

Н. Е. ХАЦЬКО, аспирант НТУ «ХПИ»

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ МИНИМАЛЬНО-ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМЫ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ

Отримано рішення задачі оптимального конструювання вимірювального модуля з мінімально надлишковою кількістю вимірів для оцінки вектора в умовах одиничних відмов датчиків, що розташовані на базових координатних осях.

Решена задача оптимального построения измерительного модуля с минимальной избыточностью измерений для оценки вектора при единичных отказах датчиков, расположенных на базовых координатных осях.

The problem of optimal design of measuring cell (or module) for estimating of measurable vector with minimal measuring redundancy was solved. The estimation was made under condition of single sensor failures.

Введение. В настоящее время в автоматических системах управления движением в качестве датчиков информации о движении все чаще используются инерциальные модули, выполненные на основе микро электромеханических систем (МЭМС) [1]. Такие устройства привлекают внимание широкого слоя потребителей доступностью и относительно невысокой стоимостью. Однако для таких применений, как космическая, ракетная, авиационная техника, точность подобных систем недостаточна. Для повышения точности измерений разрабатываются различные методы, основанные как на конструктивных, так и на алгоритмических решениях. Важным является также вопрос отказоустойчивости инерциальных модулей, вследствие чего в их состав включают дополнительные датчики. При этом, как правило, в состав модулей включают датчики одного класса точности [2]. В частности, в [3], [4] рассмотрены несколько вариантов построения избыточного по числу измерителей инерциального блока с использованием датчиков одинаковой точности.

Поскольку производство МЭМС-датчиков носит массовый характер, разброс точностных характеристик изделий одной и той же серии оказывается большим. Поэтому до использования измерителей в составе инерциального модуля следует провести уточнение их индивидуальных характеристик, после чего возникает задача выбора оптимальной структуры инерциального модуля в условиях неравноточных датчиков.

Следует отметить, что при использовании минимального числа измерителей – трех, задача оказывается тривиальной. Наилучшим ее решением является ортогональное расположение в модуле осей чувствительности датчиков. Задача становится значимой, если рассматривается избыточное число неравноточных измерителей.

Предлагается решение задачи оптимального конфигурирования минимально избыточной системы неравноточных измерителей по критерию минимальной погрешности измерений в случае отказа одного из датчиков. При этом предполагается, что вероятность отказа наиболее точного датчика пренебрежимо мала. С точки зрения практической реализации такое предположение допустимо, если в качестве наиболее точного датчика используется датчик другого класса, с заведомо более высокими характеристиками.

Постановка задачи. Рассматривается способ повышения точности измерений в условиях неравноточных датчиков на основе их избыточности.

В общем случае результатом работы инерциального модуля есть измерения вектора в трехмерном базовом пространстве, связанном с самим модулем. В составе модуля обычно имеются три измерителя, направление осей чувствительности которых в идеальном построении образуют ортогональный базис, и любой вектор однозначно определяется в этом пространстве его измеренными проекциями на оси чувствительности.

Зададим базовое ортогональное пространство и некоторый вектор в этом пространстве $\vec{a} = \text{col}\{a_x, a_y, a_z\}$. Вектор измерений обозначим $\vec{a}^* = \{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$.

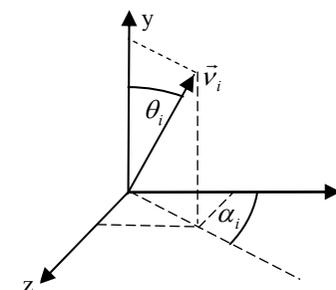


Рис. 1. Геометрическое расположение измерительных осей в пространстве

Минимально избыточными в трехмерном пространстве являются четыре измерения. В общем случае положение любой измерительной оси определено двумя углами α и θ , что показано на рис. 1. Измерение каждой из них можно представить как разложение по компонентам в ортогональном базисе: $\vec{v}_i = \{v_x^i, v_y^i, v_z^i\} = \{|v_x^i| \cdot n_1^i, |v_y^i| \cdot n_2^i, |v_z^i| \cdot n_3^i\}$, где n_j^i – направляющие косинусы осей: $n_1^i = \cos \alpha_i \sin \theta_i$, $n_2^i = \cos \theta_i$, $n_3^i = \sin \alpha_i \sin \theta_i$, $i = \overline{1,4}$.

