

А. С. МАЗМАНИШВИЛИ, д-р физ.-мат. наук, проф. СумГУ, Сумы;
А. Ю. СИДОРЕНКО, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПИ»

ПОВЫШЕНИЕ ПОРЯДКА ДВУМЕРНЫХ НОРМАЛЬНЫХ МАРКОВСКИХ ПОЛЕЙ

Розглянута задача моделювання нормальних марківських полів з підвищенням порядку. Представлені алгоритми генерації полів 1-го і 2-го порядків. Показано, що отримані результати можуть бути застосовані в задачах стохастичного моделювання.

Ключові слова: нормальне марківське поле, густина розподілу, функція розподілу.

Рассмотрена задача моделирования нормальных марковских полей с повышением порядка. Представлены алгоритмы генерации полей 1-го и 2-го порядков. Показано, что полученные результаты могут быть применены в задачах стохастического моделирования.

Ключевые слова: нормальное марковское поле, плотность распределения, функция распределения.

The problem of design of the normal fields of Markov is considered with the increase of order. The algorithms of generation of the fields are presented 1th and 2th orders. It is shown that the got results can be applied in the tasks of acceptance of stochastic design.

Keywords: the normal Markov field, increase of order, density distribution, function of distribution.

Введение. Вычислительные задачи стохастического моделирования начинаются с синтеза алгоритмов генерации случайных величин с необходимыми для данной задачи свойствами. При моделировании принято использовать допущение о декартовой структуре пространства, в котором разыгрываются случайные события. Это допущение распространяется и на сами случайные объекты, которые реализуются на отрезке, или в прямоугольнике, или, наконец, в многомерном гиперкубе [1, 2]. Известные алгоритмы опираются на прямоугольную декартову систему даже в тех случаях, когда исследуемый объект мало удобен при описании в прямоугольной системе, например, тор или цилиндр [2].

Алгоритмы генерации двумерных марковских полей [3, 4] приспособлены для построения полей лишь нулевого или первого порядка. Между тем, в задачах машиностроения [5] технической электродинамики [6], навигации [7] и других случайные поля должны характеризоваться, по крайней мере, вторым порядком. Это обусловлено, прежде всего, необходимостью их применения при моделировании динамических задач, в которых рассматриваются дифференциальные уравнения, порядок которых второй или выше.

В узлах внутри заданного прямоугольника будет синтезировано стационарное и самосогласованное марковское поле. Построение алгоритма генерации искомого марковского поля будет основано на иерархическом принципе.

Целью данной работы является построение алгоритма повышения порядка случайного объекта – нормального марковского поля, реализующегося на плоской поверхности.

Алгоритм генерации марковских полей. Алгоритмы генерации двумерных марковских полей приспособлены для применения в прямоугольнике, стороны которого параллельны декартовым осям координат на плоскости. В работе синтезирована последовательность вложенных алгоритмов генерации случайного объекта – нормального марковского поля второго порядка, реализующегося на плоской поверхности.

Из всего многообразия возможных вариантов и двумерных случайных моделей вещественное нормальное поле (НМД-поле) $H(x, y)$, пожалуй, чаще всего используется, если отсутствуют дополнительные априорные факторы, поскольку является удобным объектом анализа и важным в прикладном отношении. Любые его ортогональные сечения являются стационарным процессом Орнштейна-Уленбека (ОУ-процесс).

Определяющим свойством рассматриваемого нормального марковского двумерного поля является его корреляционный функционал

$$K_{xy} = K_{xy}(x, y | x', y') = M[H_1(x, y)H_1(x', y')] = pq\sigma^2, \quad (1)$$

с парциальными корреляторами $p = \exp(-v_x | x - x' |)$, $q = \exp(-v_y | y - y' |)$, где $h = h(x, y)$ – реализация гауссового двумерного поля $H_1(x, y)$ в прямоугольной области $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$ на плоскости xOy , $\sigma^2 = M[H_1^2(x, y)]$ – интенсивность НМД-поля, v_x и v_y – декременты затухания поля по оси x и y соответственно.

