

С. М. БАЛЮТА, канд. техн. наук, доцент НУПТ,
О. Н. БЕЗМЕНОВА, студентка НТУ «ХПИ»

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРОКАТНОГО СТАНА

У статті запропоновано квазістатичну математичну модель металопрокатного стану, що дозволяє звести задачу вибору настроювальних технологічних параметрів до класичної двоточкової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь. Математична модель може бути використана також для синтезу системи стабілізації обраних технологічних параметрів.

В статье предложена квазистатическая математическая модель металопрокатного стана, позволяющая свести задачу выбора настроечных технологических параметров к классической двухточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Математическая модель может быть использована также для синтеза системы стабилизации выбранных технологических параметров.

In the article the quasi-static mathematical model of the metal-rolling mill is proposed, which makes it possible to reduce the tuning technological parameters selection problem to the classical two-point boundary value problem for the system of ordinary differential equations. The mathematical model can be also used for the synthesis of stabilizing system of selected technological parameters.

Введение. Современный металлопрокатный стан представляет собой один из сложнейших объектов управления. Эта сложность обусловлена, множеством различных по природе взаимосвязанных между собой подпроцессов, составляющих процесс прокатки. К ним относятся, прежде всего, процессы термомеханической деформации металлов, механические процессы в элементах клеток, а также электромеханические процессы в системах приводов. Кроме перечисленных подпроцессов, можно отметить и другие, детально рассмотренные в соответствующей научно-технической литературе [1, 2].

Математические модели отдельных подпроцессов металлопрокатного производства (МПП) могут быть линейными, нелинейными, распределенными, дискретными, описываться алгебраическими или дифференциальными уравнениями. Такое разнообразие классов математических моделей приводит к серьезным затруднениям при синтезе систем автоматического управления МПП. Кроме того, математические модели некоторых элементарных процессов МПП являются весьма приближенными по структуре и содержат ряд неопределенных параметров.

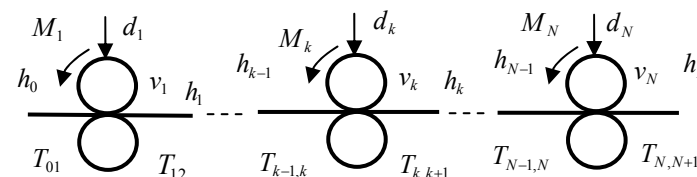
Указанные обстоятельства приводят к необходимости рассматривать упрощенные математические модели МПП, позволяющие синтезировать приближенные законы управления. Уточнение процесса управления осуществляется на основе стабилизирующих воздействий по отклонению от

программной траектории. Такая двухуровневая концепция построения систем управления рассмотрена в [3].

Особенный интерес с практической точки зрения представляет математическая модель МПП, основанная на квазистатическом подходе, известном из классической термодинамики. При таком подходе реальные фазовые траектории МПП, полученные в результате изменения управляющих параметров, заменяются последовательностями положений равновесия, соответствующих последовательностям значений управляющих воздействий. При определенных условиях на скорость изменения последних такое представление управляемого процесса дает достаточно хорошее приближение к реальному. Такие условия для класса линейных систем рассмотрены в [4]. Основным достоинством квазистатического моделирования управляемых процессов является возможность построения математической модели на основании статических взаимосвязей «вход–выход», которые могут быть получены в результате экспериментальных исследований.

Целью настоящей работы является разработка квазистатической математической модели МПП и анализ на ее основе различных путей решения задачи перенастройки технологических параметров.

Математическая модель МПП. Рассмотрим упрощенную структурную схему процесса холодной прокатки металла в многоклетевом непрерывном стане, изображенную на рисунке.



Структурная схема процесса прокатки

На рисунке введены следующие обозначения основных технологических параметров МПП:

h_0, h_1, \dots, h_N – толщины полосы,

v_1, v_2, \dots, v_N – скорости полосы,

$T_{01}, T_{12}, T_{23}, \dots, T_{N, N+1}$ – натяжения полосы,

M_1, M_2, \dots, M_N – моменты прокатки на различных участках прокатного стана,

d_1, d_2, \dots, d_N – перемещения нажимных винтов.

Толщина полосы и момент прокатки на k -м участке связаны с остальными технологическими параметрами некоторыми соотношениями [4]:

общем случае будем считать, что допустимая в соответствии с указанными условиями область представляет собой выпуклый многогранник L .

Таким образом, задачу начальной настройки технологического процесса можно сформулировать в алгебраическом виде: найти вектор $\mathbf{x} \in M \cap L$, или, проще говоря, найти какое-либо решение системы алгебраических уравнений (6), удовлетворяющее условию $\mathbf{x} \in L$.

