УДК 519.816

М. М. МАЛЯР, канд. техн. наук

ВИЗНАЧЕННЯ ТА ЦІЛЕСПРЯМОВАНА ЗМІНА ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ПРИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОМУ ВИБОРІ

В статті описані методи визначення вагових коефіцієнтів і пропонується процедура, що дозволяє в автоматизованому режимі змінювати їх значення.

В статье описаны методы определения весовых коэффициентов и предлагается процедура, которая позволяет в автоматизированном режиме изменять их значения.

In the paper methods of the weight factors determination are described. And procedure of their significance change in automatic regimen is proposed.

Вступ. Результат діяльності в реальному житті майже неможливо оцінити одним числом. Наприклад, покупка машини. Покупець хоче, щоб ціна була невисока, машина надійна, дизайн хороший, експлуатація невисока і т.д. Всі ці характеристики між собою зв'язані і зміна однієї веде до зміни інших. Яким чином розв'язати таку проблему. Розв'язання таких проблем можлива за допомогою багатокритеріальних оптимізаційних моделей.

Багатокритеріальні моделі широко використовуються у всіх сферах людської діяльності. Опишемо дану модель наступним чином: нехай задана множина альтернатив X, кожна альтернатива цієї множини оцінюється за допомогою декількох показників ефективності. Необхідно вибрати найкращу альтернативу, або проранжувати їх у порядку привабливості.

Множина альтернатив X може задаватись континуальною множиною, тобто у вигляді області обмежень, або дискретно. Критерії (показники) ефективності можуть бути описані за допомогою цільових функцій або задані числовими оцінками. В подальшому будемо позначати їх $f_1(x), f_2(x),..., f_k(x)$, де k – кількість показників.

Кінцевою ціллю задачі вибору являється відшукання найкращого або "оптимального" розв'язку. Тому під оптимізацією розуміють відшукання альтернативи, яка переважає всі інші альтернативи в певному розумінні. Математична форма запису даної задачі наступна: знайти $\underset{x\in X}{extr}\ \{f_1(x), f_2(x),..., f_k(x)\}$.

Модель, що описує множину допустимих розв'язків є об'єктивною, але оцінка якості розв'язку проводиться за багатьма критеріями. Щоб вибрати найкращий результат потрібно знайти компроміс між оцінками за різними критеріями, тобто необхідна додаткова інформація. Такою інформацією служать ваги критеріїв, які показують важливість критеріїв і повинні або можуть залежати від значень самих критеріїв.

Постановка задачі. Найбільш поширеним методом розв'язування багатокритеріальних задач є метод згортки векторного критерію. Суть якого полягає у побудові скалярної функції F, яка являється узагальненим критерієм відносно векторного критерію та вектора ваг і багатокритеріальний вибір зводиться до розв'язання однокритеріальної задачі оптимізації $\underset{x\in X}{extr}\ F(\alpha, f(x))$, де $f(x) = \{f_1(x), f_2(x),..., f_k(x)\}$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_k\}$ – вагові коефіцієнти відносної важливості критеріїв $f_1(x), f_2(x),..., f_k(x)$.

В якості узагальнених критеріїв, наприклад, можуть бути використані відомі згортки наступного виду:

1. Адитивна $F(\alpha, f(x)) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)$.
2. Мультиплікативна $F(\alpha, f(x)) = \prod_{i=1}^{k} f_i^{\alpha_i}(x)$.
3. Середньо степенева $F(\alpha, f(x)) = \left[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)\right]^{1/k}$.

Таким чином, вибравши узагальнений критерій оптимальності, ми від суб'єктивізму при наданні переваги між векторними критеріями переходимо до суб'єктивізму, який пов'язаний з призначенням числових значень ваговим коефіцієнтам $\alpha_i\ (i = \overline{1,k})$. Як відзначається у роботі [1], визначення вагових коефіцієнтів являється двох етапною проблемою, тобто попереднє визначення і зміна цих значень. Тому виникають питання: "Яким чином задати числові значення ваговим коефіцієнтам?" і "Яким чином їх відкоригувати у разі необхідності?".

Відповідь на ці запитання в деякій степені можна отримати, якщо є додаткова інформація про важливість кожного критерію ефективності.

В подальшому будемо вважати, що вагові коефіцієнти є нормовані, тобто виконується додаткова умова $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ і величина α_i визначає важливість i-го критерію ефективності над іншими критеріями і задається кількісною оцінкою додатного значення.