Обобщением известных конструкций – переходных вероятностей для нормального марковского процесса (ОУ-процесса) – может служить переходная плотность распределения вероятностей для амплитуды $h(x, y)$ НМД-поля $H_1(x, y)$

$$f_H(h(x, y) | h(x', y), h(x, y'), h(x', y')) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)\sigma^2}} \exp\{-Q[h(x, y)]\}, \quad (2a)$$

где $Q[h(x, y)]$ – квадратичная форма относительно полевых переменных,

$$Q(x, y) = \frac{[h(x, y) - ph(x', y) - qh(x, y') + pqh(x', y')]^2}{2(1-p^2)(1-q^2)\sigma^2}.$$

Устремляя $x' \rightarrow -\infty$ или $y' \rightarrow -\infty$, получим граничные переходные плотности распределения вероятностей

$$f_H(h(x, y) | h(x', y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)} \sigma} \exp\left(-\frac{[h(x, y) - ph(x', y)]^2}{2(1-p^2)\sigma^2}\right), \quad (2b)$$

$$f_H(h(x, y) | h(x, y')) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-q^2)} \sigma} \exp\left(-\frac{[h(x, y) - qh(x, y')]^2}{2(1-q^2)\sigma^2}\right), \quad (2c)$$

которые служат переходными плотностями для парциальных ОУ-процессов, а при $x' \rightarrow -\infty$ и $y' \rightarrow -\infty$ получим вершинную плотность распределения вероятностей равновесного вида

$$f_H(h(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{[h(x, y)]^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2d)$$

для случайной величины – реализации $h = h(x, y)$ поля $H_1(x, y)$ в точке с координатами (x, y) , и поэтому из соотношений (2) следует корреляционная функция (1).

Из явного вида квадратичной формы $Q(x, y)$ в формуле (2a) для переходной плотности $f(h(x, y) | h(x', y), h(x, y'), h(x', y'))$ поля $H_1(x, y)$ можно видеть, что статистическая зависимость в выбранной точке (x, y) связана со значениями в точках (x', y) , (x, y') , параллельных осям координат, а также и со значением в точке (x', y') , находящейся в четвертой вершине прямоугольника с вершинами $((x, y); (x', y); (x, y'); (x', y'))$. Таким образом, переходная плотность в (2) позволяет учесть корреляции значений нормального поля первого порядка $H_1(x, y)$ по переменной x , переменной y , а также их совместные корреляции.

Уравнение движения для амплитуды НМД-поля первого порядка. Расположим на плоскости декартову систему координат с началом в точке $(0,0)$. Динамику случайного поля $H_1(x, y) = H(x, y)$ в прямоугольнике $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$ с вершиной в $(0,0)$ можно описать с помощью уравнения, обобщающего уравнение Ланжевена для процесса Орнштейна-Уленбека

$$(\partial / \partial x + v_x)(\partial / \partial y + v_y)h(x, y) = \sigma u(x, y), \quad (3)$$

где $u(x, y)$ – случайное поле, обладающее свойствами гауссовского двумерного белого шума с единичной интенсивностью.

В качестве граничных условий в (3) используем два нормальных стохастических процесса, описываемых уравнениями Ланжевена,

$$\left(\partial/\partial x + v_x\right)h(x,0) = \sigma u(x,0), \quad \left(\partial/\partial y + v_y\right)h(0,y) = \sigma u(0,y), \quad (4)$$

реализующиеся вдоль осей x и y соответственно, а начальным условием к ним будут значения случайной величины $h(0,0) = \sigma u(0,0)$.

Решение уравнения (3) с условиями (4) следующее

$$h(x,0) = \exp(-v_x x)h(0,0) + \sigma \int_0^x \exp[-v_x(x-x')]u(x',0)dx', \quad (5a)$$

$$h(0,y) = \exp(-v_y y)h(0,0) + \sigma \int_0^y \exp[-v_y(y-y')]u(y',0)dy', \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \exp(-v_x x - v_y y)h(0,0) + \\ &+ \sqrt{2v_x} \sigma \int_0^x \exp[-v_x(x-x')]u(x',0)dx' + \sqrt{2v_y} \sigma \int_0^y \exp[-v_y(y-y')]u(y',0)dy' + (5c) \\ &+ \sqrt{4v_x v_y} \sigma \int_0^x \int_0^y \exp[-v_x(x-x') - v_y(y-y')]u(x',y')dx'dy'. \end{aligned}$$

Здесь видно, что марковское свойство для поля $H_1(x,y)$ согласно (5a) и (5b) имеет место вдоль граничных осей x и y , а также, согласно (5c), на плоскости (x,y) .