Объединим измерения вектора \vec{a} всеми датчиками в вектор $\vec{a}^* = \text{col}\{a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*\}$, который связан с измеряемым вектором выражением

$$\vec{a}^* = G(\vec{\alpha}, \vec{\theta}) \cdot \vec{a}, \quad (1)$$

где матрица G составлена из направляющих косинусов осей измерителей.

Комплексирование совокупности измерений проводится при помощи метода наименьших квадратов (МНК), тем самым получается оценка измеряемого вектора \vec{a} :

$$\vec{a} = (G^T G)^{-1} \cdot G^T \cdot \vec{a}^* . \quad (2)$$

В реальной системе измеренные значения вектора \vec{a}^* содержат в себе ошибки. Будем считать, что в модель ошибок аддитивно входят только случайные составляющие $\vec{\delta a}^* = \{\delta a_1^*, \delta a_2^*, \delta a_3^*, \delta a_4^*\}$, которые имеют нулевое математическое ожидание, дисперсии $\sigma_i^2, i = \overline{1,4}$ и не коррелированы между собой. Ошибка измерения вектора \vec{a} в базисном пространстве будет составлять разность между комплексированным и истинным значением

$$\vec{\delta a} = \vec{a} - \vec{a} . \quad (3)$$

Учитывая аддитивный характер вхождения составляющих в математическую модель измерений, можно записать

$$\vec{a} + \vec{\delta a} = (G^T G)^{-1} \cdot G^T \cdot (\vec{a}^* + \vec{\delta a}^*) ,$$

тогда выражение для ошибок аналогично (2):

$$\vec{\delta a} = (G^T G)^{-1} \cdot G^T \cdot \vec{\delta a}^* . \quad (4)$$

Ортогональное расположение осей трех датчиков является наилучшим для измерения вектора, поэтому оси чувствительности менее точных измерителей направим вдоль базовых осей. В этом случае матрица G имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \alpha \sin \theta & \cos \theta & \sin \alpha \sin \theta \end{bmatrix} \text{ или } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} , \quad (5)$$

где углы α и θ определяют направление оси четвертого датчика и являются искомыми величинами.

Оценка измеряемого вектора \vec{a} зависит от матрицы $K(\alpha, \theta) = (G^T G)^{-1} \cdot G^T$, содержащей значения направляющих косинусов для четвертого измерителя. Введем скалярную меру точности оценки:

$$F(\vec{\delta a}) = (\vec{\delta a}, \vec{\delta a}) = (K \cdot \vec{\delta a}^*, K \cdot \vec{\delta a}^*) \quad (6)$$

Очевидно, что наилучшая оценка измеряемого вектора в смысле минимума $F(\vec{\delta a})$ получается при замене наименее точного измерителя на наиболее точный, при этом измерения наименее точного датчика игнорируются. Однако при возможном отказе одного из «грубых» датчиков такое решение приводит к потере полноты измерений трехмерного вектора.

В этих условиях формулируется задача определения такого положения оси четвертого датчика, чтобы в случае отказа одного из трех «грубых» датчиков точность оценка измеряемого вектора по показаниям оставшихся трех датчиков была одинаковой, не зависимо от номера отказавшего датчика. Иными словами, **решается задача поиска положения четвертой оси чувствительности**, при котором оценки измеряемого вектора при любом отказе одного из датчиков, расположенных на базовых координатных осях, будут осуществляться с одинаковой точностью.

Анализ задачи. Рассмотрим случаи отказа первого, второго или третьего датчика, на что в дальнейшем изложении будут указывать индексы. Такие отказы меняют вектор измерений \vec{a}^* и матрицу (5): соответствующие строки матрицы G и вектора $\vec{\delta a}^*$ вычеркиваются и модель (4), (6) упрощается до вида

$$\vec{\delta a} = G_i^{-1} \cdot \vec{\delta a}_i^* , \quad (7)$$

$$F(\vec{\delta a}) = (\vec{\delta a}, \vec{\delta a}) = (G_i^{-1} \cdot \vec{\delta a}_i^*, G_i^{-1} \cdot \vec{\delta a}_i^*) , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (8)$$

