

**О. Б. МОКІН**, канд. техн. наук, доц. ВНТУ, м. Вінниця

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО РУХУ ЗАВАНТАЖЕНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ НА ПІДЙОМАХ І СПУСКАХ**

В статті побудовано математичні моделі оптимального руху завантаженого електричного транспортного засобу на підйомах і спусках за критерієм мінімуму витрат електроенергії в умовах обмеження на час.

В статье построены математические модели оптимального движения загруженного электрического транспортного средства на подъемах и спусках по критерию минимума затрат электроэнергии в условиях ограничения на время.

In this paper had been created a mathematical model of optimal movement of the loaded electric vehicle on the climbs and descents on the criterion of minimum electricity consumption within the constraints of time.

**Постановка задачі і вихідні передумови.** В роботі [1] показано, що для розв'язання задачі оптимізації руху електричного транспортного засобу колією, прокладеною на місцевості зі складним рельєфом, необхідно спочатку колію розбити на відрізки горизонтального прямолінійного руху, руху на спусках і підйомах та руху на закругленнях колії, а потім розв'язувати задачу оптимізації руху на кожному відрізку окремо, з'єднуючи ці розв'язки між собою граничними умовами.

Виходячи з математичних моделей, запропонованих в роботах [2, 3], в роботі [4] отримані математичні моделі оптимального за критерієм мінімуму витрат електроенергії руху завантаженого електричного транспортного засобу горизонтальним прямолінійним відрізком колії у вигляді моделі відносного струму якоря електродвигунів тягового електропривода електровоза

$$i = \frac{1}{2b_1} \left( \frac{f_1 + 2f_2 v}{e^{(\tau+C_1)(f_1+2f_2 v)} - C_0} - a_1 \right) \quad (1)$$

та моделі відносної лінійної швидкості руху транспортного засобу

$$v(\tau) = \sum_{k=0}^n g_k L_k(\tau), \quad (2)$$

методика визначення поліномів Лагерра  $L_k(\tau)$  та усіх коефіцієнтів в яких наведена в роботі [4], а співвідношення переходу від відносних одиниць до іменованих — в роботі [5].

**Мета роботи.** В даній роботі буде показано, яких змін набудуть математичні моделі (1), (2) в разі оптимізації руху завантаженого електричного транспортного засобу на спуску і підйомі, тобто на відрізках колії відповідно  $AC$  і  $DM$  в позначеннях рис. 1 роботи [1].

**Розв'язання задачі.** Спочатку розглянемо спуск завантаженого електричного транспортного засобу по відрізуку  $AC$ .

Для зручності відтворимо на рис. 1 даної статті рис. 3 роботи [3].

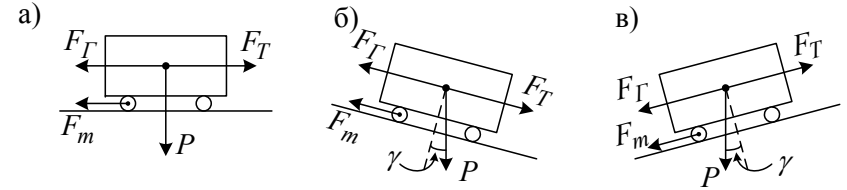


Рис. 1 – Сили, що діють на вагон під час руху:  
а – по горизонтальній площині; б – на спуску; в) на підйомі

Із рис. 1 видно, що при наявності в складі електричного транспортного засобу електровоза та  $(n-1)$  вагонів гальмівна сила  $F_r$  усього транспортного засобу на малих лінійних швидкостях  $V$  після того, як останній його вагон піде на спуск, складатиме

$$F_r = k \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) \cos \gamma - \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) \sin \gamma, \quad (3)$$

де  $P_i$  – вага  $i$ -го вагона,  $\gamma$  – кут нахилу площини спуску до горизонтальної площини, який дорівнює куту між силою ваги та перпендикуляром до площини спуску, а  $k$  – коефіцієнт тертя кочення сталюого колеса по сталій рейці.