Алгоритм генерации НМД-поля первого порядка $H_1(x,y)$.

Уравнение (3) вместе с решением (5) описывают динамику НМД-поля первого порядка $H_1(x,y)$, порождающим полем для которого является поле белого шума («нулевого» порядка) $u(x,y)$.

На основе решения (5) можно построить числовой алгоритм генерации НМД-поля $H_1(x,y)$. Этот иерархический алгоритм генерации значения в узлах случайного нормального стационарного марковского поля в прямоугольной области плоскости со сторонами a и b . Рассмотрим на плоскости (x,y) прямоугольник с вершиной в точке $(0,0)$. Зададимся сеткой узлов $\{0 \leq j \leq N_x, 0 \leq k \leq N_y\}$ с шагом Δ_x по оси x и с шагом Δ_y по оси y , соответственно, так, что $N_x = a/\Delta_x$, $N_y = b/\Delta_y$.

Тогда искомый иерархический алгоритм генерации НМД-поля $H_1(x,y)$ удобно представить следующими 4 шагами.

Шаг 1. Генерация значения в вершине ($j=0, k=0$):

$$h_{0,0} = \sigma u_{0,0}. \quad (6a)$$

Шаг 2. Генерация значений ОУ-процесса вдоль x -границы ($j > 0, k = 0$)

$$h_{j+1,0} = ph_{j,0} + \sqrt{1-p^2} \sigma u_{j+1,0}. \quad (6b)$$

Шаг 3. Генерация значений ОУ-процесса вдоль y -границы ($j=0, k>0$)

$$h_{0,k+1} = qh_{0,k} + \sqrt{1-q^2} \sigma u_{0,k+1}. \quad (6c)$$

Шаг 4. Последовательное (слева-направо и послыоно) заполнение значениями внутренних узлов прямоугольника ($j>0, k>0$):

$$h_{j+1,k+1} = ph_{j,k+1} + qh_{j+1,k} - pqh_{j,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)} \sigma u_{j+1,k+1}. \quad (6d)$$

В выражениях (6) $p = \exp(-v_x \Delta_x)$, $q = \exp(-v_y \Delta_y)$, где v_x и v_y – парциальные декременты, Δ_x и Δ_y – шаги узлов по осям x и y соответственно. Отметим, что выбранных Δ_x и Δ_y (то есть количестве шагов N_x , N_y , соответствующих заданным размерам прямоугольника a и b), интенсивность в числовом алгоритме необходимо перенормировать так, чтобы энергия НМД-поля $H_1(x, y)$, приходящаяся на единицу площади, совпадала с заданной при любом числе шагов.

Из (6) можно получить, что математические ожидания для значения $h_{j,k}$ и $h_{j,k}^2$ в любом (j, k) -узле поля $H_1(x, y)$ составляют $M[h_{j,k}] = 0$, $M[h_{j,k}^2] = \sigma^2 = const$, если последовательно понижать значения j -индекса, а затем k -индекса и, наконец, найти безусловное равновесное среднее.

Таким образом, алгоритм (6) генерации значений случайного поля $H_1(x, y)$ в прямоугольнике на плоскости является стационарным.

Результаты генерации НМД-поля 1-го порядка. На Рис. 1 приведен результат генерации двумерного массива заданных размеров (50×50), отвечающий полю нормального «белого» шума $H_0(x, y)$.

На Рис. 2 приведен результат генерации двумерного массива заданных размеров (50×50), отвечающий НМД-полю первого порядка H_1 при $v_x = 0.3$, $v_y = 0.3$, $\sigma = 0.25$. На Рис. 3 приведен результат генерации двумерного массива заданных размеров (50×50), отвечающий НМД-полю первого порядка H_1 при $v_x = 1.0$, $v_y = 1.0$, $\sigma = 0.25$.

Уравнение движения амплитуды НМД-поля 2-го порядка $H_2(x, y)$.