Случайный характер ошибки измерений позволяет перейти к рассмотрению дисперсий оценок. Дисперсия ошибки оценки вектора при использовании четырех измерений имеет вид

$$D = \sigma_1^2 \left(1 - \frac{3}{4} n_1^2 \right) + \sigma_2^2 \left(1 - \frac{3}{4} n_2^2 \right) + \sigma_3^2 \left(1 - \frac{3}{4} n_3^2 \right) + \frac{1}{4} \sigma_4^2 . \quad (9)$$

Из (4) видно, что дисперсия ошибки для оценки, построенной по четырем измерениям, меньше, чем ошибка оценки по трем «грубым» измерителям, соответствующая выражению $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$. Отношение оценок выражается следующей зависимостью

$$\frac{D}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = 1 - \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \cdot \left(\frac{3}{4} (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) + \frac{1}{4} \sigma_4^2 \right) < 1 . \quad (10)$$

Следовательно, введение в систему измерений четвертого более точного датчика целесообразно.

При отказе одного из трех датчиков выражение для дисперсии принимает вид:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{\sigma_2^2(1-n_3^2) + \sigma_3^2(1-n_2^2) + \sigma_4^2}{n_1^2} \\
D_2 &= \frac{\sigma_1^2(1-n_3^2) + \sigma_3^2(1-n_1^2) + \sigma_4^2}{n_2^2}, \\
D_3 &= \frac{\sigma_1^2(1-n_2^2) + \sigma_2^2(1-n_1^2) + \sigma_4^2}{n_3^2}
\end{aligned} \quad (11)$$

В соответствии с введенным критерием в основу выбора расположения четвертого датчика полагаются условия

$$D_1 = D_2 = D_3. \quad (12)$$

Для достижения полноты системы уравнений воспользуемся связью направляющих косинусов для искомой оси, и запишем следующую систему

$$\begin{cases}
D_2 - D_3 = 0 \\
D_1 - D_3 = 0 \\
n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1
\end{cases}. \quad (13)$$

Решение системы. Введем новые переменные: $x = \frac{n_1^2}{n_3^2}$, $y = \frac{n_2^2}{n_3^2}$, $z = \frac{1}{n_3^2}$.

В результате система уравнений (13) относительно трех переменных x, y, z принимает вид:

$$\begin{cases}
x(\sigma_1^2 + \sigma_4^2) + y(\sigma_2^2 + \sigma_4^2) - \frac{1}{x}(\sigma_3^2 + \sigma_4^2) - \frac{y}{x}(\sigma_2^2 + \sigma_4^2) + \sigma_1^2 - \sigma_3^2 = 0 \\
\frac{1}{y}(\sigma_3^2 + \sigma_4^2) + \frac{x}{y}(\sigma_1^2 + \sigma_4^2) - \frac{1}{x}(\sigma_3^2 + \sigma_4^2) - \frac{y}{x}(\sigma_2^2 + \sigma_4^2) + \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 0 \\
x + y + 1 = z
\end{cases} \quad (14)$$

Последовательно исключая переменные, получим кубичное уравнение

$$\begin{aligned}
&x^3(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)(\sigma_1^2 + \sigma_4^2) + x^2(\sigma_1^2 + \sigma_4^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_3^2) + \\
&+ x(\sigma_3^2 + \sigma_4^2)(\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_1^2) + (\sigma_3^2 + \sigma_4^2)(\sigma_3^2 + \sigma_2^2) = 0.
\end{aligned} \quad (15)$$

После приведения его к нормальному виду и использования подстановки $x = \lambda - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_3^2}{3(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}$ уравнение (15) решается методом Кардано.

Численные примеры решения задачи приведены в таблице 1.