Зі зростанням лінійної швидкості електричного транспортного засобу у гальмівній силі, як показано в роботі [3], з'являється складові, пропорційні лінійній швидкості та її квадрату, тобто більш загальна модель гальмівної сили матиме вигляд

$$F_r = k \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) \cos \gamma - \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) \sin \gamma + k^* \left( \sum_{i=1}^n S_{Bi} \right) V + k^{**} S_{Л1} V^2, \quad (4)$$

де  $S_{Bi}$  – площа бічної поверхні  $i$ -го вагона,  $S_{Л1}$  – площа лобової поверхні електровоза,  $k^*$ ,  $k^{**}$  – розмірні коефіцієнти пропорційності відповідно між силою та добуток площі на швидкість і добуток площі на квадрат швидкості.

З урахуванням виразу (4) та результатів, отриманих у роботах [3, 5], математичну модель динаміки руху електричного транспортного засобу на спуску можна записати у вигляді:

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \frac{dV}{dt} = F_{T1} - k \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) \cos \gamma + \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) \sin \gamma - k^* \left( \sum_{i=1}^n S_{Bi} \right) V - k^{**} S_{J1} V^2, \quad (5)$$

або (у відносних одиницях) —

$$\frac{dv}{d\tau} = i\varphi(i) - (f_0 \cos \gamma - f_{00} \sin \gamma) - f_1 v - f_2 v^2, \quad (6)$$

де

$$f_{00} = \frac{\left( \sum_{i=1}^n P_i \right)}{F_T^u}, \quad (7)$$

а усі інші коефіцієнти і змінні мають той самий зміст, що і відповідні коефіцієнти та змінні, наведені в роботі [5].

Порівнюючи рівняння (6) з рівнянням (2) роботи [5], бачимо, що вони відрізняються лише тим, що у рівнянні (6) у правій частині стоїть член  $(f_0 \cos \gamma - f_{00} \sin \gamma)$  замість  $f_0$ , а структура обох рівнянь є однаковою. А це означає, що і структури моделей оптимального струму та оптимальної швидкості теж будуть однаковими, але коефіцієнти  $C_0$ ,  $C_1$  моделі оптимального струму залежатимуть не лише від коефіцієнта  $f_0$ , але і від коефіцієнта  $f_{00}$  та кута  $\gamma$  і знака між складовими з  $f_0$  та  $f_{00}$ , оскільки вони визначатимуться не з системи рівнянь (34), (35) роботи [5], а з аналогічної, але трансформованої системи рівнянь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4b_1} \left( \frac{f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N)}{e^{(\tau_N + C_1) \left( f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N) \right)} - C_0} - a_1 \right)^2 + \\ & + \frac{a_1}{2b_1} \left( \frac{f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N)}{e^{(\tau_N + C_1) \left( f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N) \right)} - C_0} - a_1 \right) - \\ & - (f_0 \cos \gamma - f_{00} \sin \gamma) - f_1 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N) - f_2 \left( \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N) \right)^2 - v'_N = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4b_1} \left( \frac{f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B)}{e^{(\tau_B + C_1) \left( f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B) \right)} - C_0} - a_1 \right)^2 + \\ & + \frac{a_1}{2b_1} \left( \frac{f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B)}{e^{(\tau_B + C_1) \left( f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B) \right)} - C_0} - a_1 \right) - \\ & - (f_0 \cos \gamma - f_{00} \sin \gamma) - f_1 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B) - f_2 \left( \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B) \right)^2 - v'_B = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Тож для визначення оптимального струму тягового електропривода під час руху електричного транспортного засобу на спуску з заданою лінійною швидкістю, яка є функцією граничних умов, необхідно знайти із системи рівнянь (8), (9) значення коефіцієнтів

$$C_0 = C_0(f_{00}, \gamma, -), \quad C_1 = C_1(f_{00}, \gamma, -) \quad (10)$$

підставити у вираз (1).

Дамо фізичну інтерпретацію отриманого результату. Внаслідок нахилу площини спуску на кут  $\gamma$  сила тертя кочення, яка є пропорційною силі ваги і нормальною до площини кочення, зменшується, і одночасно за рахунок тангенціальної складової сили ваги з'являється додаткова сила тяги. Тож для підтримання заданої лінійної швидкості на спуску необхідно зменшувати силу тяги, створювану тяговим електроприводом електровоза, що досягається заміною коефіцієнтів  $C_0$ ,  $C_1$  в моделі струму (1) їх значеннями з множини (10).

