

Ю. И. ДОРОФЕЕВ, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПИ»

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ПРОИЗВОДНОЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЙ В ЗАКОНЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Рассматривается задача синтеза стабилизирующего управления запасами в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и структурных ограничений на значения состояний и управляющих воздействий. Управление строится в виде линейной нестационарной обратной связи с использованием дискретного аналога производной вектора состояний. Для оценивания множества достижимости замкнутой системы применяется понятие инвариантного эллипсоида. С помощью техники линейных матричных неравенств задача синтеза управления сведена к совокупности задач полуопределенного программирования. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: управление запасами, множество достижимости, инвариантный эллипсоид, линейное матричное неравенство, задача полуопределенного программирования.

Введение. Среди основных направлений современной теории управления выделяется проблема синтеза автоматических систем в условиях неполной информации о параметрах объекта и внешних возмущающих воздействиях. Она является наиболее сложной в теоретическом плане и в то же время часто встречается в практических приложениях.

Такая задача возникает, например, при синтезе стратегии управления запасами в системе производства-хранения-распределения материальных ресурсов. Целью функционирования такой системы является полное и своевременное удовлетворение внешнего спроса при условии минимизации собственных издержек. Издержки связаны с необходимостью создания и хранения запасов материальных ресурсов.

Управление запасами заключается в определении моментов времени и объемов заказов на их восполнение. Из всего многообразия моделей управления запасами можно выделить два основных типа [1]: модель оптимального размера заказа и модель периодической проверки. В первом случае предполагается непрерывный контроль за состоянием запасов и размещение заказов фиксированного размера в моменты времени, определяемые в соответствии с выбранной стратегией. Второй тип модели предполагает проверку уровня запасов через равные промежутки времени и размещение заказа, размер которого определяется в соответствии с выбранной стратегией. Совокупность правил, по которым принимаются подобные решения, называется стратегией управления запасами. В данной работе рассматривается модель периодической проверки.

Для математического описания систем управления запасами применяются динамические сетевые модели, в которых используется представление

© Ю. И. Дорофеев, 2014

системы в виде ориентированного графа, вершины которого определяют виды и объемы управляемых запасов, а дуги представляют управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки описывают процессы переработки и перераспределения ресурсов между узлами сети и процессы поставок сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется внешними потребителями.

Современная теория предлагает алгоритмы оптимального управления как детерминированными, так и стохастическими динамическими сетями. Однако детерминированные модели не учитывают априорную неопределенность, свойственную реальным системам управления запасами. Вероятностные – требуют точного задания вероятностных характеристик неопределенных параметров системы. При этом во многих случаях нет оснований или недостаточно информации, чтобы рассматривать факторы неопределенности как случайные, то есть адекватно описываемые теоретико-вероятностными моделями. Это приводит к необходимости учета неопределенности нестохастической (или, в общем случае, неизвестной) природы.

В работе [2] предложен подход, основанный на концепции «неизвестных, но ограниченных» воздействий. Авторы предполагают, что неизвестный спрос принадлежит заданному множеству, и предлагают моделировать неопределенность спроса в виде интервала, в границах которого спрос произвольным образом принимает свои значения.

В настоящее время существуют различные подходы к решению задачи синтеза систем управления в условиях неопределенности. Один из них основан на применении производной вектора состояний в законе управления [3]. Наиболее существенное развитие в рамках данного подхода получил метод локализации [4], в соответствии с которым управление формируется не только в функции вектора состояний, но и в функции вектора, содержащего производные компонент вектора состояний. Сущность данного метода состоит в организации в системе специального «быстрого» контура, что позволяет формировать желаемые динамические свойства при неполной информации о параметрах объекта и внешних возмущениях.

Целью настоящей работы является разработка на основе принципа локализации нового метода синтеза стабилизирующего управления запасами для класса линейных дискретных систем производства-хранения-распределения ресурсов, которые функционируют в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса.

