

Д. О. САПОЖНИК, аспірант кафедри інженерії програмного забезпечення, Державний університет «Житомирська політехніка», Житомир, Україна; e-mail: phd121221_sdo@student.ztu.edu.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1357-2422>

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ МАКСИМАЛЬНОГО РОЗРІЗУ ГРАФА ЗА ДОПОМОГОЮ КВАНТОВО-ГІБРИДНОГО АМПЛІТУДНО-СТОХАСТИЧНОГО АЛГОРИТМУ

Запропоновано новий квантовий алгоритм під назвою «квантово-гібридний амплітудно-стохастичний алгоритм» (QASPA), призначений для наближеного розв'язання задачі максимального розрізу графа. Задача максимального розрізу полягає у поділі множини вершин на дві підмножини таким чином, щоб сумарна вага ребер, що з'єднують вершини різних підмножин, була максимальною. Дана задача є NP-складною комбінаторною проблемою. Класичні алгоритми розв'язання займають надто багато часу виконання, в наслідок чого не є ефективними на середніх та великих графах. Наближені алгоритми розв'язання, забезпечують лише гарантоване наближення, не долаючи обмежень точності та швидкодії на великих графах. Запропонований алгоритм вирізняється простою схемою та мінімальною кількістю оптимізованих параметрів. Вхідний граф подається у вигляді матриці суміжності, після чого ваги ребер лінійно нормалізуються до фіксованих фазових кутів. Квантова схема починається з ініціалізації кожного кубіта перетворенням Адамара, що формує рівномірну суперпозицію всіх можливих розбиттів. Далі для кожної пари суміжних вершин послідовно застосовуються контрольований логічний NOT, однокубітний поворот навколо осі Y на кут, пропорційний вазі ребра, і повторний контрольований логічний NOT. У такий спосіб фазова інформація про ваги ребер кодується у квантовий стан системи. Після виконання схеми кубіти вимірюються у стандартному обчислювальному базисі, а отриманий розподіл ймовірностей дозволяє вибрати найімовірніше розбиття як наближений розв'язок задачі. Експериментальні дослідження на програмних симуляторах квантових процесорів показали, що запропонований алгоритм демонструє точність, порівнянну з варіаційним підходом квантового алгоритму наближеної оптимізації (QAOA), та забезпечує суттєво менший час обчислень завдяки відсутності ітеративної оптимізації параметрів. Крім того, зі збільшенням розміру графа час виконання алгоритму зростає значно повільніше, ніж у класичного повного перебору та QAOA, що підтверджує його перспективність для розв'язання середніх за розміром задач максимального розрізу.

Ключові слова: задача максимального розрізу графа, квантові алгоритми, QASPA, суперпозиція, фазові зсуви, QAOA, квантове програмування.

Вступ. Задача максимального розрізу графа (Max-Cut) – це задача розбиття вершин графа на дві множини таким чином, щоб максимізувати сумарну вагу ребер між цими множинами, що є NP-складною комбінаторною оптимізаційною проблемою [1]. Для задачі Max-Cut (рис. 1) не існує відомих поліноміальних алгоритмів розв'язання, а кількість необхідних операцій для їх вирішення, у найгіршому випадку зростає, експоненційно зі збільшенням розміру графа. Задача максимального розрізу графа має важливі застосування у таких областях як теорія мереж, розподілені обчислення, проектування мікросхем, кластеризація даних, машинне навчання та фінансові моделі, де оптимальні або майже оптимальні рішення можуть значно вплинути на ефективність процесів [2].

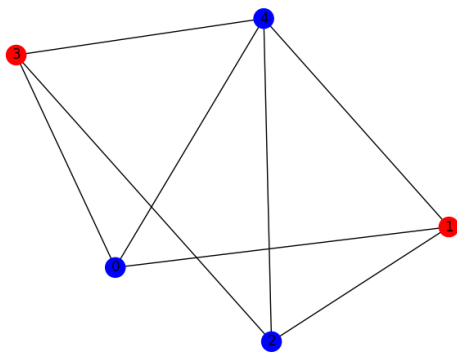


Рис. 1. Зображення розв'язаної задачі Max-Cut

Наразі найвідомішим класичним алгоритмом, що наближено знаходить рішення даної задачі, є алгоритм Мішеля Гоеманса та Девіда Вільямсона (GW), який ви-

користовує методи напівдефінітного програмування та забезпечує гарантоване наближення до оптимального рішення на рівні щонайменше 87.8 % (коефіцієнт наближення 0.878) [2]. Хоча складність алгоритму є поліноміальною, проте отримане рішення залишається наближеним і часто недостатньо точним для багатьох практичних завдань. Інші класичні методи, такі як евристичні та метаевристичні алгоритми (наприклад, генетичні алгоритми, алгоритми імітації відпалу чи алгоритми рою частинок), також активно застосовуються, але вони не гарантують досягнення оптимального розв'язку і часто мають значні обмеження за точністю.