Примем, что флуктуации НМД-поля по обеим переменным являются ОУ-процессами второго порядка и подчиняются уравнениям Ланжевена

$$\left(\partial^2 / \partial x^2 + 2\beta_x \partial / \partial x + \Omega_x^2 \right) h(x, y) = \sigma u(x, y), \quad \left(\partial^2 / \partial y^2 + 2\beta_y \partial / \partial y + \Omega_y^2 \right) h(x, y) = \sigma u(x, y), \quad (7)$$

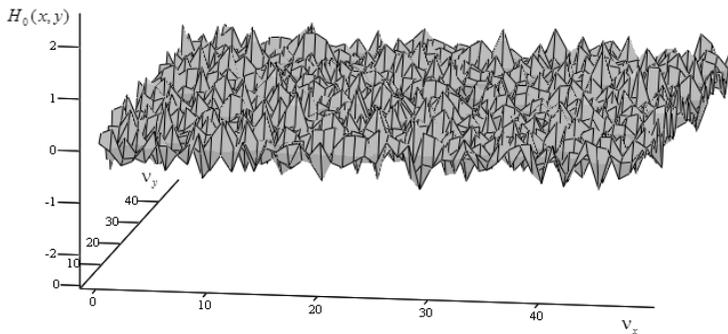


Рис. 1 – Поле «белого» шума H_0 : $N_x = 50$, $\Delta_x = 1$, $N_y = 50$, $\sigma = 0.25$

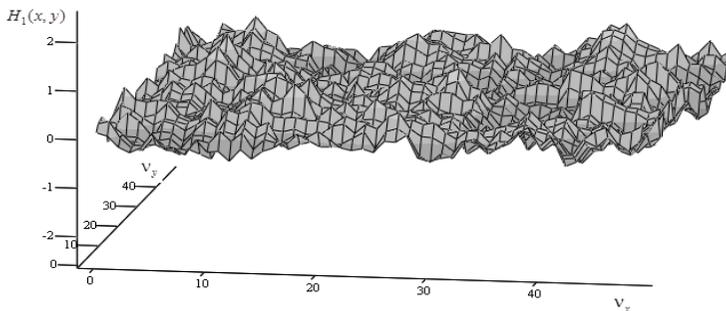


Рис. 2 – Нормальное марковское поле первого порядка H_1 .
 Параметры: $N_x = 50$, $\Delta_x = 1$, $N_y = 50$, $\Delta_y = 1$, $v_x = 0.3$, $v_y = 0.3$, $\sigma = 0.25$

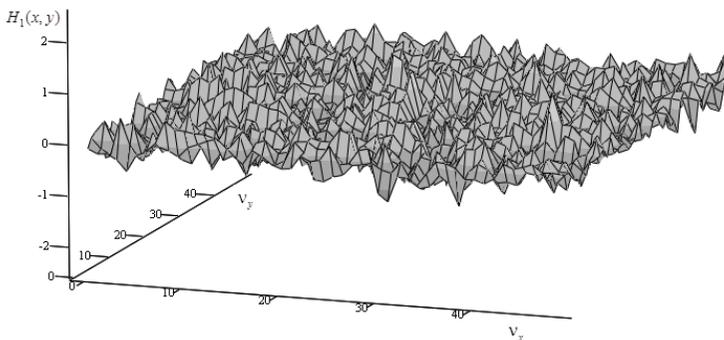


Рис. 3 – Нормальное марковское поле первого порядка H_1 .
 Параметры: $N_x = 50$, $\Delta_x = 1$, $N_y = 50$, $\Delta_y = 1$, $v_x = 1.0$, $v_y = 1.0$, $\sigma = 0.25$

где β_x, Ω_x и β_y, Ω_y – парциальные декременты и частоты, отвечающие движению по осям x и y соответственно. Тогда уравнение для НМД-поля $H_2(x, y)$ можно записать в виде

$$\left(\partial^2 / \partial x^2 + 2\beta_x \partial / \partial x + \Omega_x^2\right) \left(\partial^2 / \partial y^2 + 2\beta_y \partial / \partial y + \Omega_y^2\right) h(x, y) = \sigma u(x, y). \quad (8)$$