Постановка задачи. Рассмотрим систему управления запасами, представленную в виде динамической сети, состоящей из n узлов, в дискретном времени. Переменными состояний являются наличные уровни запаса ресурсов в узлах сети. В качестве управляющих воздействий рассматриваются объемы заявок на поставку ресурсов, которые формируются узлами в текущем периоде, а возмущениями являются объемы спроса на ресурсы, которые поступают извне.

Предполагается, что структура сети известна, а состояния доступны непосредственному измерению. Для описания транспортных запаздываний используется модель дискретной задержки. Предполагается, что значения интервалов времени, определяющих длительность транспортировки ресурсов между узлами сети $T_{i,j}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, и переработки ресурсов в узлах T_i , $i = \overline{1, n}$, известны и кратны периоду дискретизации. Тогда математическая модель сети описывается разностным уравнением с запаздыванием:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda} \mathbf{B}_t \mathbf{u}(k-t) + \mathbf{E} \mathbf{d}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояний;

$\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^m$ – вектор управляющих воздействий;

$\mathbf{d}(k) \in \mathbf{R}^q$ – вектор внешних возмущений;

Λ – целочисленная переменная, кратная периоду дискретизации, определяющая максимальное значение запаздывания управляемых потоков между всеми парами связанных узлов сети.

Значения матриц \mathbf{B}_t , \mathbf{E} определяются структурой сети и формируются в соответствии с методикой, изложенной в работе [5]. В процессе функционирования системы должны выполняться следующие ограничения:

$$\mathbf{x}(k) \in X = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : 0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\max}\}, \quad \mathbf{u}(k) \in U = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m : 0 \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^{\max}\}, \quad (2)$$

где \mathbf{x}^{\max} , \mathbf{u}^{\max} – векторы, определяющие максимальные вместимости хранилищ узлов сети и объемы транспортировок, которые считаются заданными.

Относительно внешнего спроса известно лишь то, что он произвольным образом принимает значения из заданного множества:

$$\mathbf{d}(k) \in D = \{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^q : 0 \leq \mathbf{d}^{\min} \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^{\max}\},$$

где \mathbf{d}^{\min} , \mathbf{d}^{\max} – векторы, которые предполагаются известными.

Для системы (1) рассматривается задача синтеза стратегии управления запасами, которая для любого начального состояния $\mathbf{x}(0) \in X$ и внешнего спроса $\mathbf{d}(k) \in D$ обеспечивает полное и своевременное удовлетворение как внешнего, так и внутреннего спроса на ресурсы при условии минимизации критерия качества, определяющего собственные издержки, а также асимптотическую устойчивость замкнутой системы при ограничениях (2).

Синтез стабилизирующего управления. Первым этапом решения задачи синтеза управления является преобразование модели (1) к стандартному

виду без запаздывания на основе расширения вектора состояний $\xi(k) = [\mathbf{x}^T(k), \mathbf{u}^T(k-1), \mathbf{u}^T(k-2), \dots, \mathbf{u}^T(k-\Lambda)]^T$ [6].

Тогда уравнения расширенной модели сети примут вид:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \mathbf{A} \xi(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) + \mathbf{G} \mathbf{d}(k), \\ \mathbf{x}(k) &= \mathbf{C} \xi(k), \end{aligned} \quad (3)$$

где матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{N \times N}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{N \times m}$, $\mathbf{G} \in \mathbf{R}^{N \times q}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times N}$, $N = n + m\Lambda$ имеют соответствующую блочную структуру [5].

Выполним аппроксимацию множества D значений внешнего спроса эллипсоидом наименьшего объема, уравнение которого имеет вид

$$E(\mathbf{d}_c, \mathbf{P}_d) = \{\mathbf{d}(k) \in \mathbf{R}^q : (\mathbf{d}(k) - \mathbf{d}_c)^T \mathbf{P}_d^{-1} (\mathbf{d}(k) - \mathbf{d}_c) \leq 1\}. \quad (4)$$

Параметры эллипсоида $\mathbf{P}_d \in \mathbf{R}^{q \times q}$, $\mathbf{d}_c \in \mathbf{R}^q$ определяются путем решения задачи полуопределенного программирования (ПОП) аналогично [7].

