldsymbol{A}$ динамічної системи. Після підстановки (32) у (30) отримаємо

$$\bar{J} = J_0\sum_{k=1}^{n} r_k\sum_{i=1}^{n} c_{ik}q_i.$$

Обчислимо тепер множинну оцінку $\bar{J}$ на множині допустимих вагових матриць $\bar{\boldsymbol{Q}}$ у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \int_{\bar{Q}}\bar{J}dq_1dq_2\ldots dq_n = J_0\int_{\bar{Q}}\sum_{k=1}^{n} r_k\sum_{i=1}^{n} c_{ik}q_i dq_1dq_2\ldots dq_n = \\ &= J_0\sum_{k=1}^{n} r_k\sum_{i=1}^{n} c_{ik}\int_{\bar{Q}} q_i dq_1\ldots dq_n. \end{aligned} \tag{33}$$

Оскільки всі інтеграли $\int_{\bar{Q}} q_i dq_1dq_2...dq_n$ не залежать від індексу, то співвідношення (33) можна переписати у вигляді

$$\tilde{J} = J_0C_0\sum_{k=1}^{n} r_kC_k, \tag{34}$$

де $C_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}$, C_0 – постійна, що залежить тільки від розмірності.

Величина критерію $\tilde{J}$ (34) залежить від вибору параметрів початкового еліпсоїда $(r_1, r_2 ... r_n)$, що задають конкретний еліпсоїд $\theta \in \bar{\theta}$. Обчислимо множинну оцінку величини ІКФ на множині еліпсоїдів $\bar{\theta}$ (24) у вигляді

$$\hat{J} = J_0C_0\int_{\substack{r_1r_2\ldots r_n = 1\\ r_1, r_2, \ldots, r_n > 0}}\sum_{k=1}^{n} r_kC_k dr_1dr_2\ldots dr_n.$$

Останній інтеграл можна подати у вигляді

$$\hat{J} = J_0C_0\sum_{k=1}^{n} C_k\int_{\substack{r_1r_2\ldots r_n = 1\\ r_1, r_2, \ldots, r_n > 0}} r_k dr_1\ldots dr_n. \tag{35}$$

Величина інтеграла (35) не залежить від індексу k і являє собою деяку постійну R_0, що залежить тільки від розмірності n. Таким чином, множинна оцінка ІКФ на множині еліпсоїдальних початкових умов і множині вагових матриць набуде вигляду

$$\hat{J} = J_0C_0R_0\sum_{k=1}^{n} C_k.$$

Таким чином, величина множинного ІКФ на множині початкових еліпсоїдів (24), виміряних множиною вагових матриць (31) пропорційна величині

$$J^* = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ik} \; . \qquad (36)$$

Для знаходження коефіцієнтів матриці c_{ik} шукатимемо рішення рівняння Ляпунова (22) у вигляді

$$\boldsymbol{P} = q_1\boldsymbol{P}_1 + q_2\boldsymbol{P}_2 + \ldots + q_n\boldsymbol{P}_n \,, \qquad (37)$$

де $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n$ – $n \times n$ симетричні матриці, що підлягають визначенню.

Підставимо (37) до (22). У результаті отримаємо

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \sum_{k=1}^{n} q_k \boldsymbol{P}_k + \sum_{k=1}^{n} q_k \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{A} + \operatorname{diag}\left\{q_1, q_2, \ldots, q_n\right\} = \boldsymbol{0}$$

або

$$\sum_{k=1}^{n} q_k \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k + \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{A}\right) + \operatorname{diag}\left\{q_1, q_2, \ldots, q_n\right\} = 0 \,.$$

З останнього співвідношення випливає, що матриці $\boldsymbol{P}_k$ задовольняють матричним рівнянням виду

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k + \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{A} + \operatorname{diag}\left\{0, 0, ..., 1, 0, ...\right\} = 0 \,, \; k = \overline{1, n} \,, \quad (38)$$

де одиничний елемент на діагоналі знаходиться на k-му місці, відраховуючи від верхнього лівого кута.