Тому важливими є дослідження нових методів вирішення задачі Max-Cut, особливо з використанням квантових обчислень. Задача максимального розрізу графа еквівалентна знаходженню основного стану спінової моделі Ізінга, що відкриває перспективні можливості для застосування квантових алгоритмів, таких як квантовий алгоритм наближеної оптимізації. Квантові алгоритми мають потенціал значно покращити точність і ефективність наближеного розв'язання таких складних комбінаторних задач завдяки здатності ефективно досліджувати великі простори розв'язків, які є недосяжними для класичних алгоритмів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Одним із перспективних підходів до розв'язання NP-складних задач на квантовому комп'ютері є квантові варіаційні алгоритми. Найвідомішим серед них є квантовий алгоритм наближеної оптимізації (QAOA), який було запропоновано авторами у 2014 році [3] як гібридний квантово-класичний метод для наближеного розв'я-

© Сапожник Д. О. 2025



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом **НТУ «ХПІ»** у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Common Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



зання задач комбінаторної оптимізації, що виконує на квантовому процесорі параметризований чергований ланцюг унітарних перетворень, а підбір параметрів здійснюється класичним оптимізатором. Збільшення кількості шарів (глибини) в QAOA теоретично підвищує якість розв'язку, вже при глибині 1 для 3-регулярних графів алгоритм гарантовано досягає приблизно 0.6924 від оптимального розрізу [3]. Подальші дослідження показали, що при збільшенні кількості шарів QAOA може перевершувати цей поріг і наближатися до відомої межі GW для більшої глибини, проте отримання суттєво кращих результатів потребує глибших квантових кіл та більшої кількості кубітів. Дослідження Сапожника Дмитра про реалізацію квантового алгоритму наближеної оптимізації на мові програмування JavaScript для задачі максимального розрізу графа показало доступність квантово-гібридних алгоритмів на різних платформах програмування [4], що впливає на розповсюдженість квантових технологій у широкому колі людей, шляхом високорівневої абстракції над квантовими технологіями.

Практичні випробування QAOA на сучасних квантових процесорах продемонстрували можливість знаходити розрізи, кращі за випадкові, однак зі зростанням розміру задачі якість рішення погіршується через обмеження апаратури [5]. Аналітичні оцінки також вказують, що для досягнення квантової переваги на задачі Max-Cut за допомогою QAOA може знадобитися масштабування до сотень кубітів.

Альтернативою варіаційним алгоритмам є квантовий відпал або адіабатичні квантові обчислення. Ідея адіабатичного підходу була вперше продемонстрована Едвардом Фарі зі співавторами у 2001 році [6], основна задача якого у трансформації системи від простого гамільтоніана до гамільтоніана задачі (наприклад, Ізінга для задачі максимального розрізу графа), залишаючись в основному стані згідно з адіабатичною теоремою. Якщо процес досить повільний, на виході отримується розв'язок оптимізаційної задачі. Квантовий відпал реалізований в апаратних платформах (таких як D-Wave) вже застосовувався до графових задач: задача Max-Cut легко кодується у вигляді Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO), що еквівалентно гамільтоніану Ізінга [6]. Практичні експерименти з квантовими відпалювачами на невеликих графах показали коректність знаходження максимального розрізу, хоча масштабування на великі задачі обмежене кількістю кубітів та шумами в апаратурі. Огляд стану адіабатичних алгоритмів наведено в роботі Таміма Альбаша та Данієля А. Лідара (2018) [7], де обговорено перспективи та виклики квантового відпалу для NP-складних задач.

У дослідженні Єрнея Руді Фінжгара та співавторів запропоновано сімейство квантово-інформованих рекурсивних алгоритмів оптимізації (QIRO) для комбінаторних задач оптимізації [8]. Ці алгоритми використовують квантові ресурси для отримання інформації, яка застосовується в специфічних для задачі класичних редукційних кроках, що рекурсивно спрощують задачу. Цей підхід дозволяє подолати обмеження квантових

компонентів і забезпечує досяжність рішень у задачах з обмеженнями. Зокрема, автори демонструють ефективність QIRO на прикладі задачі Max-Cut, використовуючи кореляції з класичних симуляцій неглибоких схем QAOA для вирішення задач з сотнями змінних. Це свідчить про потенціал QIRO як шаблону для розробки ширшого класу гібридних квантово-класичних алгоритмів для комбінаторної оптимізації.