Будем строить закон управления в виде линейной нестационарной обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов, а также сигналу, который представляет дискретный аналог производной вектора состояний. Для этого вычислим первую разность по k вектора состояний расширенной модели и представим ее в следующем виде:

$$\xi(k-1) - \xi(k-2) = (\xi(k-1) - \xi^*) - (\xi(k-2) - \xi^*),$$

где $\xi^* = \underbrace{[\mathbf{x}^{*T}, \dots, \mathbf{x}^{*T}]^T}_{\Lambda+1}$ – составной вектор, в котором элементы вектора \mathbf{x}^*

определяют размеры страховых запасов ресурсов в узлах сети и вычисляются на основании верхних граничных значений спроса с учетом величины запаздывания управляемых потоков и продуктивной модели Леонтьева:

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1} \mathbf{d}^*, \quad \mathbf{d}_i^* = \begin{cases} \Lambda_i \mathbf{d}_i^{\max}, & i = \overline{1, q}, \\ 0, & i = q+1, n, \end{cases} \quad \Lambda_i = \max\{T_{j,i} + T_i, i, j = \overline{1, n}, j \neq i\}, \quad (5)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица соответствующей размерности;

$\mathbf{\Pi} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ – технологическая матрица, значение элемента Π_{ij} которой равно количеству единиц ресурса i , необходимого для производства единицы ресурса j ;

Λ_i – величина запаздывания управляемых потоков узла i .

Закон управления будет иметь вид:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}_0(k)(\xi(k) - \xi^*) + \mathbf{K}_1(k)(\xi(k-1) - \xi^*) - \mathbf{K}_2(k)(\xi(k-2) - \xi^*), \quad (6)$$

где $\mathbf{K}_0(k), \mathbf{K}_1(k), \mathbf{K}_2(k) \in \mathbf{R}^{m \times N}$ – матрицы коэффициентов обратной связи.

Введем блочную матрицу $\mathbf{K}(k) = [\mathbf{K}_0(k) \ \mathbf{K}_1(k) \ -\mathbf{K}_2(k)]$, составной вектор $\mathbf{v}(k) = [(\xi(k) - \xi^*)^\top, (\xi(k-1) - \xi^*)^\top, (\xi(k-2) - \xi^*)^\top]^\top$, и перепишем закон управления (6) в виде:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}(k)\mathbf{v}(k). \quad (7)$$

Введем блочную матрицу $\mathbf{A}_b = [\mathbf{A} \ 0 \ 0]$ и представим расширенную модель замкнутой системы для управления (7) в следующем виде:

$$\xi(k+1) = (\mathbf{A}_b + \mathbf{BK}(k))\mathbf{v}(k) + \mathbf{A}\xi^* + \mathbf{G}(d(k) - d_c) + \mathbf{G}d_c. \quad (8)$$

Выполним аппроксимацию множества X допустимых значений состояний эллипсоидом, у которого вектор координат центра совпадает с вектором \mathbf{x}^* , а матрица \mathbf{P}_x вычисляется на основании вектора \mathbf{x}^{\max} :

$$\mathbf{P}_x = \text{diag}\left(\frac{1}{4}\left(\min\{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_1^{\max} - \mathbf{x}_1^*\}\right)^2, \dots, \frac{1}{4}\left(\min\{\mathbf{x}_n^*, \mathbf{x}_n^{\max} - \mathbf{x}_n^*\}\right)^2\right). \quad (9)$$

Синтез стабилизирующих алгоритмов управления, как правило, основывается на оценивании верхнего граничного значения критерия качества с помощью функции Ляпунова. Запишем критерий качества в случае бесконечного временного горизонта:

$$J_\infty(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left((\xi(k) - \xi^*)^\top \mathbf{W}_\xi (\xi(k) - \xi^*) + \mathbf{u}^\top(k) \mathbf{W}_u \mathbf{u}(k) \right), \quad (10)$$

где $\mathbf{W}_\xi \in \mathbf{R}^{N \times N}$, $\mathbf{W}_u \in \mathbf{R}^{m \times m}$ – положительно определенные диагональные весовые матрицы.