Тоді для будь-якого діагонального елемента p_{kk} матриці $\boldsymbol{P}$ на підставі (37) можна записати

$$p_{kk} = p_{kk}^1 q_1 + \ldots + p_{kk}^n q_n \,, \qquad (39)$$

де p_{kk}^i – k-й діагональний елемент матриці $\boldsymbol{P}_i$. Порівнюючи (39) і (32) приходимо до висновку, що $c_{ik} = p_{kk}^i$, а величина критерію (36) може бути подана як

$$J^* = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{kk}^i = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr}\boldsymbol{P}_i \,.$$

Звернемо увагу на те, що замість розв'язання n рівнянь Ляпунова (38) для знаходження J^* можна обмежитись рішенням одного матричного рівняння

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \,. \qquad (40)$$

Справді, виберемо $q_1 = q_2 = ... = q_n = 1$. Тоді з (37) випливає $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i$ або $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr} P_i = \operatorname{tr}\boldsymbol{P}$. Отже, остаточно:

$$J^* = \operatorname{tr}\boldsymbol{P} \,,$$

де $\boldsymbol{P}$ – розв'язок рівняння (40).

Висновки. Запропоновано та обґрунтовано низку підходів до кількісної міри стійкості однієї з фундаментальних якісних характеристик динамічних систем. В основу запропонованих підходів покладено множинну кількісну оцінку ансамблю траєкторій стійких динамічних систем, що починаються в заданій області фазового простору. Запропоновані методи досить просто реалізуються за допомогою відомих обчислювальних процедур лінійної алгебри та теорії матриць: розв'язання проблеми власних значень та розв'язання матричного рівняння Ляпунова, що є в пакеті MatLab.

Список використаної літератури

1. Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения.* Москва: Гостехиздат, 1950. 471 с.
2. Моисеев Н. Д. Количественный аспект теории устойчивости. *Записки семинара по теории устойчивости движения.* Москва: ВВИА им. Жуковского, 1943. Вып. 1. С. 95–105.
3. Красовский А. А. *О степени устойчивости линейных систем.* Труды ВВИА им. Жуковского, 1946. Вып. 281. С. 1–22.
4. Красовский А. А. *Фазовое пространство и статическая теория динамических систем.* Москва: Наука,1974. 232 с.
5. Куржанский А. Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* Москва: Наука, 1977. 392 с.
6. Черноусько Ф. А. *Оценивание фазового состояния динамических систем.* Москва: Наука, 1988. 319 с.
7. Подчукаев В. А. *Быстрые алгоритмы анализа и синтеза САР.* Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 112 с.
8. Михайлов Ф. А., Теряев Е. Д., Булеков В. П., Саликов Л. М., Диканова Л. С. *Динамика непрерывных линейных систем с детерминированными и случайными параметрами.* Москва: Наука, 1971. 558 с.
9. Солодовников В. В., Плотников В. Н., Яковлев А. В. *Основы теории и элементы систем автоматического регулирования.* Москва: Машиностроение, 1985. 536 с.
10. Александров А. Г. *Синтез регуляторов многомерных систем.* Москва: Машиностроение, 1986. 272 с.
11. Фельдбаум А. А. *Электрические системы автоматического регулирования.* Москва: Оборонгиз, 1957. 808 с.
12. Красовский А. А., Поспелов Г. С. *Основы автоматики и технической кибернетики.* Москва; Ленинград: Госэнергоиздат, 1962. 600 с.
13. Wazewski T. Sul la limitation des integrals systems d'équations différentielles lineares ordinaires. *Studia Mathematica*. 1948. Vol. 10. P. 48–59.
14. Андреев Ю. Н. *Управление конечномерными линейными объектами.* Москва: Наука, 1976. 424 с.
15. Моисеев Н. Д. О некоторых методах теории технической устойчивости. Ч. 1. *Труды ВВИА им. Жуковского.* Москва: ВВИА им. Жуковского, 1945. Вып. 135. С. 86–97.
16. Зубов И. В. *Математические методы исследования систем автоматического регулирования.* Ленинград: Судпромгиз, 1959. 324 с.
17. Куценко А. С., Коваленко С. В. Об одном подходе к количественной оценке степени устойчивости динамических систем. *Системи управління, навігації та зв'язку.* Київ: Центральний науково-дослідний інститут навігації і управління, 2011. Вип. 4 (20). С. 92–94.
18. Арнольд В. И. *Математические методы классической механики.* Москва: Наука, 1979. 431 с.
19. Ланкастер П. *Теория матриц.* Москва: Наука, 1973. 280 с.
20. Куценко А. С., Коваленко С. В. Количественная мера устойчивости на основе интегрального квадратичного функционала. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»: зб. наук. пр. Темат. вип.: Системний аналіз, управління та інформаційні технології.* Харків: НТУ «ХПІ», 2012. № 29. С. 3–9.
21. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1967. 575 с.
22. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Москва: Книга по Требованию, 2013. Том 3. 654 с.