У дослідженні Аньелла Еспозіти та Тамуза Данцига представлено метод QAOA-in-QAOA (QAOA²), який використовує евристику «розділяй і володарюй» для вирішення задачі Max-Cut великого масштабу [9]. Цей підхід передбачає розбиття великої задачі на підзадачі, які можуть бути вирішені паралельно, що дозволяє масштабувати рішення задачі Max-Cut. Реалізація QAOA² базується на платформі Classiq і виконується на суперкомп'ютері HPE-Cray EX з використанням MPI та SLURM. Результати великих симуляцій до 33 кубітів демонструють переваги QAOA в певних випадках та ефективність реалізації, а також придатність робочого процесу для підготовки до реальних квантових пристроїв.

Ще один напрям – квантові стохастичні алгоритми на основі квантових випадкових блукань та стохастичних схем. Наприклад, розглядалися алгоритми пошуку на графах з використанням квантових прогулянок і квантового підсилення амплітуди. Такі підходи застосовувалися до задачі найкоротшого шляху в графі [10] та інших комбінаційних задач, однак їхнє впровадження для задачі максимального розрізу графа поки обмежене дослідженнями на рівні теорії. Зокрема, квантові прогулянки можуть прискорювати деякі пошукові завдання на графах, але для задачі Max-Cut прямих квантових переваг поки не досягнуто. Таким чином, нині домінують два квантові підходи: варіаційний (QAOA) та адіабатичний (квантовий відпал), кожен з яких має свої переваги та обмеження.

Формулювання мети дослідження. Мета дослідження полягає у розробці та експериментальній перевірці ефективності нового квантово-гібридного амплітудно-стохастичного алгоритму (QASPA) для розв'язання задачі максимального розрізу графа, порівнянні отриманих результатів з класичними методами та відомим квантовим алгоритмом QAOA, а також обґрунтуванні переваг та обмежень запропонованого підходу.

Викладення основного матеріалу дослідження. Запропоновано квантово-гібридний алгоритм, що використовує квантові фазові зсуви та квантове заплутування для вирішення задачі максимального розрізу графа. Алгоритм ґрунтується на можливостях квантових комп'ютерів ефективно оперувати великими просторами рішень завдяки використанню суперпозиції та фазових зсувів. На рис. 2 зображені кроки роботи алгоритму.

Крок 1. На початковому етапі вхідний граф представлений у вигляді матриці суміжності, що відображає ваги ребер між вершинами. Такий спосіб представлення дозволяє зручно виконувати квантові операції, безпосередньо враховуючи структуру та характеристики початкової задачі.

Крок 2. Наступним важливим кроком є побудова графа кутів. На цьому етапі ваги ребер графа нормалізуються до фазових кутів, які будуть використовуватися в подальших квантових операціях. Цей процес забезпечує єдину шкалу для застосування фазових операцій, що спрощує реалізацію алгоритму та покращує його продуктивність.

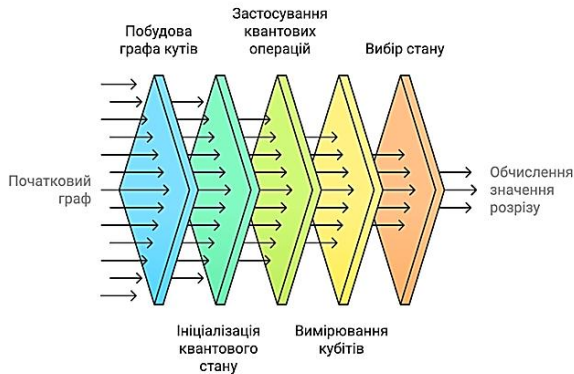


Рис. 2. Кроки алгоритму QASPA

Крок 3. Після побудови матриці кутів проводиться підготовка квантової схеми, яка є центральною складовою квантового підходу. Початковий стан системи ініціалізується за допомогою гейтів Адамара, що переводить кубіти у стан суперпозиції. Така ініціалізація дозволяє одночасно досліджувати велику кількість потенційних рішень, значно збільшуючи швидкість і точність пошуку оптимального розв'язку порівняно з класичними методами.

Крок 4. Для кожної пари вершин, що з'єднані ребром, у схемі застосовується серія квантових операцій: контрольований венти́ль NOT (CNOT), гейт обертання навколо осі Y (RY) з відповідним фазовим кутом з графа кутів, а потім ще один CNOT. Це дає можливість враховувати фазові зсуви, що залежать від взаємодії кубітів, і таким чином ефективно розмежовувати множини вершин, які належать до різних частин розрізу.

Крок 5. Завершальним етапом алгоритму є вимірювання стану системи в обчислювальному базисі. Це вимірювання дозволяє отримати статистичний розподіл результатів, що відповідає ймовірності різних рішень задачі. З отриманих результатів обирається стан з найбільшою ймовірністю, що ідентифікується як оптимальний або близький до оптимального розв'язок задачі Max-Cut. Далі проводиться розрахунок значення розрізу за цим станом, що дозволяє об'єктивно оцінити якість знайденого рішення.