Пусть $\gamma_{1,x}, \gamma_{2,x}$ и $\gamma_{1,y}, \gamma_{2,y}$ – решения уравнений $\gamma^2 + 2\beta_x \gamma + \Omega_x^2 = 0$, $\gamma^2 + 2\beta_y \gamma + \Omega_y^2 = 0$, тогда уравнение (8) можно записать в виде системы

$$(\partial / \partial x + \gamma_{1,x})(\partial / \partial y + \gamma_{1,y}) h_1(x, y) = \sigma u(x, y), \quad (\partial / \partial x + \gamma_{2,x})(\partial / \partial y + \gamma_{2,y}) h_2(x, y) = h_1(x, y). \quad (9)$$

Из (9) следует, что к НМД-полю второго порядка $H_2(x, y)$ производящим генератором является НМД-поле $H_1(x, y)$ первого порядка так же, как к этому НМД-полю $H_1(x, y)$ первого порядка производящим генератором является поле белого шума $H_0(x, y) = u(x, y)$ «нулевого» порядка. Это свойство имеет место при условии, что в роли новых эффективных декрементов будут задействованы два набора $(\gamma_{1,x}, \gamma_{1,y})$ и $(\gamma_{2,x}, \gamma_{2,y})$. Теперь, сопоставляя уравнения (7), (9) и уравнения (3), (4) с решением (5), получим решение для НМД-поля второго порядка

$$h'(x, 0) = \exp(-\gamma_{1,x} x) h'(0, 0) + \sigma \int_0^x \exp[-\gamma_{1,x}(x-x')] u(x', 0) dx', \quad (10a)$$

$$h'(0, y) = \exp(-\gamma_{1,y} y) h'(0, 0) + \sigma \int_0^y \exp[-\gamma_{1,y}(y-y')] u(y', 0) dy', \quad (10b)$$

$$h'(x, y) = \exp(-\gamma_{1,x} x - \gamma_{1,y} y) h'(0, 0) + \quad (10c)$$

$$+ \sqrt{2\gamma_{1,x}} \sigma \int_0^x \exp[-\gamma_{1,x}(x-x')] u(x', 0) dx' + \sqrt{2\gamma_{1,y}} \sigma \int_0^y \exp[-\gamma_{1,y}(y-y')] u(y', 0) dy' +$$

$$+ \sqrt{4\gamma_{1,x}\gamma_{1,y}} \sigma \int_0^x \int_0^y \exp[-\gamma_{1,x}(x-x') - \gamma_{1,y}(y-y')] u(x', y') dx' dy',$$

$$h_2(x, 0) = \exp(-\gamma_{2,x} x) h'(0, 0) + \sigma \int_0^x \exp[-\gamma_{2,x}(x-x')] h'(x', 0) dx', \quad (10d)$$

$$h_2(0, y) = \exp(-\gamma_{2,y} y) h'(0, 0) + \sigma \int_0^y \exp[-\gamma_{2,y}(y-y')] h'(y', 0) dy', \quad (10e)$$

$$h_2(x, y) = \exp(-\gamma_{2,x} x - \gamma_{2,y} y) h'(0, 0) + \quad (10f)$$

$$+ \sqrt{2\gamma_{2,x}} \sigma \int_0^x \exp[-\gamma_{2,x}(x-x')] h'(x', 0) dx' + \sqrt{2\gamma_{2,y}} \sigma \int_0^y \exp[-\gamma_{2,y}(y-y')] h'(y', 0) dy' +$$

$$+ \sqrt{4\gamma_{2,x}\gamma_{2,y}} \sigma \int_0^x \int_0^y \exp[-\gamma_{2,x}(x-x') - \gamma_{2,y}(y-y')] h'(x', y') dx' dy'.$$

Алгоритм генерации НМД-поля второго порядка $H_2(x, y)$. Уравнение (7) вместе с решением (10) описывают динамику НМД-поля второго порядка $H_2(x, y)$, порождающим полем для которого является поле «белого» шума («нулевого» порядка) $u(x, y)$.

На основе решения (10) можно построить числовой алгоритм генерации НМД-поля $H_2(x, y)$. Он так же, как и для поля $H_1(x, y)$, будет иерархическим алгоритмом генерации значения в узлах случайного нормального стационарного марковского поля в прямоугольной области плоскости со сторонами a и b . Для того же прямоугольника с вершиной в точке $(0,0)$ на плоскости (xOy) зададимся сеткой узлов $\{0 \leq j \leq N_x, 0 \leq k \leq N_y\}$ с шагом Δ_x по оси x и с шагом Δ_y по оси y , так, что $N_x = a/\Delta_x$, $N_y = b/\Delta_y$.

