УДК 519.7

М. Л. ЛЮБЧИК, аспірант НТУ «ХПІ»

АНАЛІЗ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ СИСТЕМИ «БОНУС-МАЛУС» НА ОСНОВІ МАРКІВСЬКИХ МОДЕЛЕЙ

В статті розглядається задача аналізу системи «бонус-малус» в автомобільному страхуванні. З застосуванням негативної біноміальної моделі для розподілу числа страхових випадків проведене і досліджене моделювання зміни середнього рівня премій, величини нарахування в перший рік і еластичності системи «бонус-малус» для різних видів транспорту.

В статье рассматривается задача анализа системы «бонус-малус» в автомобильном страховании. На базе отрицательной биномиальной модели для распределения числа страховых случаев проведено и исследовано моделирование изменения среднего уровня премий, величины начисления в первый год и эластичности системы «бонус-малус» для различных видов транспорта.

In this paper inverse the problem of analysis of "bonus-malus" in automobile insurance. On the basis of the negative binomial model for the distribution of the number of insurance cases performed and studied modeling changes in the average level of premiums, the value of assessment in the first year and the elasticity of the «bonus-malus» system for different modes of transport.

Вступ. Важливим інструментом, що застосовується при страхуванні громадянської відповідальності власників транспортних засобів є так звана система «бонус-малус», що використовується страховими компаніями при розрахунку вартості договору страхування. Система «бонус-малус» (СБМ) передбачає зменшення або збільшення страхової премії стосовно базового страхового тарифу, якій власник транспортного засобу зобов'язаний заплатити при укладанні договору страхування [1]. Коефіцієнт, що знижує страхову премію (бонус), застосовується у випадку, якщо водій не здійснював шляхово-транспортні випадки (ШТП) в період дії попереднього договору страхування, інакше застосовується коефіцієнт, що підвищує премію (малус)

Метою даної роботи є аналіз показників якості функціонування СБМ на основі статистиці страхових випадків, зареєстрованих страховою компанією.

Постановка задачі. В основу моделювання СБМ покладене розподіл полісів на кінцеве число класів, що позначені через $C_i \quad (i = 1...s)$, так, щоб розмір річної премії залежав тільки від номера класу. Клас, до якого відноситься поліс у поточний період страхування, визначається класом, у якому він перебував у попередній період і числом страхових випадків, що було зареєстровано у даний період. Така система визначається трьома елементами: преміальною шкалою $b = (b_1 \dots b_n)$, початковим класом C_0 і перехідними правилами, які визначають умови переходу з одного класу в іншій, за умови, що число страхових випадків відомо. Ці правила можна ввести у вигляді перетворень T_k таких, що $T_k(i) = j$, якщо поліс переходить із класу C_i в клас C_j, за умови, що зареєстровано k страхових випадків.

Перетворення T_k можна представити у вигляді матриці $T_k = (t_{ij}(k))$, де $t_{ij}(k) = 1$, якщо $T_k(i) = j$ й $t_{ij}(k) = 0$ у протилежному випадку.

Імовірність переходу із класу C_i в клас C_j для страхувальника характеризується параметром λ - частотою страхових випадків, і має вигляд

$$P_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\lambda) t_{ij}(k), \tag{1}$$

де $P_k(\lambda)$ - ймовірність того, що з вини водія відбудеться k страхових випадків протягом року. Очевидно, що $P_{ij}(\lambda) \geq 0$ й $\sum_{j=0}^{S} P_{ij}(\lambda) = 1$. Тоді послідовність переходів водія із класу в клас визначається ланцюгом Маркова з перехідною матрицею

$$\Pi(\lambda) = \left\| P_{ij}(\lambda) \right\|. \tag{2}$$

де $P_{ij}(\lambda)$ - ймовірність переходу водія із класу i в клас j.

Найпоширенішими моделями для розподілу числа страхових випадків у страховому портфелі є пуасонівська, негативна біноміальна, зворотна гаусівська модель і модель «гарні/погані ризики» [1]. Пуасонівський розподіл дає гарний опис поводження індивідуальних страхувальників і використається для порівняння різних СБМ із погляду страхувальника, але найбільш точним виявляється негативний біноміальний розподіл [1].

Вибір моделі розподілу страхових випадків. Найбільш поширеною є пуасонівська модель, яка передбачує, що розподіл $\{p_k(\lambda), k = 0,1,2\dots\}$ числа страхових випадків відповідає пуасонівському закону:

$$p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,2\dots \tag{3}$$

Проста пуасонівська модель не завжди відповідає даним реальних статистичних спостережень. Відхилення гіпотези про пуасонівський вигляд моделі є наслідком того, що поводження страхувальників є неоднорідним. Більш реалістичною є так звана негативна біноміальна модель, що дозволяє задовільно моделювати розподіл числа страхових випадків.