Як приклад використання та реалізації алгоритму шляхом програмування було взято граф з п'ятьма вершинами, оголошення змінної для якого зображено на рис. 3 мовою програмування Python (крок 1).

```
G = nx.Graph()
G.add_edges_from([(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0),
                  (0, 4), (1, 4), (2, 4), (3, 4)])
```

Рис. 3. Оголошення змінної графа для з п'ятьма вершинами

Для реалізації алгоритму було обрано один із найпопулярніших фреймворків для квантового програму-

вання Qiskit від провідного розробника квантових технологій IBM [11]. Створено функцію `qaspa_maxcut` на мові програмування Python (рис. 4), першим кроком у функції та другим у загальному алгоритмі є побудова матриці кутів, для задачі максимального розрізу з ребрами без ваг, тобто вага всіх ребер графа дорівнює 1, було обрано кут фазового зсуву у 45° , цей кут може варіаційно змінюватись та розраховуватись на базі ваги ребра у графах з різними вагами ребер для задачі максимального розрізу.

```
graph = nx.to_numpy_array(G, dtype=int)
num_nodes = len(graph)
angle_graph = build_angle_graph(graph)
qc = QuantumCircuit(num_nodes, num_nodes)
```

Рис. 4. Формування матриці кутів, ініціалізація квантової схеми

Алгоритм QASPA встановлює лінійну залежність між кількістю вершин графа та кількістю квантових бітів для реалізації квантової схеми. Шляхом накладання гейта Адамара на кожен кубіт схеми, що можна побачити на рис. 5, використовується основна перевага квантового комп'ютера над класичним – суперпозиція. За допомогою властивості суперпозиції квантові технології дозволяють перевірити всі можливі комбінації розрізу графа.

```
for i in range(num_nodes):
    qc.h(i)
```

Рис. 5. Ініціалізація суперпозиції для всіх кубітів схеми

Через проходження графа та накладання парних CNOT гейтів реалізується зв'язок вершин графа, що дозволяє побудувати квантову схему для задоволення задачі максимального розрізу (рис. 6). Особливу роль відіграє проміжний гейт RY, який дозволяє підсилити амплітуду коливання та, у свою чергу, підсилити ймовірності, заплутати квантові біти таким чином, що в результаті вимірювання квантовий комп'ютер поверне максимально наближений розв'язок задачі Max-Cut.

```
for i in range(num_nodes):
    for j in range(i, num_nodes):
        if graph[i][j] > 0:
            angle = angle_graph[i][j]
            qc.cx(i, j)
            qc.ry(angle, j)
            qc.cx(i, j)
```

Рис. 6. Крок 4 алгоритму QASPA

Для передачі інформації з квантових бітів у класичні (вимірювання) було використано функцію `measure` фреймворка Qiskit, що дозволяє отримати масив ймовірностей результату кодування квантових бітів, після чого, проведено запуск на симуляторі квантових обчислень (рис. 7).

```
qc.measure(range(num_nodes), range(num_nodes))

simulator = AerSimulator()
compiled = transpile(qc, simulator)
result = simulator.run(compiled, shots=1024).result()
counts = result.get_counts()
```

Рис. 7. Вимірювання та запуск квантової частини алгоритму

Варто зазначити, що кількість квантових запусків схеми вказана як стає значення але може бути змінена для квантових схем з числом кубітів (вершин графа) більшим ніж 19 для підвищення точності алгоритму. В кінцевому результаті квантову схему для наявного графа можна побачити на рис. 8.