Тогда искомым иерархический алгоритм генерации НМД-поля $H_2(x, y)$ удобно представить следующими 8 шагами.

Шаг 1. Генерация значения в вершине ($j = 0, k = 0$):

$$h'_{0,0} = \sigma u_{0,0}. \quad (11a)$$

Шаг 2. Генерация значений ОУ-процесса вдоль x -границы ($j > 0, k = 0$)

$$h'_{j+1,0} = p_1 h'_{j,0} + \sqrt{1-p_1^2} \sigma u_{j+1,0}. \quad (11b)$$

Шаг 3. Генерация значений ОУ-процесса вдоль y -границы ($j = 0, k > 0$)

$$h'_{0,k+1} = q_1 h'_{0,k} + \sqrt{1-q_1^2} \sigma u_{0,k+1}. \quad (11c)$$

Шаг 4. Последовательное (слева-направо и послойно) заполнение значениями внутренних узлов прямоугольника ($j > 0, k > 0$):

$$h'_{j+1,k+1} = p_1 h'_{j,k+1} + q_1 h'_{j+1,k} + \sqrt{(1-p_1^2)(1-q_1^2)} \sigma u_{j+1,k+1}. \quad (11d)$$

В выражениях (11a)-(11d) $p_1 = \exp(-\gamma_{1,x} \Delta_x)$, $q_1 = \exp(-\gamma_{1,y} \Delta_y)$, где $\gamma_{1,x}$ и $\gamma_{1,y}$ – первая пара парциальных декрементов, Δ_x и Δ_y – шаги узлов по осям x и y соответственно.

Шаг 5. Генерация значения в вершине ($j = 0, k = 0$):

$$h_{0,0} = h'_{0,0}. \quad (11e)$$

Шаг 6. Генерация значений ОУ-процесса вдоль x -границы ($j > 0, k = 0$)

$$h_{j+1,0} = p_2 h_{j,0} + \sqrt{1 - p_2^2} h'_{j+1,0}. \quad (11f)$$

Шаг 7. Генерация значений ОУ-процесса вдоль y -границы ($j = 0, k > 0$)

$$h_{0,k+1} = q_2 h_{0,k} + \sqrt{1 - q_2^2} h'_{0,k+1}. \quad (11g)$$

Шаг 8. Последовательное (слева-направо и послойно) заполнение значениями внутренних узлов прямоугольника ($j > 0, k > 0$):

$$h_{j+1,k+1} = p_2 h_{j,k+1} + q_2 h_{j+1,k} + \sqrt{(1 - p_2^2)(1 - q_2^2)} h'_{j+1,k+1}. \quad (11h)$$

В выражениях (11e)-(11h) $p_2 = \exp(-\gamma_{2,x} \Delta_x)$, $q_2 = \exp(-\gamma_{2,y} \Delta_y)$, где $\gamma_{2,x}$ и $\gamma_{2,y}$ – вторая пара парциальных декрементов, Δ_x и Δ_y – шаги узлов по осям x и y соответственно. Отметим, что выбранных Δ_x и Δ_y (то есть количестве шагов N_x , N_y , соответствующих заданным размерам прямоугольника a и b), интенсивность в числовом алгоритме необходимо перенормировать так, чтобы энергия НМД-поля $H_2(x, y)$, приходящаяся на единицу площади, совпадала с заданной при любом числе шагов.

Из (11) можно получить, что для значения $h_{j,k}$ в любом (j, k) -узле поля $H_2(x, y)$ выполняется для математических ожиданий $M[h_{j,k}] = 0$, $M[h_{j,k}^2] = \sigma^2 = const$, если последовательно понижать значения j -индекса, а затем k -индекса и, наконец, найти безусловное равновесное среднее.

Таким образом, алгоритм (11) генерации значений случайного поля $H_2(x, y)$ в прямоугольнике на плоскости также является стационарным.