Первое слагаемое в выражении (10) определяет размеры штрафов за отклонение наличных уровней запаса ресурсов от страховых, второе – стоимость производства и транспортировки ресурсов. Тогда задача синтеза управления, которое минимизирует издержки системы, сводится к решению минимаксной задачи:

$$\mathbf{u}(k) = \arg \min_{\mathbf{u}(k) \in U} \left(\max_{d(k) \in E(d_c, P_d)} J_\infty(k) \right). \quad (11)$$

Определим квадратичную функцию Ляпунова, построенную на решениях системы (8):

$$V(\xi(k) - \xi^*) = (\xi(k) - \xi^*)^\top \mathbf{P}(k)(\xi(k) - \xi^*), \quad (12)$$

где $\mathbf{P}(k) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ – симметричная положительно определенная матрица.

Вычислим первую разность по k функции Ляпунова (12) в силу системы (8) и потребуем, чтобы значение функции с течением времени убывало с некоторой гарантированной скоростью:

$$V(\xi(k+1) - \xi^*) - V(\xi(k) - \xi^*) \leq -J_\infty(k). \quad (13)$$

Если (13) выполняется, то следуя [8], можно показать, что функция Ляпунова (12) $\forall k \geq 0$ определяет верхнее граничное значение критерия (10):

$$\max_{d(k) \in E(d_c, P_d)} J_\infty(k) \leq V(\xi(k) - \xi^*). \quad (14)$$

Тогда, в соответствии с (14), задача (11) эквивалентна задаче минимизации функции Ляпунова

$$\mathbf{u}(k) = \arg \min_{\mathbf{u}(k) \in U} V(\xi(k) - \xi^*),$$

которая, в свою очередь, эквивалентна задаче вычисления минимального скалярного значения $\gamma(k) > 0$ такого, что $\forall k \geq 0$ выполняется неравенство:

$$(\xi(k) - \xi^*)^\top \mathbf{P}(k)(\xi(k) - \xi^*) \leq \gamma(k).$$

В соответствии с [8] введем матричную переменную $\mathbf{Q}(k) = \gamma(k)\mathbf{P}^{-1}(k)$ и получим эквивалентную задачу:

$$\gamma(k) \rightarrow \min_{\mathbf{Q}(k)} \quad (15)$$

$$\text{при ограничениях } \gamma(k) > 0, \quad (\xi(k) - \xi^*)^\top \mathbf{Q}^{-1}(k)(\xi(k) - \xi^*) \leq 1,$$

которую можно трактовать как задачу минимизации инвариантного эллипсоида, который аппроксимирует множество достижимости замкнутой системы (8) при действии возмущений $d(k) \in E(d_c, P_d)$. С помощью леммы Шура [9] нестрогое неравенство в (15) представим в виде линейных матричных неравенств (ЛМН) и получим задачу ПОП:

$$\gamma(k) \rightarrow \min_{\mathbf{Q}(k)}$$

$$\text{при ограничениях } \gamma(k) > 0, \quad \mathbf{Q}(k) \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & (\xi(k) - \xi^*)^\top \\ (\xi(k) - \xi^*) & \mathbf{Q}(k) \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Следуя [8], введем матричную переменную $Y(k) = K(k) \cdot \text{block diag}(Q(k), Q(k), Q(k))$.

Используя S-процедуру [9] неравенство (13), гарантирующее убывание с течением времени значения функции Ляпунова (12), и неравенство (4), описывающее эллипсоид, аппроксимирующий множество D значений внешних воздействий, представим в виде ЛМН с помощью методики, изложенной в работе [10]. Также представим в виде ЛМН ограничения на значения состояний и управляющих воздействий (2). Соответствующий результат представлен следующей теоремой.