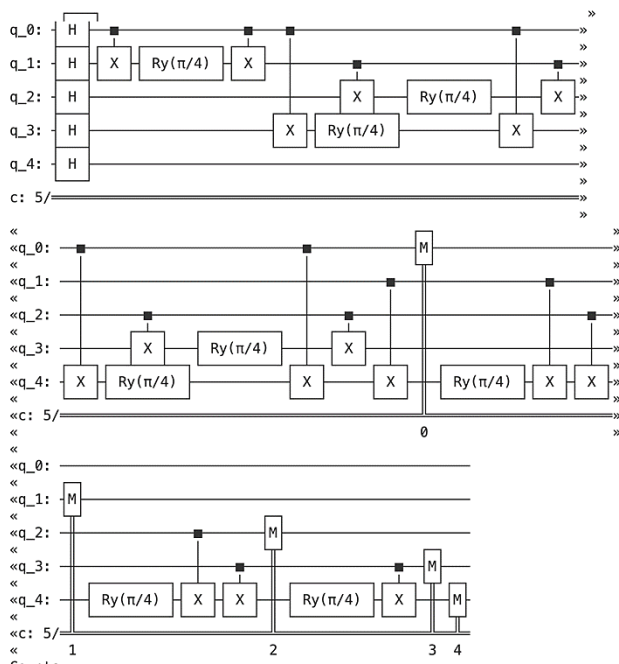


Рис. 8. Квантова схема зв'язку

Під час 1024-кратного запуску симуляції квантової схеми було отримано розподіл результатів вимірювання (рис. 9), у якому чітко виділилися чотири бітові рядки з найбільшими частотами: 10101, 00101, 11110 та 01010. Рядки 10101 (205 спостережень, 20,0 %) і 01010 (155 спостережень, 15,1 %) взаємно доповнюють один одного: кожен біт одного дорівнює оберненому біту другого, а тому обидва описують один і той самий розріз із переставленими частинами. Аналогічну комплементарну пару утворюють 00101 (179 спостережень, 17,5 %) і 11110 (178 спостережень, 17,4 %). Оскільки у задачі максимального розрізу перестановка підмножин вершин не змінює сумарної ваги ребер, зазначені чотири рядки є еквівалентними оптимальними розв'язками.

```
Counts:
{'10101': 205, '00101': 179, '11110': 178, '01010': 155, '01110': 39, '10100': 36, '10001': 35, '01011': 33, '11001': 25, '01100': 23, '10110': 20, '11100': 18, '00011': 17, '00110': 14, '10011': 14, '11000': 11, '01001': 11, '00111': 11}
Best solution: 10101
Best solution count: 205
Best cut value: 6
```

Рис. 9. Результат виконання квантової схеми

Разом обидві комплементарні пари акумулюють 717 вимірювань, що становить 70,0 % усієї вибірки, тоді як кожен з решти 28 рядків отримав не більш як 3,9 % (найближчий конкурент 01101 зафіксовано 39 разів). Таким чином, амплітудна «вага» оптимального розрізу більш ніж удвічі перевищує внесок будь-якої окремої субоптимальної конфігурації, що свідчить про цілеспрямоване підсилення саме глобального максимуму цільової функції.

Розрахунок ваги розрізу за матрицею суміжності графа показує, що для всіх чотирьох домінантних рядків значення цільової функції дорівнює 6, що точно збігається з оптимумом, знайденим класичним повним перебором. Отже, без жодної ітеративної оптимізації параметрів квантова схема змогла: коректно закодувати ваги ребер у фазі кубітів; сформувати суперпозицію, у якій 70 % сумарної ймовірності сконцентровано на двох еквівалентних парах оптимальних станів; приглушити амплітуди решти 28 конфігурацій, відвівши їм лише 30 % ймовірності.

Такий розподіл (рис. 10, нульові ймовірності не показані на гістограмі) підтверджує ефективність фіксованого фазового кодування: алгоритм «відчув» симетрію задачі, однаково підсилив усі комплементарні оптимальні стани й уникнув зміщення амплітуди у бік субоптимальних розрізів. Отримані дані демонструють здатність методу масштабовано виділяти глобальний максимум цільової функції при помірній квантовій глибині.

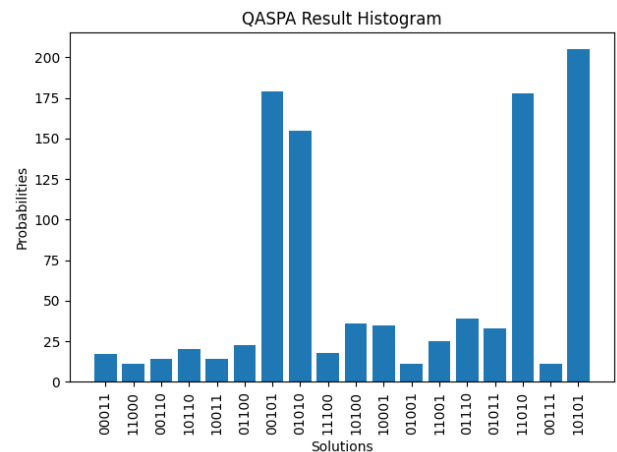


Рис. 10. Гістограма розподілу ймовірностей

Результати роботи, а саме найкращий результат було декодовано та прораховано (рис. 11) максимальний розріз, де 1 та 0 відносять вершини графу у різні множини, що і реалізує останній п'ятий крок алгоритму. Варто зауважити, що результат вимірювання для фреймворку Qiskit являється оберненим, тому доводиться інвертувати порядок бітового рядка.

```
best_solution = max(counts, key=counts.get)[::-1]
best_cut = compute_cut_value(best_solution, graph)
```

Рис. 11. Декодування та обробка квантових результатів вимірювання

Для перевірки правильності результатів виконання алгоритму було написано в ручному режимі 17 тестів з графами різної складності, де результати роботи алгоритму QASPA порівнювались з повним перебором класичним комп'ютером та виконанням QAOA у фреймворку Qrisp [12]. Для наданих тестів QASPA давав більш точні результати ніж Qrisp QAOA з трьома рівнями оптимізації.