Результаты генерации НМД-поля 2-го порядка. На Рис. 4 приведен результат генерации двумерного массива заданных размеров (50×50), отвечающий нормальному марковскому полю второго порядка H_2 . Из Рис. 4 видно, что при выбранных для моделирования значениях декрементов $\beta_x = 0.3$, $\beta_y = 0.3$, и собственных частот $\Omega_x = 1.0$, $\Omega_y = 1.0$, их влияние привело к сглаживанию формы сгенерированного поля H_2 . Отметим, что у поля H_2 существуют обе первые производные. На Рис. 5 приведен тот же рисунок, но с декрементами $\beta_x = 1.5$ и $\beta_y = 1.5$. На нем видны изменения в топографии сгенерированного поля.

Выводы. В данной работе описан алгоритм повышения порядка случайного объекта, построено нормальное марковское поле второго порядка, реализованное на плоской поверхности двух переменных.

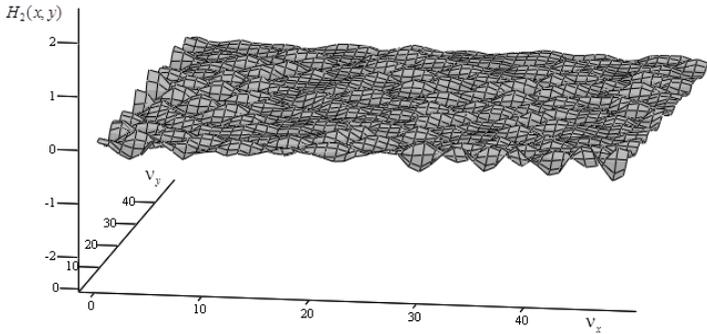


Рис. 4 – Нормальное марковское поле второго порядка H_2 . Параметры: $N_x = 50$, $\Delta_x = 1$, $N_y = 50$, $\Delta_y = 1$, $\beta_x = 0.3$, $\Omega_x = 1.0$, $\beta_y = 0.3$, $\Omega_y = 1.0$, $\sigma = 0.25$

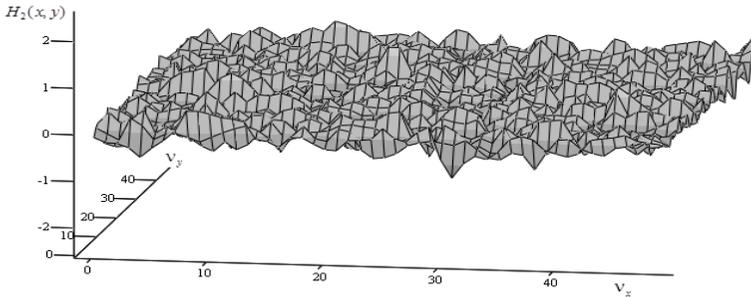


Рис. 5 – Нормальное марковское поле второго порядка H_2 . Параметры: $N_x = 50$, $\Delta_x = 1$, $N_y = 50$, $\Delta_y = 1$, $\beta_x = 1.5$, $\Omega_x = 1$, $\beta_y = 1.5$, $\Omega_y = 1$, $\sigma = 0.25$

Список литературы: 1. Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний / Н. П. Бусленко, Ю. А. Шрейдер. – М. : Физматгиз, 1961. – 280 с. 2. Habibi A. Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image / A. Habibi // Proc. IEEE, vol. 60, № 7, pp.878-883, (July) 1972. 3. Хусу А. П. Шероховатость поверхностей / А. П. Хусу, Ю. Р. Вутенберг, В. А. Пальмов. – М. : Наука. – 1975. – 344 с. 4. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн / Я. С. Шифрин. – М. : Советское радио. – 1970. – 384 с. 5. Ярлыков М. С. Статистическая теория навигации / М. С. Ярлыков. – М. : Радио и связь. – 1985. – 344 с. 6. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику / С. М. Рытов. – М. : Наука. – 1966. – 404 с. 7. Мазманишвили А. С. Моделирование марковских случайных последовательностей и алгоритм генерации однородного двумерного марковского поля / А. С. Мазманишвили, В. Е. Щербань // Электронное моделирование. – 1996. – Т. 18. – №2. – С. 93-95. 8. Воеводин В. В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. – М. : Наука. – 1984. – 320 с. 9. Мазманишвили А. С. Алгоритм генерации нормального марковского поля на поверхности идеального цилиндра / А. С. Мазманишвили // Электронное моделирование. – 1998. –Т. 20. – №. 6. – С. 65-69.