Визначення вагових коефіцієнтів. Аналіз існуючих способів визначення вагових коефіцієнтів показує, що найбільш розповсюдженими є підходи, які використовують ранжування або попарне порівняння.

Приведемо деякі відомі способи визначення ваг [1, 2]. Для рівноцінних критеріїв значення ваг вибираються однаковими $\alpha_i = 1/k$, $i = \overline{1,k}$.

Для нерівноцінних критеріїв ваги вибираються у відповідності з важливістю критерію при виконанні умов:

$$\alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ i = \overline{1,k} . \quad (1)$$

Спосіб 1. Для кожного критерію оптимальності обчислюється коефіцієнт α_i, який визначає максимально можливе відхилення по i-му критерію

$$\alpha_i = \frac{f_i^M - f_i^m}{f_i^M} = 1 - \frac{f_i^m}{f_i^M} , \quad (2)$$

де $f_i^m = \min_{x \in X} f_i(x), \ f_i^M = \max_{x \in X} f_i(x)$.

Вагові коефіцієнти критеріїв обчислюються як $w_i = \alpha_i (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i)^{-1}, \ i = \overline{1,k}$, і отримують найбільше значення для тих критеріїв, відносне відхилення яких найбільш значуще.

Спосіб 2. Нехай всі $f_i^m \neq 0 \left(\overline{1,k}\right)$, тоді обчислюємо величини

$$\beta_i(x) = \frac{f_i(x) - f_i^m}{f_i^m} , \quad (3)$$

які характеризують відхилення критерію оптимальності від його найменшого значення.

Припустимо, що важливість i-го критерію оптимальності залежить від виконання нерівності

$$\beta_i(x) \leq \xi_i . \quad (4)$$

Величина ξ_i задається з умови, що чим важливіший критерій, тим менше вибирається значення ξ_i.

Розв'яжемо для кожного критерію оптимальності наступну задачу:

$$y^i = \arg\min_{x \in X} f_i(x), \ i = \overline{1,k} . \quad (5)$$

Нехай R_i^* – найбільший радіус кулі, яка побудована навколо точки мінімуму i-го критерію, всередині якої точки X задовольняють умові (4):

$$R_i^* = \max_{x \in X} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - y_j^i\right)^2 \right\} , \quad (6)$$

при умові $\beta_i(x) \leq \xi_i$, де n – розмір простору змінних X.

Чим більший радіус кулі R_i^*, в якому відносне відхилення i-го критерію від його мінімального значення не переважає ξ_i, тим менше потрібно вибирати значення вагового коефіцієнта.

Спосіб 3. Нехай маємо k критеріїв ефективності, що описуються цільовими функціями $f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)$.

Побудуємо матрицю A елементи якої обчислюються наступним чином

$$a_{ij} = \left| \frac{f_j^m - f_j(y_i)}{f_j^m} \right| . \quad (7)$$

Ці величини визначають відносне відхилення оптимального значення j-го критерію f_j^m від його значення, яке отримано при оптимальному розв'язку y_i для j-го критерію оптимальності $f_j(y_i)$. Очевидним є факт, що $a_{ii} = 0, a_{ij} \geq 0$.

Для кожного стовпця матриці A знаходимо максимальне і мінімальне (ненульове) значення $b_j = \max_i \{a_{ij}\}, \ c_j = \min_i \{a_{ij}\}, \ i = \overline{1,k}$.

Після чого обчислюємо величини $d_j = b_j - c_j$, а вагові коефіцієнти вибираються пропорційно значенням d_j

$$\alpha_j = [d_j] (\sum_{j=1}^{k} [d_j])^{-1}, \ j = \overline{1,k} , \quad (8)$$

де знак $[e]$ означає ціле значення числа e.

Якщо, наприклад, у l-му стовпчику значення $f_l(y_i)$ сильно відрізняються від f_l^*, тобто значення a_{il} мають великі значення, то ваговий коефіцієнт повинен, бути взятий великий.

Спосіб 4. Т. Сааті [3] запропонував мультиплікативну модель обчислення ваг критеріїв. Ідея даного підходу полягає в тому, що вагові коефіцієнти визначаються за допомогою процедури, яка аналогічна зважуванню "на око", тобто дається оцінка експертів у скільки разів один критерій важливіше іншого. Для цього він запропонував наступні оцінки:

- $p_{ij} = 1$, якщо f_i еквівалентний f_j;
- $p_{ij} = 3$, якщо f_i переважає f_j;
- $p_{ij} = 5$, якщо f_i суттєво переважає f_j;
- $p_{ij} = 7$, якщо f_i абсолютно переважає f_j;
- $p_{ij} = 9$, якщо f_i безумовно переважає f_j.