Теорема. Пусть матрицы $\hat{Q}(k)$, $\hat{Y}(k)$ получены в результате решения следующей оптимизационной задачи

$$\gamma(k) \rightarrow \min_{Q(k), Y(k), \alpha} \quad (16)$$

при ограничениях на матричные переменные $Q(k)$, $Y(k)$ и скалярные параметры α , $\gamma(k)$:

$$\alpha > 0, \quad \gamma(k) > 0, \quad Q(k) \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & (\xi(k) - \xi^*)^T \\ (\xi(k) - \xi^*) & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(Q(k), 0, 0) & 0 & 0 & (A_B Q(k) + B Y(k))^T & 0 & \text{diag}(Q(k) W_\xi^{-\frac{1}{2}}, 0, 0) & Y^T(k) W_u^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & (A - I)^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^T & 0 & 0 & 0 \\ A_B Q(k) + B Y(k) & A - I & G & Q(k) & \gamma(k) G P_d^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(k) P_d^{-\frac{1}{2}} G^T & \gamma(k) \alpha I & 0 & 0 \\ \text{diag}(W_\xi^{-\frac{1}{2}} Q(k), 0, 0) & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k) I & 0 \\ W_u^{-\frac{1}{2}} Y(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k) I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} P_x & \gamma(k) C \\ \gamma(k) C^T & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (19)$$

$$Y(k) v(k) \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} u^{\max} v^+(k) Y^T(k) & Y(k) \\ Y^T(k) & \text{block diag}(Q(k), Q(k), Q(k)) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (20)$$

где « $+$ » – псевдообращение Мура-Пенроуза.

Если задача (16)–(20) имеет решение, то система (3), замкнутая с помощью закона управления (7), для любого начального состояния $x(0) \in X$ и внешнего возмущения $d(k) \in E(d_c, P_d)$ является асимптотически устойчивой, а регулятор с матрицей

$$[K_0(k) \ K_1(k) \ -K_2(k)] = \hat{Y}(k) \cdot \text{block diag}(\hat{Q}^{-1}(k), \hat{Q}^{-1}(k), \hat{Q}^{-1}(k)),$$

доставляет минимум инвариантному эллипсоиду для замкнутой системы (8) с ограничениями (2).

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2 в [10] с очевидными техническими изменениями.

Отметим, что задача (16)–(20) может рассматриваться как совокупность задачи одномерной выпуклой оптимизации по параметру α и задачи ПОП.

Численный пример. В качестве примера рассмотрим модель сети, которая описывается графом $G = (\{1, 2, 3\}, \{(2, 1), (2, 3), (3, 1)\})$ [11]. Представим управляемые потоки u_1 и u_3 в виде гипердуг, а также добавим поток u_2 , который описывает поставки сырья извне (см. рис. 1). Дуги d_1, d_2 , изображенные пунктирными линиями, представляют внешний спрос. Значение времени транспортировки $T_{i,j}$ и количество единиц продукции Π_{ij} , которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле каждого узла в круглых скобках указаны значения времени выполнения заказа T_i .

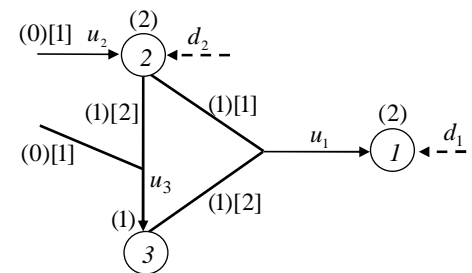


Рис. 1 – Графическое представление модели сети

Специфика рассматриваемой сети в том, что на узел 1 действует только внешний спрос; на узел 2 действует как внешний, так и внутренний спрос со стороны узлов 1 и 3; на узел 3 – только внутренний спрос со стороны узла 1.

Заданы структурные ограничения $x^{\max} = [300, 2000, 500]^T$, $u^{\max} = [80, 1000, 200]^T$, граничные значения внешнего спроса $d^{\min} = [20, 50]^T$, $d^{\max} = [60, 100]^T$ и начальные условия $x(0) = [280, 1100, 400]^T$.

