УДК 519.677:658.23

Н.В. ШАТОХИНА, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В статті запропоновано математичній апарат оптимізації показників діяльності виробничо-економічної системи як розв'язання задачі синтезу власних векторів відповідних матриць.

В статье предложен математический аппарат оптимизации показателей деятельности производственно-экономической системы как решение задачи синтеза собственных векторов соответствующих матриц.

In this article the mathematical apparatus for optimization of production and business system parameters as solution for eigenvectors synthesis task of correspondent matrixes have been proposed.

Введение. В настоящее время математические методы и модели находят широкое применение в стратегическом планировании и управлении. Полезные прикладные результаты получены при моделировании производственных, экономических и организационных процессов [1].

Производственное предприятие, организация или некоторый проект представляют собой сложную систему. Функционирование такой системы происходит под воздействием целого набора различных факторов, постоянно изменяющихся под воздействием внешних условий. Очевидно, что управление подобной системой представляет нетривиальную задачу.

Решение подобных задач становится практически невозможным без внедрения информационных систем, основной составляющей которых являются информационные технологии, основанные на применении совокупности моделей и методов, разработанных при помощи некоторого математического аппарата, и средств обработки информации.

Разработка и анализ результатов использования экономико-математических моделей позволяет не только ускорить процесс принятия решений, но и более комплексно представить рассматриваемую проблему по сравнению с анализом, который может провести даже самый высококвалифицированный и опытный эксперт.

Эффективность экономико-математического моделирования в значительной степени определяется адекватностью построенной модели, а также правильным выбором методологий и методов работы с ней.

Анализ используемых до настоящего времени на практике подходов к моделированию факторов, влияющих на функционирование организации, показывает, что большинство из них носят скорее качественный характер [2]. Это затрудняет их формализацию и автоматизацию учета.

В данной статье предложен математический аппарат, позволяющий моделировать воздействие внешних факторов на внутренние показатели деятельности организации и определять оптимальные значения рассматриваемых параметров модели для обеспечения эффективного функционирования системы, её адаптации к изменениям во внешней среде и развитию.

1. Оптимизация внутренних экономических показателей как задача синтеза собственных векторов соответствующих матриц. Предположим, что по результатам проведенного анализа рынка, прогнозам сформирован некоторый набор факторов, воздействующих на рассматриваемую систему. Обозначим эти параметры как элементы матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ соответственно a_{ji}, b_{ji} $(i, j=\overline{1,n})$. Пусть деятельность предприятия характеризуется набором показателей x_{ji}, которые будем трактовать как компоненты n векторов $\mathbf{x}_i$. Рассмотрим вначале случай, когда установлены оптимальные значения этих показателей для i-го вектора $-\mathbf{x}_i^*$. Задача формулируется так: необходимо определить значения части параметров a_{ji}, b_{ji}, в дальнейшем их удобно обозначить как p_k $(k=\overline{1,m})$, при которых будут достигаться оптимальные значения показателей деятельности.

Полагая зависимости между параметрами линейными, модель представим в форме задачи о собственных значениях и собственных векторах

$$\left(-\mathbf{A}\lambda+\mathbf{B}\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}\,. \qquad (1)$$

Для решения оптимизационной задачи воспользуемся идеей теории чувствительности [3]. Варьируя параметры модели, придадим соответствующему собственному вектору необходимую конфигурацию. Обозначим изменение $\mathbf{x}_i$ через

$$\Delta\mathbf{x}_i=\mathbf{x}_i^*-\mathbf{x}_i \quad (i=\overline{1,n}). \qquad (2)$$

Введем в рассмотрение частные производные $\dfrac{\partial\mathbf{x}_i}{\partial p_k}$ вектора $\mathbf{x}_i$ по варьируемым параметрам p_k $(k=\overline{1,m})$. Теперь вектор $\Delta\mathbf{x}_i$, полагая его достаточно малым, с точностью до малых второго порядка можно представить в виде.

$$\Delta\mathbf{x}_i=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\mathbf{x}_i}{\partial p_k}\Delta p_k\,. \qquad (3)$$

где Δp_k – изменение k-го параметра.

Для $\dfrac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_k}$ справедливо разложение

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^{n} d_{ijk} \mathbf{x}_j \; . \tag{4}$$

Если выражение (1) продифференцировать по параметру p_k $(k=\overline{1,m})$ и затем умножить слева на $\mathbf{x}_l^{\mathrm{T}}$ $(l \neq i)$, то с учетом формулы (4) получим

$$d_{ilk} = \frac{\mathbf{x}_l^{\mathrm{T}} \left(\dfrac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial p_k} - \lambda_i \dfrac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial p_k} \right) \mathbf{x}_i}{(\lambda_i - \lambda_l)\, \mathbf{x}_l^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\, \mathbf{x}_l} \, . \tag{5}$$

Для $l = i$ полагаем $d_{ilk} = 0$.