Значення $p_{ij} = 2, 4, 6, 8$ вважаються проміжними основних градацій. Діагональні елементи матриці парних порівнянь $p_{ii} = 1$, а $p_{ji} = 1/p_{ij}$.

Ваги порівнюваних об'єктів обчислюються наступним чином:

$$\lambda_i = \sqrt[k]{\prod_{j=1}^{k} p_{ij}}\,, \qquad \alpha_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i},\ i = \overline{1,k}\,. \qquad (9)$$

Спосіб 5. Дуже часто інформація про важливість критеріїв оптимальності може бути задане за допомогою матриці парних порівнянь A.

Для побудови матриці парних порівнянь можуть бути задані різні типи калібровок переваг. Опишемо деякі з них:

1. Проста структура:

$$\forall i, j; i \neq j,\ a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } f_i \text{ переважає } f_j, \\ 0, & \text{якщо } f_j \text{ переважає } f_i, \\ 1/2, & \text{якщо } f_i \text{ еквівалентний } f_j. \end{cases}$$

2. Турнірна: $\forall i, j;\ a_{ij} \geq 0;\ a_{ij} + a_{ji} = const$.
3. Степенева: $\forall i, j;\quad a_{ij} > 0;\quad a_{ij} * a_{ji} = 1$.
4. Косометрична: $\forall i, j;\quad a_{ij} + a_{ji} = 0$.
5. Імовірнісна: $\forall i, j;\quad 0 \leq a_{ij} \leq 1;\quad a_{ij} + a_{ji} = 1$.

Існують схеми переходів між типами калібровок.

Після побудови матриці парних порівнянь вагові коефіцієнти можуть бути обчислені наступним чином:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\right)^{-1}. \qquad (10)$$

Алгоритм модифікації вагових коефіцієнтів. На сьогоднішній день відомо багато підходів, методів та алгоритмів щодо модифікації значень вагових коефіцієнтів. Автором пропонується підхід інтерактивного корегування ваг [4], суть якого полягає у тому, що він надає можливість одночасно змінювати і залишати незмінними декілька вагових коефіцієнтів.

Загальна схема підходу виглядає наступним чином:

1. Нехай значення вагових коефіцієнтів визначені: задані або обчислені.
2. У діалоговому режимі будується множина величин $W = \{W_i\}, i = \overline{1,k}$:

$$W_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо вагу } i\text{-го критерія потрібно замінити,} \\ 0, \text{ якщо вагу } i\text{-го критерія потрібно залишити,} \\ -1, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

3. На основі множини W будуються множини величин $U = \{U_i\}, V = \{V_i\}, \left(i = \overline{1,k}\right)$

$$U_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } W_i = 1, \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases} \qquad V_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } W_i = 0, \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

4. Визначаються нові значення для ваг критеріїв за наступною формулою:

$$\alpha_i^H = \frac{(1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^c V_j + \varepsilon U_i)\alpha_i^c}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^c V_j - \dfrac{\varepsilon(V_i - 1)\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^c U_j}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^c V_i}}, \qquad (11)$$

де α_i^H, α_i^C – відповідно нові і старі значення ваг. Величина ε задається користувачем і від неї залежить зміна ваг. Якщо $\varepsilon > 0$,то відповідні ваги збільшуються, а якщо $\varepsilon < 0$ – то зменшуються.

Висновки. Як показують дослідження проведені по взаємозв'язку людини з комп'ютером, людина здатна вказати значення якого критерію вона хотіла би збільшити, а якого зменшити. І це можливо через зміну ваг. Ця задача є складною, оскільки наслідки зміни ваг непередбачувані. Наприклад, людина не може знати на скільки змінити ваги критеріїв, щоб результат став задовільним.

Список литературы: ***1.*** *Айвазян С.А., Бухштабер В.М. и др.* Прикладная статистика: классификация и снижение размерности – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с. ***2.*** *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений: Учебное пособие. – М.: МАКСПресс, 2008. – 197 с. ***3.*** *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М: Радио и связь, 1993. – 278 с. ***4.*** *Маляр М.М.* Деякі алгоритми знаходження ефективного розв'язку у багатокритеріальних задачах лінійного програмування. – "Теорія обчислень". Зб. наук. праць НАН України ІК ім. В.М. Глушкова. – Київ – 1999. – С. 252-254.

Надійшла до редколегії 15.12.09