После вычисления величины запаздывания материальных потоков всех узлов сети находим максимальное значение $\Lambda = 3$. По формуле (5) вычисляем уровни страховых запасов узлов сети $x^* = [180, 1100, 360]^T$. В результате

решения соответствующей задачи ПОП [7] определяем параметры эллипсоида (4), аппроксимирующего множество D значений внешнего спроса, $d_c = [40, 75]^T$ и $P_d = \text{diag}(800, 1250)$, по формуле (9) вычисляем матрицу эллипсоида, аппроксимирующего множество X допустимых значений состояний, $P_x = \text{diag}(3600, 202500, 14400)$

Диагональные элементы весовых матриц W_ξ и W_u выбраны равными 1.0×10^{-8} и 5.0×10^{-7} , соответственно. Численное решение задачи (16)–(20) получено с помощью свободно распространяемого пакета CVX [12].

Моделирование осуществлялось в течение 15 периодов. Результаты моделирования для узла 1 при $\alpha = 3.0$ и скачкообразно изменяющемся внешнем спросе представлены на рис. 2.

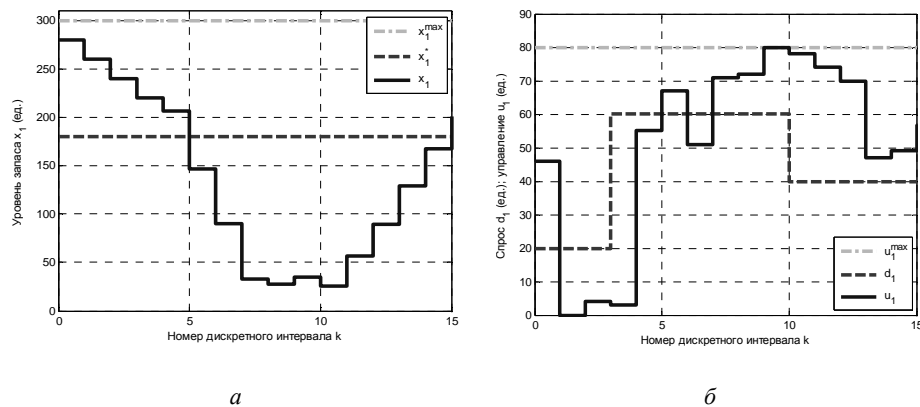


Рис. 2 – Графики переходных процессов для узла 1 системы управления запасами:
 а – значения наличного и страхового уровней запасов;
 б – значения внешнего спроса и управляющих воздействий

Выводы. Предложен подход к решению задачи синтеза стабилизирующего управления запасами в динамических сетях со структурными ограничениями в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса. Закон управления строится в виде линейной нестационарной обратной связи с использованием дискретного аналога производной вектора состояний, что позволяет формировать желаемые динамические свойства замкнутой системы при неполной информации о внешних возмущениях. Для оценивания множества достижимости замкнутой системы применяется понятие инвариантного эллипсоида. С помощью техники линейных матричных неравенств численное решение задачи синтеза сведено к совокупности задач полуопределенного программирования, и опирается на свободно распространяемые программные реализации методов решения задач выпуклой оптимизации.