References (transliterated)

1. Lyapunov A. M. *Obschaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya* [The general problem of the stability of motion]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1950. 471 p.
2. Moiseev N. D. *Kolichestvennyiy aspekt teorii ustoychivosti* [Quantitative aspect of stability theory]. *Zapiski seminara po teorii ustoychivosti dvizheniya* [Notes of the Seminar on the Theory of Stability of Motion]. Moscow, Zhukovsky Air Force Engineering Academy Publ., 1943, is. 1, pp. 95–105.
3. Krasovskii A. A. O stepeni ustoychivosti lineynyih sistem [About the degree of stability of linear systems]. *Trudyi VVIA im. Zhukovskogo* [Proc. Zhukovsky Air Force Engineering Academy]. 1946, is. 281, pp. 1–22.
4. Krasovskii A. A. *Fazovoe prostranstvo i staticheskaya teoriya dinamicheskih sistem* [Phase space and the static theory of dynamical systems]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 232 p.

5. Kurzhanskii A. B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyah neopredelennosti* [Control and observation under uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 392 p.
6. Chernousko F. A. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskih sistem* [Fast algorithms for analysis and synthesis of ACS,]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 319 p.
7. Podchukaev V. A. *Byistryie algoritmyi analiza i sinteza SAR* [Estimation of the phase state of dynamical systems]. Saratov, Saratov University Publ., 1986. 112 p.
8. Mikhailov F. A., Teriaev E. D., Bulekov V. P., Salikov L. M., Dikanova L. S. *Dinamika nepreryivnyih lineynyih sistem s determinirovannyimi i sluchaynyimi parametrami* [Dynamics of continuous linear systems with deterministic and random parameters]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 558 p.
9. Solodovnikov V. V., Plotnikov V. N., Yakovlev A. V. *Osnovyi teorii i elementyi sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [Fundamentals of the theory and elements of automatic adjustment systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 536 p.
10. Aleksandrov A. G. *Sintez regulyatorov mnogomernyih sistem* [Synthesis of multidimensional system regulators]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 272 p.
11. Feldbaum A. A. *Elektricheskie sistemyi avtomaticheskogo regulirovaniya* [Electrical automatic control system]. Moscow, Gosenergoizdat Publ., 1957. 808 p.
12. Krasovskii A. A., Pospelov G. S. *Osnovyi avtomatiki i tehnicheskoy kibernetiki* [Basics of automation and technical cybernetics]. Moscow-Leningrad, Oboroniz Publ., 1962. 600 p.
13. Wazewski T. Sul la limitation des integrals systems d'équations différentielles lineares ordinaires. *Studia Mathematica*. 1948, vol. 10, pp. 48–59.
14. Andreev Yu. N. *Upravlenie konechnomernyimi lineynyimi ob'ektami* [Control of finite-dimensional linear objects]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 424 p.
15. Moiseev N. D. O nekotoryih metodah teorii tehnicheskoy ustoychivosti. Ch. 1 [On some methods of the theory of technical stability Part 1]. *Trudyi VVIA im. Zhukovskogo* [Proc. Zhukovsky Air Force Engineering Academy]. 1945, is. 281, pp. 86–97.
16. Zubov I. V. *Matematicheskie metodyi issledovaniya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [Mathematical methods of automatic control systems research]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1959. 324 p.
17. Kutsenko A. S. Kovalenko S. V. Ob odnom podhode k kolichestvennoy otsenke stepeni ustoychivosti dinamicheskih system [On one approach to quantitative estimation of the degree of dynamic systems stability]. *Sistemi upravlinnya, navigatsiyi ta zv'yazku* [Control, Navigation and Communication Systems]. Kyiv, Tsentralniy naukovo-doslidniy institut navigatsiyi i upravlinnya Publ., 2011, is. 4 (20), pp. 92–94.
18. Arnold V. I. *Matematicheskie metodyi klassicheskoy mehaniki* [Mathematical methods of classical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 431 p.
19. Lancaster P. *Teoriya matrits* [Matrixes theory]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 280 p.
20. Kutsenko A. S. Kovalenko S. V. Kolichestvennaya mera ustoychivosti na osnove integralnogo kvadratichnogo funktsionala [Quantitative measure of stability based on integral quadratic functional]. *Vestnik Nats. tekhn. un-ta "KhPI": sb. nauch. tr. Temat. vyp.: Sistemnyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of the National Technical University "KhPI": a collection of scientific papers. Thematic issue: System analysis, control and information technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2012, no. 29, pp. 3–9.
21. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Matrixes theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 575 p.
22. Fikhtengolts G. M. *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. Tom 3* [Course of differential and integral calculus. Vol. 3]. Moscow, Kniga po Trebovaniyu Publ., 2013. 654 p.