С учетом соотношения (4) выражение (3) приобретает вид

$$\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{S} \Delta \mathbf{p} \, . \tag{6}$$

где $\mathbf{S}$ – матрица чувствительности,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} d_{ij1} x_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} d_{ijm} x_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} d_{ij1} x_{nj} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} d_{ijm} x_{nj} \end{bmatrix}; \tag{7}$$

$\Delta \mathbf{p} = [\Delta p_1, \ldots, \Delta p_m]^{\mathrm{T}}$ – вектор изменения параметров.

Формулу (6) можно рассматривать как уравнение относительно $\Delta \mathbf{p}$. В зависимости от соотношения n и m для $\Delta \mathbf{p}$ имеют место следующие выражения:

$$\Delta \mathbf{p} = \left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \right)^{-1} \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \Delta \mathbf{x}_i \quad (m < n); \tag{8}$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{S}^{-1} \Delta \mathbf{x}_i \quad (m = n); \tag{9}$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{S} \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \Delta \mathbf{x}_i \quad (m > n). \tag{10}$$

Формула (8) получена методом наименьших квадратов. С помощью выражения (10) из бесчисленного множества решений выделяется единственное, обладающее свойством $\|\Delta \mathbf{p}\|_2 \Rightarrow \min$.

Новое значение вектора параметров, отвечающего измененному собственному вектору, приближенно представим в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p} \, , \tag{11}$$

где $\mathbf{p}_0$ – исходный вектор параметров.

В формуле (3) $\Delta \mathbf{x}_i$ предполагается малым, что практически редко выполняется. Для больших значений $\Delta \mathbf{x}_i$ требуется разработка специального алгоритма, позволяющего определить необходимые изменения параметров с помощью одной из формул (8)-(10). Если модули отдельных координат в векторе $\Delta \mathbf{x}_i$ велики, то первый шаг выполняется с $\Delta \tilde{\mathbf{x}}_i = \dfrac{\Delta \mathbf{x}_i}{r}$ $(r = 1, 2, \ldots)$; r выбирается так, чтобы модуль Δx_{ji} $(j = \overline{1,n})$ был небольшим, например, менее 5% от модуля x_{ji}. На каждом шаге реализуется итерационный процесс. После первой итерации по формуле (11) получаем вектор параметров $\mathbf{p}^{(1)}$ и новый собственный вектор $\mathbf{x}_i^{(1)}$. В общем случае последний отличается от вектора $\mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{x}_i$, т.е. вектора, который мы стремимся получить на первом шаге. Определяем невязку $\Delta \tilde{\mathbf{x}}_i^{(1)} = \mathbf{x}_i + \Delta \tilde{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i^{(1)}$ и выполняем с ней вторую итерацию для нахождения $\mathbf{p}^{(2)}$, $\mathbf{x}_i^{(2)}$. Затем вычисляем невязку $\Delta \tilde{\mathbf{x}}_i^{(2)} = \mathbf{x}_i + \Delta \tilde{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i^{(2)}$. Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$\frac{\left| p_k^{(j+1)} - p_k^{(j)} \right|}{\left| p_k^{(j)} \right|} < \varepsilon \;\; (k = \overline{1,m}),$$

где ε – некоторое малое число.

Полученный на последней итерации собственный вектор $\mathbf{x}_i^{(j+1)}$ принимаем за вектор $\mathbf{x}_i$, с его помощью уточняем $\Delta \mathbf{x}_i$ по формуле (2) и выполняем второй шаг с $\Delta \tilde{\mathbf{x}}_i = \dfrac{\Delta \mathbf{x}_i}{r-1}$ аналогично первому. Последний r-й шаг, очевидно, выполняется для

$$\Delta\widetilde{\mathbf{x}}_i=\frac{\Delta\mathbf{x}_i}{r-(r-1)}=\Delta\mathbf{x}_i\,.$$

Отметим несколько обстоятельств, важных при программной реализации алгоритма. В программе необходимо предусмотреть автоматическое изменение r, поскольку в некоторых случаях даже малое изменение собственного вектора требует значительного изменения некоторых параметров. Если знак добавки отрицательный, новое значение параметра также может быть отрицательным, т.е. лишенным физического смысла. Исходный улучшенный собственный вектор $\mathbf{x}_i^*$, а также улучшенные собственные векторы на каждом шаге алгоритма следует предварительно нормировать, причем нормировка должна использоваться та же, что и в подпрограмме определения собственных значений и собственных векторов.