Список литературы: 1. Лотоцкий В. А. Модели и методы управления запасами / В. А. Лотоцкий, А. С. Мандель. – М.: Наука, 1991. – 189 с. 2. Bertsekas D. P. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty / D. P. Bertsekas, I. Rhodes // IEEE Trans. Automat. Control. – 1971. – Vol. 16. – P. 117–128. 3. Востриков А. С. Системы с производной вектора состояния в управлении / А. С. Востриков, В. И. Уткин, Г. А. Французова // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 3. – С. 22–25. 4. Востриков А. С. Принцип локализации в задаче синтеза систем автоматического управления / А. С. Востриков // Изв. вузов. Сер.: Приборостроение. – 1988. – № 2. – С. 42–49. 5. Дорофеев Ю. И. Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 1. – С. 16–27. 6. Blanchini F. Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays / F. Blanchini, R. Pesenti, F. Rinaldi, W. Ukovich // IEEE Trans. on robotics and automation. – 2000. – Vol. 16. – No. 3. – P. 313–317. 7. Дорофеев Ю. И. Синтез системы оптимального управления запасами с дискретным ПИД-регулятором с использованием техники линейных матричных неравенств / Ю. И. Дорофеев // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2014. – Вип. 4(41). – С. 34–41. 8. Boyd S. Linear matrix inequalities in system and control theory / S. Boyd, E. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 187 p. 9. Баландин Д. В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д. В. Баландин, М. М. Коган. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с. 10. Дорофеев Ю. И. Робастное стабилизирующее управление запасами в сетях поставок в условиях неопределенности внешнего спроса и интервалов задержки пополнения запасов / Ю. И. Дорофеев, Л. М. Любчик, А. А. Никульченко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2014. – № 5. – С. 146–160. 11. Blanchini F. Least inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown inputs / F. Blanchini, F. Rinaldi, W. Ukovich // IEEE Trans. on robotics and automation. – 1997. – Vol. 13. – P. 633–645. 12. Grant M. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 1.21 / M. Grant, S. Boyd // Режим доступа: <http://cvxr.com/cvx>.

Bibliography (transliterated): 1. Lototskij, V. A., and A. S. Mandel'. *Modeli i metody upravlenija zapasami*. Moscow: Nauka, 1991. Print. 2. Bertsekas, D. P., and I. Rhodes. "Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty." *IEEE Trans. Automat. Control*. Vol. 16. 1971. 117–128. Print. 3. Vostrikov, A. S., V. I. Utkin, and G. A. Francuzova. "Sistemi s proizvodnoj vektora sostojanija v upravlenii." *Avtomatika i telemehanika*. No. 3. 1982. 22–25. Print. 4. Vostrikov, A. S. "Princip lokalizacii v zadache sinteza sistem avtomaticheskogo upravlenija." *Izv. vuzov. Ser.: Priborostroenie*. No. 2. 1988. 42–49. Print. 5. Dorofiev, Yu. I., and A. A. Nikulchenko. "Postroenie matematicheskikh modelej upravliaemih setej postavok s uchetom zapazdivanij potokov." *Sistemni doslidzhennia ta informacijni tehnologii*. No. 1. 2013. 16–27. Print. 6. Blanchini, F., et al. "Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays." *IEEE Trans. on robotics and automation*. Vol. 16. No. 3. 2000. 313–317. Print. 7. Dorofiev, Yu. I. "Sintez sistemy optimal'nogo upravlenija zapasami s diskretnim PID-regulatorom s ispol'zovaniem tehniki linejnih matrichnih neravenstv." *Zbirnik naukovih prac' Kharkivs'kogo universitetu Povitrianih Sil*. Vip. 4(41). 2014. 34–41. Print. 8. Boyd, S., et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia: SIAM, 1994. Print. 9. Balandin, D. V., and M. M. Kogan. *Sintez zakonov upravlenija na osnovе linejnih matrichnih neravenstv*. Moscow: Fizmatlit, 2007. Print. 10. Dorofiev, Yu. I., L. M. Lyubchik and A. A. Nikulchenko. "Robustnoe stabilizirujushee upravlenie zapasami v setiah postavok v uslovijah neopredelennosti vneshnego sprosа i intervalov zaderzhki popolnenija zapasov." *Izv. RAN. Teorija i sistemi upravlenija*. No. 5. 2014. 146–160. Print. 11. Blanchini, F., F. Rinaldi and W. Ukovich. "Least inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown inputs." *IEEE Trans. on robotics and automation*. Vol. 13. 1997. 633–645. Print. 12. Grant, M., and S. Boyd. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 1.21 <<http://cvxr.com/cvx>>.

Поступила (received) 05.12.2014