Для отримання негативної біноміальної моделі припустимо, що розподіл $\{p_k(\lambda), k = 0,1,2\dots\}$ числа страхових випадків на рахунку кожного страхувальника відповідає пуасонівському розподілу, у якому значення параметра λ міняється від одного страхувальника до іншого. Кожен страхувальник характеризується значенням свого параметра λ. При такому підході λ розглядається як випадкова величина Λ з гама-розподілом [2]. Тоді розподіл числа страхових випадків має назву змішаного пуасонівського розподілу і визначається формулою:

$$p_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} u(\lambda) d\lambda, \quad k = 0,1,2\ldots \tag{4}$$

де $u(\lambda)$ - так звана структурна функція, а саме щільність розподілу випадкової величини Λ. Виберемо розподіл випадкової величини Λ у вигляді гамма-розподілу $u(\lambda) = \dfrac{\tau^{\alpha} e^{-\tau\lambda} \lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $\alpha, \tau > 0$ з параметрами α й τ.

Негативний біноміальний розподіл сходиться до пуасонівського при $\alpha \to \infty$ й при $\tau \to 0$ за умови, що середнє залишається постійним. Таким чином, параметр α може інтерпретуватися як міра концентрації в реалізації страхових випадків із часом. Використання негативного біноміального розподілу замість пуасонівського є розумним, якщо концентрація слабо впливає, тобто якщо α мало.

Негативна біноміальна модель має дуже важливу теоретичну властивість стабільності структурної функції [3]. Покажемо, що якщо апріорним розподілом випадкової величини Λ є гамма-розподіл з параметрами α й τ, той апостеріорний розподіл також є гамма-розподілом, але з параметрами $\tau + t$ та $\alpha + k$, де $k = \sum_{i=1}^{t} k_i$ - загальне число страхових випадків. Таким чином, якщо відбуваються k аварій у t років, то це приведе тільки до зміни параметрів гамма-розподілу, а саме, α і τ заміняться $\alpha + k$ й $\tau + t$.

Дійсно, за теоремою Байеса

$$u(\lambda | k_1, \ldots, k_t) = \frac{(\tau + t)^{\alpha + k} \lambda^{\alpha + k - 1} e^{-(t + \tau)\lambda}}{\Gamma(\alpha + k)}, \tag{6}$$

що є функцією щільності розподіли-гамма-розподілу з параметрами $\tau + t$ й $\alpha + k$ [4].

Аналіз системи «бонус-малус». Відповідно до основного рівняння динаміки марківського ланцюга

$$P^T(t+1) = P^T(t) \cdot \Pi, \tag{7}$$

де $\Pi_{ij} = P(S(t+1) = j | S(t) = i)$ - перехідна матриця, $P(t) = (P_1(t) \ldots P_N(t))$ - розподіл ймовірностей знахождения страхувальника у відповідному класі СБМ, що задовольняє умовам нормування ($\sum_{i=0}^{N} P_i(t) = 1, \quad 0 \le P_i(t) \le 1$), t - номер року, N - кількість класів у СБМ.

Використовуючи вектор ймовірностей знаходження страхувальника у відповідному класі СБМ $P(t)$ у рік t можна знайти середню премію, що виплачує страхувальник

$$A = (\textstyle\sum_{i=0}^{N} P_i(t) * S_i) / N. \tag{8}$$

Знайдений розподіл ймовірностей стану страхувальника дозволяє провести аналіз ефективності СБМ шляхом обчислення показників ефективності, а саме відносного стаціонарного середнього рівня премій ρ, величини нарахування в перший, вступний рік r та еластичності середньої стаціонарної премії $\eta(\lambda)$ щодо частоти страхових випадків λ:

$$\rho = \frac{A - A\min}{A\max - A\min}, \; \mathrm{r} = \frac{Ain - A}{A}, \; \eta(\lambda) = \frac{dP(\lambda)/P(\lambda)}{d\lambda/\lambda}, \tag{9}$$

де A - середня премія, Amin - мінімальна премія, Amax - максимальна премія, Ain - початкова премія.

За допомогою розробленої математичної моделі був проведений чисельний аналіз ефективності СБМ, а саме, моделювання зміни середнього рівня премій, величини нарахування в перший рік й еластичності СБМ для різних видів транспорту залежно від часу. При цьому для побудови моделі було використане реальні статистичні дані, отримані від страхових фірм України за 2005-2007 роки.

Висновки. З застосуванням отриманих результатів була сконструйована оптимальна по прибутку СБМ, що мінімізує ризик страхової фірми для кожного виду транспорту. Дослідження залежності доходу страхової фірми від значення середнього розміру виплати по страховому випадку для різних видів транспорту дозволило виділити його збиткові види. Математична модель, що розглядається в даній роботі, може бути застосована на практиці для удосконалення систем автомобільного страхування.

Список литературы: ***1.*** *Лемер Ж.* Системы «бонус-малус» в автомобильном страховании: Перев. с англ., изд 2-е. – М.: Янус-К, 2003. – 259с. ***2.*** *Лемер Ж.* Автомобильное страхование. Актуарные модели: Перев. с англ., изд 2-е – М.: Янус-К, 2003. – 308с ***3.*** *Фалин Г.И.* Математический анализ рисков в страховании. – М.: Росс. Юр. Изд. Дом, 1994. ***4.*** *R.Kaas, M.Goovaerts, J. Dhaene, M.Denuit* «Modern Actuarial Risk Theory». – Kluwer Academic Publishers, 2001. – 309 p. – ISBN 0-7923-7636-6

Поступила в редколлегию 14.12.09