Для перевірки швидкості роботи алгоритму було проведено тестування з вищевказаними варіаціями

розв'язку задачі Max-Cut на автоматично генерованих графах з кількістю вершин від 10 до 19 (рис. 12), де QASPA показав абсолютну точність та практично лінійний час виконання (рис. 13).

```
def cycleTest(index):
    G = nx.complete_graph(index)

    qaspa_maxcut_start_time = time.time()
    (best_cut, best_solution) = qaspa_maxcut(G, debug=False)
    qaspa_maxcut_time = time.time() - qaspa_maxcut_start_time
    print("----qaspa_maxcut %s seconds ----" % qaspa_maxcut_time)

    qaoa_qrisp_start_time = time.time()
    (qaoa_best_cut, best_solution) = qaoa_qrisp(G, debug=False)
    qaoa_qrisp_time = time.time() - qaoa_qrisp_start_time
    print("----qaoa_qrisp %s seconds ----" % qaoa_qrisp_time)

    brute_force_start_time = time.time()
    (brute_force_best_cut, best_solution) = brute_force(G)
    brute_force_time = time.time() - brute_force_start_time
    print("----brute_force %s seconds ----" % brute_force_time)

    assertEquals('Test ' + str(index), best_cut, brute_force_best_cut)

    return index, qaspa_maxcut_time, qaoa_qrisp_time, brute_force_time
```

Рис. 12. Тестування швидкості виконання

Таким чином, проведені дослідження підтверджують, що запропонований квантовий підхід має потенціал суттєво покращити ефективність та якість розв'язків складних комбінаторних задач, таких як Max-Cut, порівняно з існуючими класичними та квантовими алгоритмами. Це відкриває перспективи для подальших досліджень і розробок у сфері квантових обчислень.

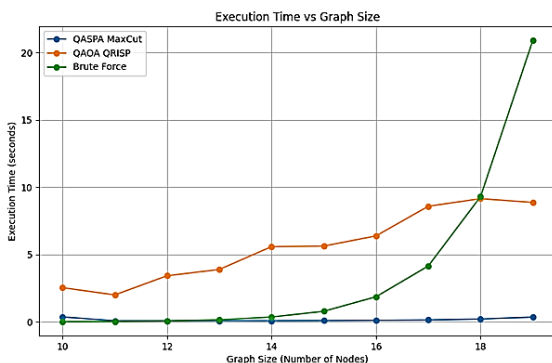


Рис. 13. Результат замірів швидкості виконання до кількості вершин графа

Висновки. Задача максимального розрізу графа, що полягає у знаходженні такого поділу множини вершин на дві підмножини, аби сумарна вага ребер між ними була максимальною, належить до класу NP-складних комбінаторних проблем і традиційно використовується як тест для оцінювання можливостей нових обчислювальних парадигм. Класичні методи, зокрема алгоритм Мішеля Гоеманса та Девіда Вільямсона, гарантують наближення на рівні 0,878 від оптимального, однак зі збільшенням розміру графа стикаються з істотними обмеженнями як за часом виконання, так і за точністю. Поточний етап розвитку квантових технологій, представлений пристроями з обмеженою кількістю кубітів і підвищеним рівнем шуму, стимулює пошук алгоритмів, здатних демонструвати квантову

перевагу як без глибоких кіл так і оптимізації з багатьма параметрами.

Запропонований у цій роботі квантово-гібридний амплітудно-стохастичний алгоритм (QASPA), орієнтований саме на таке обмежене середовище. Його відмінною рисою є пряме кодування ваг ребер у фіксовані фазові зсуви однокубітних поворотів, що суттєво скорочує кількість змінних і знижує глибину ланцюга. Ініціалізація рівномірної суперпозиції всіх бітових розбиттів здійснюється гейтами Адамара, а подальше дворазове застосування контрольованого NOT із поворотом навколо осі Y інтегрує інформацію про ваги у фазу квантового стану. Завдяки такій конструкції амплітуди конфігурацій, яким відповідають більші розрізи, зростають без необхідності класичної оптимізації.

Результати числового експерименту, що охопив тисячу двадцять чотири вимірювання, засвідчили зосередження сімдесяти відсотків сумарної ймовірності на двох комплементарних парах бітових рядків 10101-01010 та 00101-11110. Кожен із цих рядків задає той самий оптимальний розріз із вагою шість, причому найчастіший стан 10101 було зафіксовано двісті п'ять разів. Така концентрація ймовірностей вказує на ефективне амплітудне підсилення глобального максимуму й пригнічення субоптимальних конфігурацій: жоден з решти двадцяти восьми рядків не перевищив чотирьох відсотків частки у вибірці. Отриманий ефект досягнуто без циклів варіаційного налаштування, що виразно демонструє перевагу підходу за швидкістю порівняно з алгоритмом QAOA, який потребує пошуку оптимальних параметрів.