Поскольку таких векторов \mathbf{x} в общем случае может быть множество X^* , то естественно сформулировать задачу оптимизации начальной настройки технологического процесса в следующем виде: найти вектор технологических параметров $\mathbf{x} \in X^*$, доставляющий минимум целевой функции

$$z = F(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (7)$$

Задачу оптимизации можно свести к последовательности решений задач начальной настройки, включив (7) при некотором фиксированном значении z в систему уравнений (6) и уменьшая на каждом шаге величину z в (7). Такой подход отличается от традиционного, основанного на оптимизации функций (7) при условиях (6) и $\mathbf{x} \in L$ методами множителей Лагранжа или штрафных функций, и по своей сути сводится к одномерному поиску экстремума на решениях расширенной системы алгебраических уравнений (6), (7).

Квазистатический метод решения задачи начальной настройки. Сформулированная выше задача начальной настройки параметров технологического процесса представляет собой задачу нахождения одного из решений системы (6), удовлетворяющего условию $\mathbf{x} \in L$. Одним из возможных путей ее решения является сведение к задаче минимизации целевой функции

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m f_k^2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L. \quad (8)$$

Однако, численное решение задачи минимизации (8), как правило, затруднительно в связи с наличием большого количества локальных минимумов и «оврагов» [7].

Ниже будет предложен принципиально иной подход к решению сформулированной задачи, основанной на решении эквивалентной задачи управления квазистатическим процессом, соответствующим системе (6).

Введем в рассмотрение вектор невязок $\mathbf{y} \in R^m$:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (9)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \quad (10)$$

и будем рассматривать векторы \mathbf{x} и \mathbf{y} как некоторые функции времени.

Продифференцируем (10) по времени. В результате получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^1} \dot{\mathbf{x}}^1 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2} \dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{\mathbf{y}}. \quad (11)$$

Обозначая $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^1} = \mathbf{W}(\mathbf{x})$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ – матрицы Якоби

размерностей $n \times m$ и $m \times r$, $\dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{u}$, представим математическую модель настройки технологических параметров в виде управляемой системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^1 &= \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\mathbf{u} - \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\mathbf{V}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{x}}^2 &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (12)$$

в которой $(\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T)^T$ – вектор состояний, а \mathbf{v} и \mathbf{u} – векторы управлений, $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x})$.

Таким образом, задачу настройки технологического процесса можно свести к следующей задаче управления: из некоторого начального состояния $(\mathbf{x}_0^T, \mathbf{y}_0^T)^T$ перевести систему (12) в конечное состояние $(\mathbf{x}_L^T, \mathbf{0})^T$, где $\mathbf{x}_L \in L$, $\mathbf{0} - (1 \times r)$ -вектор. Начальное состояние выбирается путем вычисления вектора \mathbf{y}_0 в результате подстановки некоторого начального значения \mathbf{x}_0 в (9) т.е. $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Будем также предполагать, что множество L представляет собой сумму множеств $L = L_1 + L_2$, причем $\mathbf{x}^1 \in L_1$, $\mathbf{x}^2 \in L_2$. Отметим также, что, поскольку временной масштаб не задан, то можно принять временной интервал единичным $t \in [0, 1]$, а значения \mathbf{u} и \mathbf{v} неограниченными.

Рассмотрим задачу управления квазистатической системой (12) при фиксированном $\mathbf{x}^2 \in L_2$. В этом случае, задача управления примет упрощенный вид: для управляемой системы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^1 &= \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)\mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (13)$$

найти закон управления $\mathbf{u}(t)$, $t \in [0, 1]$, при котором $\mathbf{y}(1) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – $(n \times 1)$ -вектор. Нетрудно видеть, что одним из таких законов будет

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{y}_0 = \mathbf{c}. \quad (14)$$

Тогда искомое значение $\mathbf{x}^1(1)$ может быть получено в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}^1 = \Phi(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \mathbf{c}. \quad (15)$$

при фиксированном векторе \mathbf{x}^2 и начальном значении $\mathbf{x}^1(0)$, полученном ранее.

Интегрирование (15) не вызывает принципиальных затруднений, если матрица $\Phi(\mathbf{x})$ получена аналитически путем обращения матрицы Якоби $W(\mathbf{x})$ в общем виде. Обойти операцию обращения матрицы $W(\mathbf{x})$ предлагается следующим образом. Воспользуемся известной формулой для производной обратной матрицы

$$\dot{\Phi} = -\Phi \dot{W} \Phi. \quad (16)$$

В свою очередь полная производная матрицы-функции $W(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ по времени может быть представлена в виде

$$\dot{W}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial W}{\partial x_k}(\boldsymbol{\varphi}_k, \mathbf{c}), \quad (17)$$

где $\boldsymbol{\varphi}_k$ – k -й столбец матрицы Φ .