Изложенный алгоритм без труда обобщается на случай одновременной корректировки всех или нескольких собственных векторов. Полученная выше формула (6) приобретает вид

$$\Delta\mathbf{x}=\mathbf{S}\,\Delta\mathbf{p}\,. \qquad (12)$$

Причем вектор $\Delta\mathbf{x}$ и матрицу $\mathbf{S}$ следует теперь рассматривать как блочную

$$\Delta\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\Delta\mathbf{x}_1\\ \Delta\mathbf{x}_2\\ \vdots\\ \Delta\mathbf{x}_q\end{bmatrix},\qquad \mathbf{S}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_1\\ \mathbf{S}_2\\ \vdots\\ \mathbf{S}_q\end{bmatrix}\qquad (q=\overline{1,n})\,,$$

где $\Delta\mathbf{x}_i$, $\mathbf{S}_i$ $(i=\overline{1,q})$ имеют тот же смысл, что и (2), (7).

2. Результаты расчетных исследований. Параметры системы определяются элементами матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$A=\begin{bmatrix}1{,}643 & 0 & -0{,}053 & 0 & -0{,}091 & 0 & -0{,}013\\ 0 & 1{,}643 & 0{,}053 & 0{,}091 & 0 & 0 & -0{,}013\\ -0{,}053 & 0{,}053 & 0{,}015 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}091 & 0 & 0{,}017 & 0 & 0 & 0\\ -0{,}091 & 0 & 0 & 0 & 0{,}017 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}534 & 0\\ -0{,}013 & -0{,}013 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7{,}97\cdot10^{-3}\end{bmatrix};$$

$$B=diag\left\{5{,}809\cdot10^3\;\;5{,}809\cdot10^3\;\;21{,}413\;\;97{,}469\;\;97{,}469\;\;2{,}213\cdot10^5\;\;174{,}7\right\}.$$

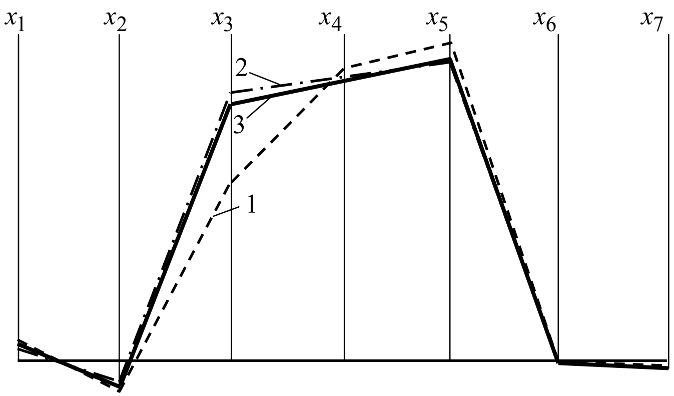

Рис. 1. Результаты оптимизации собственного вектора: 1 – исходное значение вектора; 2 – желаемое значение; 3 – значение после оптимизации

На рис. 1 представлены результаты оптимизации пятого собственного вектора с помощью двух параметров. Исходные значения указанных параметров $h=0{,}14\cdot10^{-2}$; $d=0{,}2\cdot10^{-2}$. Ломаными линиями показаны исходный собственный вектор, его желаемая конфигурация и результаты оптимизации. В качестве желаемой конфигурации собственного брался исходный вектор, у которого значение координаты x_3 увеличено на 30% и настолько же процентов уменьшены значения координат x_1 и x_2. Значения варьируемых параметров при этом оказались следующими: $h=0{,}177\cdot10^{-2}$; $d=0{,}288\cdot10^{-2}$.

Выводы. 1. Дан анализ современного состояния применения математических методов и моделей в стратегическом планировании и управлении проектами. 2. Предложен математический аппарат оптимизации внутренних экономических показателей как решение задачи синтеза собственных векторов соответствующих матриц. 3. Приведены результаты расчетов по оптимизации параметров матрицы за счет синтеза координат собственного вектора.

Список литературы: ***1.*** Оптимальное управление экономическими системами / Под ред. *П.Д. Шимко*. – СПб: Бизнес-пресса, 2004. – 240с. ***2.*** *Игнатьева А.В., Максимцов М.М.* Исследование систем управления. – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 157с. ***3.*** *Charles W. White and Bruce D. Maytum*. Eigensolution sensitivity to parametric model perturbations // The shock and vibration bulletin.–1976.–N. 46.–P. 123-133.

Поступила в редколлегию 07.12.09