Надійшла (received) 05.02.2024

UDC 681.5

O. S. KUTSENKO, Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Professor of the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies; Kharkiv, Ukraine; e-mail: Oleksandr.Kutsenko@khpi.edu.ua; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6059-3694

M. I. BEZMENOV, Candidate of Technical Sciences (PhD), Docent, National Technical University"Kharkiv Polytechnic Institute", Professor of the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies, Kharkiv, Ukraine; e-mail: Mykola.Bezmenov@khpi.edu.ua; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2995-2350

S. V. KOVALENKO, Candidate of Technical Sciences (PhD), Docent, National Technical University "Kharkiv PolytechnicInstitute", Professor of the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies, Kharkiv, Ukraine; e-mail: Serhii.Kovalenko@khpi.edu.ua; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8763-0862

TWO APPROACHES TO THE FORMATION OF A QUANTITATIVE MEASURE OF STABILITY BASED ON MULTIPLE ESTIMATES OF THE PARAMETERS OF AN ENSEMBLE OF TRANSIENT PROCESSES

The article is devoted to the further development of the theory of stability of dynamic systems, namely of quantitative methods of stability assessment. A review and critical analysis of various approaches, which allow to introduce a quantitative measure of stability of dynamic systems to one degree or another, is given. The limitations of the existing methods, which are primarily related to the assessment of the behavior of the transient processes of individual trajectories, as well as the difficulty of obtaining an assessment of the behavior of the ensemble of transient processes when trying to apply the methods of N. D. Moiseyev. are substantiated. A method of quantitative assessment of a dynamic system stability based on the numerical estimates of the behavior of the area of initial deviations from the equilibrium position on the trajectories of the dynamic system is substantiated. Based on the Liouville formula, it is shown that changes in the volume of the area of the initial deviations on the trajectories of the system does not depend on the form of the latter one. This allowed to limit the area of initial deviations in the shape of a hypersphere and to obtain a simple expression for a quantitative measure of the stability of a linear stationary dynamic system, the geometric sense of which is to estimate the rate of change of the volume of the control surface. The article proposes and substantiates the criterion of uniformity of deformation of the area of initial deviations. The essence of the problem is that in the transient process, the values of some components of the phase vector may reach unacceptable deviations from the equilibrium position. A theoretical estimate of deformation non-uniformity for linear systems is obtained, which is taken to be the deviation of the trace of the ellipsoid matrix from the deviations of the trace of the hypersphere matrix of the corresponding volume. A method for a quantitative measure of the stability based on an integral quadratic functional calculated on a set of transient processes of initial deviations in the form of a set of ellipsoids with a normalized volume is proposed and substantiated. Diagonal positive normalized matrices are considered as a set of matrices of the integral quadratic criterion. A simple algorithm for calculation of the multiple integral quadratic criterion is proposed.

Keywords: stability, technical stability, deviational ellipsoid, equilibrium position, integral quadratic functional, transient process.

Повні імена авторів / Author's full names

Автор 1 / Author 1: Куценко Олександр Сергійович / Kutsenko Oleksandr Serhiyovych

Автор 2 / Author 2: Безменов Микола Іванович / Bezmenov Mykola Ivanovych

Автор 3 / Author 3: Коваленко Сергій Володимирович / Kovalenko Serhii Volodimirovych