Тогда процедуру обращения матрицы $W(\mathbf{x})$ на каждом шаге интегрирования системы (15) можно заменить шагом интегрирования матричного дифференциального уравнения (16), обратив матрицу $W(\mathbf{x})$ только один раз при значении $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

Сведение к двухточечной краевой задаче. Рассмотренный выше подход к нахождению настройки технологических параметров позволяет организовать управление настройкой путем изменения вектора параметров $\mathbf{x}^2 \in L_2$, так чтобы решение дифференциального уравнения (15) удовлетворяло условию $\mathbf{x}^2(1) \in L_1$. Для организации целенаправленного изменения вектора \mathbf{x}^2 вернемся к исходной системе (12). Ее структура такова, что только выбором вектора управлений $\mathbf{u}(t)$ можно получить нулевую невязку $\mathbf{y}(1)$. Например, в виде (14). Вектор управлений $\mathbf{v}(t)$ обеспечивает в свою очередь конечные

условия на управляемый процесс $\mathbf{x}^1(1) \in L_1$, $\mathbf{x}^2(1) \in L_2$ при условии выполнения $\mathbf{y}(1) = \mathbf{0}$.

Для того чтобы использовать классические методы теории управления введем удобный для дальнейшего рассмотрения критерий оптимальности

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{v}^T \mathbf{v} dt, \quad (18)$$

а вместо многогранников L_1 и L_2 будем рассматривать их приближения в форме эллипсоидов E_1 и E_2 [5]. Такая замена цели управления позволяет воспользоваться традиционной формой условий трансверсальности вариационного исчисления и принципа максимума Понтрягина. С учетом сделанных предположений функция Гамильтона примет вид

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \lambda_1^T \Phi \mathbf{c} - \lambda_1^T \Phi \mathbf{V} \mathbf{v} + \lambda_2^T \mathbf{v}, \quad (19)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1^T, \lambda_2^T)^T$ – вектор сопряженных переменных.

В соответствии с принципом максимума оптимальный закон управления найдем из условия

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v}^T - \lambda_1^T \Phi \mathbf{V} + \lambda_2^T = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{0}$ – $(r \times 1)$ -вектор.

Таким образом, оптимальный закон управления примет вид

$$\mathbf{v}^T = \lambda_1^T \Phi \mathbf{V} - \lambda_2^T. \quad (20)$$

В свою очередь вектор сопряженных переменных удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\lambda_1^T \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{c} - \lambda_1^T \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{V}(\mathbf{x}) \mathbf{v}) \quad (21)$$

образующей совместно с первыми двумя уравнениями (12) гамильтонову систему $2n$ дифференциальных уравнений.

Сопряженную систему (21) можно представить в следующем виде:

$$\dot{\lambda}^k = -\lambda_1^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \mathbf{c} + \lambda_1^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \mathbf{V} \mathbf{v} + \lambda_1^T \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_k} \mathbf{v}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (22)$$

В свою очередь матрицы $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$ могут быть выражены через производную от матрицы W по аналогии с (16):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = -\Phi \frac{\partial W}{\partial x_k} \Phi. \quad (23)$$

Постановка двухточечной краевой задачи завершается формулировкой условий трансверсальности состоящих в ортогональности сопряженных векторов λ_1 и λ_2 эллипсоидам E_1 и E_2 соответственно в момент времени $t = 1$

$$\lambda_1^T = c_1 \frac{\partial E_1}{\partial x^1}, \quad \lambda_2^T = c_2 \frac{\partial E_2}{\partial x^2}, \quad (24)$$

где c_1 и c_2 – неопределенные постоянные.

Таким образом, решение двухточечной краевой задачи состоит в нахождении начальных условий для сопряженной системы (22) таких, чтобы решения гамильтоновой системы (12) и (22) с учетом закона управления (20) в конечный момент времени $t = 1$ удовлетворяли условиям $x \in L$ и условиям (24).

Решение сформулированной двухточечной краевой задачи может быть получено в результате применения численных методов, изложенных в соответствующей литературе [6].

Заключение. Основным результатом исследования является разработка квазистатической математической модели металлопрокатного стана. Достоинством предложенной математической модели является ее относительная простота, основанная на статических соотношениях между технологическими параметрами. С другой стороны система дифференциальных уравнений, описывающая квазистатические фазовые траектории, позволяет применить мощный арсенал средств теории оптимального управления для решения различных задач, связанных с перенастройкой технологических параметров процесса прокатки.

Список литературы: 1. Целиков А.И. Теория расчета усилий в прокатных станах. – М.: Металлургиздат, 1962. – 434с. 2. Дружинин Н.Н. Непрерывные станы как объект автоматизации. – М.: Металлургия, 1967. – 259с. 3. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488с. 4. Куценко А.С., Чан Занг Лю Критерии адекватности динамических и статических математических моделей технологических процессов// Вісник Національного технічного університету «ХП». – Харків: НТУ «ХП». – 2003. – № 18. – С.23–28. 5. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 320с. 6. Брайсон А., Хо-Ю-Ши Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 544с. 7. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 512с.

Поступила в редколлегию 18.12.09