Моделирование. Приведем пример применения изложенного подхода при оценивании величины вектора \vec{a} по четырем неравноточным измерениям. Излагаемые ниже результаты получены численным моделированием. Динамика во времени измеряемого вектор \vec{a} задается своими проекциями, меняющимися по закону

$$a_x^* = A + \delta a_x(t)$$

$$a_y^* = B + \delta a_y(t),$$

$$a_z^* = C + \delta a_z(t)$$

где A, B, C – константы. Данный вектор измеряется четырьмя датчиками, и их случайные погрешности определяются дисперсиями, указанными в четырех первых столбцах таблицы 1. Три первых датчика расположены вдоль базисных осей, расположение четвертого найдено из условия равноточности оценки при отказе одного из «грубых» датчиков. Таким образом, в модели заданы найденные при решении системы уравнений (13) оптимальные углы наклона оси четвертого измерителя. Эти углы, рассчитанные для различных сочетаний точностей базисных измерителей, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Точность датчиков, дисперсии осей				значение угла α , град.	значение угла θ , град.
σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2		
0,64	0,04	0,16	0,01	59,87	39,48
0,64	0,16	0,04	0,01	67,54	56,64
0,04	0,64	0,16	0,01	35,47	71,39
0,3	0,36	0,2	0,01	48,91	58,23
0,36	0,3	0,2	0,01	50,59	56,03
0,36	0,2	0,3	0,01	46,71	50,13
0,25	0,25	0,25	0,01	45,0	54,74

В каждой точке для оценки величины измеряемого вектора \vec{a} измерения обрабатывались с помощью МНК. В результате моделирования получены 5 рядов, соответствующих оценкам величины вектора \vec{a} в течении времени при различных сочетаниях датчиков. Как показано в таблице 2 и на рис. 2, апостериорные значения дисперсий измерений при отказах датчиков сравнимы между собой, и их можно округлить до априорного теоретического значения. Дисперсии оценок по базисным и избыточным измерениям близки к своим теоретическим значениям, рассчитанным по формулам (9), (11).

Таблица 2

значение	дисперсии оценок по измерениям:				
	трем	четырем	отказ 1 ^{го} дат.	отказ 2 ^{го} дат.	отказ 3 ^{го} дат.
теоретическое	0,84	0,739	1,0	1,0	1,0
1-я реализация	0,85	0,740	1,02	1,02	1,02
2-я реализация	0,85	0,742	0,96	1,02	1,02

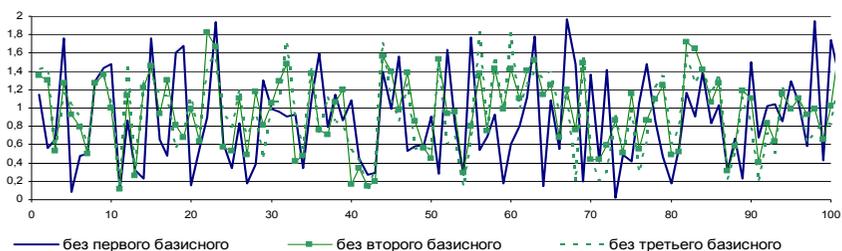


Рис. 2. Погрешности оценок измерений в случае отказа одного из датчиков, расположенных на базисных осях.

Выводы. Таким образом, после применения алгоритма комплексирования оценка измеряемого вектора улучшается, степень повышения точности зависит от точности дополнительно введенного измерителя. Найдена зависимость положения четвертой оси чувствительности для равноточной оценки измеряемого вектора при любом отказе одного из датчиков, расположенных на базисных координатных осях. Результаты моделирования подтверждают теоретические выводы.

Список литературы: 1. Кробка Н. И., Мезенцев А. П., Мезенцев О. А. Методики калибровки микроэлектромеханических инерциальных измерительных блоков в массовом производстве. // XIV С-Пб. междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. – СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 28-30 мая 2007. С. 96-99. 2. Бранец В. Н., Дибров Д. Н. и др. Измеритель вектора кажущегося линейного ускорения – прибор БИЛУ КХ69-042 для СУ спускаемого аппарата «Союз-ТМА» // XIII С-Пб. Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. – СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор». – 2006. – С. 253-263. 3. Мумин О. Л., Дроздов М. В., Рябова Л. П. и др. Трехкоординатный малогабаритный акселерометр с цифровым выходом повышенной надежности // XVI С-Пб. междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. – СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», – 2009. – С. 66-68. 4. Бельский Л. Н., Водичева Л. В. Повышение точности гироскопирования за счет выбора ориентации осей чувствительности измерителей // Гироскопия и навигация. – 2000. -№ 3. – С. 3-16.

Поступила в редколлегию 30.11.09