Таким чином, запропонований алгоритм підтверджує свою спроможність забезпечувати коректне наближене розв'язання задачі максимального розрізу в умовах обмеженого квантового ресурсу, поєднуючи високу стабільність результатів із помірними апаратними вимогами. Подальший розвиток дослідження передбачає адаптацію фазового кодування до графів зі змінними вагами, розширення набору кутів для підвищення контрасту амплітуд, а також випробування схеми на реальних процесорах IBM Quantum чи Rigetti Computing. Окрему увагу доцільно приділити порівнянню з варіантами QAOA, що використовують warm-start техніки [13] для ініціалізації параметрів на основі класичних евристик.

Список використаної літератури

1. Lucas A. Ising formulations of many NP problems. *Frontiers in Physics* 2, 5. 2014. DOI: 10.3389/fphy.2014.00005.
2. Goemans M. X., Williamson D. P. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. *Journal of the ACM*, volume 42, issue 6. 1995. pp. 1115–1145. DOI: 10.1145/227683.227684.
3. Farhi E., Goldstone J., Gutmann S. A. Quantum Approximate Optimization Algorithm. 2014. arXiv preprint. DOI: 10.48550/arXiv.1411.4028.
4. Sapozhnyk D. Quantum Approximate Optimization Algorithm for the Max-Cut Problem: JavaScript Programming Language Implementation. *Proceedings of International Conference on Applied Innovation in IT*, volume 12, issue 2. 2024. pp. 27–34. DOI: 10.25673/118110.

5. Harrigan M. P., Sung K. J., Neeley M., та ін. Quantum Approximate Optimization of Non-Planar Graph Problems on a Planar Superconducting Processor. *Nature Physics* 17. 2021. pp. 332–336. DOI: 10.1038/s41567-020-01105-y.
6. Farhi E., Goldstone J., Gutmann S., та ін. A Quantum Adiabatic Evolution Algorithm Applied to Random Instances of an NP-Complete Problem. *Science*, vol 292, issue 5516. 2001. pp. 472–475. DOI: 10.1126/science.1057726.
7. Albash T., Lidar D. A. Lidar. Adiabatic Quantum Computing. *Rev. Mod. Phys.* 90, 015002. 2018. DOI: 10.1103/RevModPhys.90.015002.
8. Finžgar J. R., Kerschbaumer A., Schuetz M. J. A., та ін. Quantum-Informed Recursive Optimization Algorithms. 2023. *PRX Quantum* 5, 020327. DOI: 10.48550/arXiv.2308.13607.
9. Esposito A., Danzig T. Hybrid Classical-Quantum Simulation of MaxCut using QAOA-in-QAOA. 2024 IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium Workshops (IPDPSW), San Francisco, CA, USA. 2024. pp. 1088–1094. DOI: 10.1109/IPDPSW63119.2024.00180.
10. Sahil M., Jain S. Quantum pathfinders: navigate the shortest route. *International Journal of Engineering Applied Sciences and Technology*, vol. 7, issue 12. 2022. pp. 116–121. DOI: 10.33564/IJEAST.2023.v07i12.020.
11. IBM Quantum Documentation. URL: <https://quantum.cloud.ibm.com/docs/en/guides> (дата звернення: 18.04.2025).
12. Max-Cut QAOA Implementation. URL: <https://qrisp.eu/general/tutorial/Quantum%20Alternating%20Operator%20Ansatz/index.html> (дата звернення: 18.04.2025).
13. Egger D. J., Marecek J., Woerner S. Warm-starting quantum optimization. *Quantum* 5, 479. 2021. DOI: 10.22331/q-2021-06-17-479.
3. Farhi E., Goldstone J., Gutmann S. A quantum approximate optimization algorithm. *arXiv preprint*. 2014. DOI: 10.48550/arXiv.1411.4028.
4. Sapozhnyk D. Quantum approximate optimization algorithm for the Max-Cut problem: JavaScript programming language implementation. *Proceedings of International Conference on Applied Innovation in IT*. 2024, vol. 12, no. 2, pp. 27–34. DOI: 10.25673/118110.
5. Harrigan M. P., Sung K. J., Neeley M., et al. Quantum approximate optimization of non-planar graph problems on a planar superconducting processor. *Nature Physics*. 2021, vol. 17, pp. 332–336. DOI: 10.1038/s41567-020-01105-y.
6. Farhi E., Goldstone J., Gutmann S., et al. A quantum adiabatic evolution algorithm applied to random instances of an NP-complete problem. *Science*. 2001, vol. 292, no. 5516, pp. 472–475. DOI: 10.1126/science.1057726.
7. Albash T., Lidar D. A. Adiabatic quantum computing. *Reviews of Modern Physics*. 2018, vol. 90, article 015002. DOI: 10.1103/RevModPhys.90.015002.
8. Finžgar J. R., Kerschbaumer A., Schuetz M. J. A., et al. Quantum-informed recursive optimization algorithms. *PRX Quantum*. 2023, vol. 5, article 020327. DOI: 10.48550/arXiv.2308.13607.
9. Esposito A., Danzig T. Hybrid classical-quantum simulation of MaxCut using QAOA-in-QAOA. *Proceedings of 2024 IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium Workshops (IPDPSW)*, San Francisco, CA, USA. 2024, pp. 1088–1094. DOI: 10.1109/IPDPSW63119.2024.00180.
10. Sahil M., Jain S. Quantum pathfinders: navigate the shortest route. *International Journal of Engineering Applied Sciences and Technology*. 2022, vol. 7, no. 12, pp. 116–121. DOI: 10.33564/IJEAST.2023.v07i12.020.
11. IBM Quantum Documentation. Available at: <https://quantum.cloud.ibm.com/docs/en/guides> (accessed 18.04.2025).
12. Max-Cut QAOA Implementation. Available at: <https://qrisp.eu/general/tutorial/Quantum%20Alternating%20Operator%20Ansatz/index.html> (accessed 18.04.2025).
13. Egger D. J., Marecek J., Woerner S. Warm-starting quantum optimization. *Quantum*. 2021, vol. 5, article 479. DOI: 10.22331/q-2021-06-17-479.

References (transliterated)

1. Lucas A. Ising formulations of many NP problems. *Frontiers in Physics*. 2014, vol. 2, article 5. DOI: 10.3389/fphy.2014.00005.
2. Goemans M. X., Williamson D. P. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. *Journal of the ACM*. 1995, vol. 42, no. 6, pp. 1115–1145. DOI: 10.1145/227683.227684.

12. Max-Cut QAOA Implementation. Available at: <https://qrisp.eu/general/tutorial/Quantum%20Alternating%20Operator%20Ansatz/index.html> (accessed 18.04.2025).
13. Egger D. J., Marecek J., Woerner S. Warm-starting quantum optimization. *Quantum*. 2021, vol. 5, article 479. DOI: 10.22331/q-2021-06-17-479.

Надійшло (received) 05.02.2025

UDC 004.43

D. O. SAPOZHNYK, PhD student at the Department of Software Engineering, State University “Zhytomyr Polytechnic”, Zhytomyr, Ukraine; e-mail: phd121221_sdo@student.ztu.edu.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1357-2422>

SOLVING THE MAX-CUT PROBLEM USING THE QASPA ALGORITHM

A novel quantum algorithm named the Quantum Approximate Shift-Phase Algorithm (QASPA) is proposed for the approximate solution of the Max-Cut problem. The Max-Cut problem consists in partitioning the set of vertices into two subsets in such a way that the total weight of the edges connecting vertices from different subsets is maximized. This problem is known to be NP-complete and represents a combinatorial challenge. Classical solution algorithms require excessive computational time, rendering them inefficient for medium and large graphs. Approximate solution methods offer guaranteed approximation ratios but still face significant limitations in terms of accuracy and performance on larger graphs. The proposed algorithm features a simple scheme and a minimal number of optimized parameters. The input graph is represented by an adjacency matrix, after which the edge weights are linearly normalized to fixed phase angles. The quantum circuit begins by applying a Hadamard transform to each qubit, thereby creating an equal superposition of all possible partitions. Subsequently, for each pair of adjacent vertices, a sequence comprising a controlled NOT gate, a single-qubit rotation around the Y-axis by an angle proportional to the edge weight, and a second controlled NOT gate is applied. This encodes the phase information about the edge weights into the quantum state of the system. After circuit execution, the qubits are measured in the standard computational basis, and the resulting probability distribution allows the selection of the most probable partition as an approximate solution to the problem. Experimental studies conducted on quantum processor simulators have demonstrated that the proposed algorithm achieves accuracy comparable to the Variational Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA) while significantly reducing computation time due to the absence of iterative parameter optimization. Moreover, as the graph size increases, the algorithm's runtime grows considerably slower compared to classical brute-force approaches and QAOA, confirming its potential for solving medium-sized Max-Cut problems.

Keywords: Max-Cut, quantum algorithms, QASPA, superposition, phase shifts, QAOA, quantum programming.

Повні імена авторів / Author's full names

Автор 1 / Author 1: Сапожник Дмитро Олегович / Sapozhnyk Dmytro Olegovich