Тепер розглянемо рух завантаженого електричного транспортного засобу на підйом по відрізу  $DM$ .

Із рис. 1 видно, що при наявності в складі електричного транспортного засобу електровоза та  $(n-1)$  вагонів гальмівна сила  $F_T$  усього транспортного засобу на малих лінійних швидкостях  $V$  після того, як останній його вагон піде на підйом, складатиме

$$F_T = k \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) \cos \gamma + \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) \sin \gamma. \quad (11)$$

Тож за аналогією з викладеним вище математичну модель динаміки руху електричного транспортного засобу під час руху на підйом можна записати у вигляді

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \frac{dV}{dt} = F_{T1} - k \left(\sum_{i=1}^n P_i\right) \cos \gamma - \left(\sum_{i=1}^n P_i\right) \sin \gamma - k^* \left(\sum_{i=1}^n S_{Bi}\right) V - k^{**} S_{J1} V^2, (12)$$

або (у відносних одиницях) —

$$\frac{dv}{d\tau} = i\varphi(i) - (f_0 \cos \gamma + f_{00} \sin \gamma) - f_1 v - f_2 v^2. (13)$$

А це означає, що і модель оптимального струму тягового електропривода під час руху завантаженого електричного транспортного засобу на підйом буде за структурою такою ж самою, як і під час руху по горизонтальній площині, проте коефіцієнти  $C_0$ ,  $C_1$  моделі оптимального струму, як для спуску, залежатимуть не лише від коефіцієнта  $f_0$ , але і від коефіцієнта  $f_{00}$  та кута  $\gamma$  і знака між складовими з  $f_0$  та  $f_{00}$ , оскільки вони визначатимуться не з системи рівнянь (34), (35) роботи [5], а з аналогічної, але трансформованої системи рівнянь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4b_1} \left( \frac{f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N)}{e^{(\tau_N + C_1) \left( f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N) \right)} - C_0} - a_1 \right) + \\ & + \frac{a_1}{2b_1} \left( \frac{f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N)}{e^{(\tau_N + C_1) \left( f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N) \right)} - C_0} - a_1 \right) - \\ & - (f_0 \cos \gamma + f_{00} \sin \gamma) - f_1 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N) - f_2 \left( \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_N) \right)^2 - v'_N = 0, \end{aligned} (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4b_1} \left( \frac{f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B)}{e^{(\tau_B + C_1) \left( f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B) \right)} - C_0} - a_1 \right) + \\ & + \frac{a_1}{2b_1} \left( \frac{f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B)}{e^{(\tau_B + C_1) \left( f_1 + 2f_2 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B) \right)} - C_0} - a_1 \right) - \\ & - (f_0 \cos \gamma + f_{00} \sin \gamma) - f_1 \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B) - f_2 \left( \sum_{k=0}^4 g_k L_k(\tau_B) \right)^2 - v'_B = 0. \end{aligned} (15)$$

Тож для визначення оптимального струму тягового електропривода під час руху електричного транспортного засобу на підйом з заданою лінійною швидкістю, яка є функцією граничних умов, необхідно знайдені із системи рівнянь (14), (15) значення коефіцієнтів

$$C_0 = C_0(f_{00}, \gamma, +), \quad C_1 = C_1(f_{00}, \gamma, +) (16)$$

підставити у вираз (1).

Дамо фізичну інтерпретацію і цьому результату. Внаслідок нахилу площини підйому на кут  $\gamma$  сила тертя кочення, яка є пропорційною силі ваги і нормальною до площини кочення, під час підйому, як і під час спуску, зменшується, але одночасно за рахунок тангенціальної складової сили ваги з'являється додаткова гальмівна сила. Тож для підтримання заданої лінійної швидкості під час руху на підйом необхідно збільшувати силу тяги, створювану тяговим електроприводом електровоза, що досягається заміною коефіцієнтів  $C_0$ ,  $C_1$  в моделі струму (1) їх значенням з множини (16).

**Висновки.** Досліджено особливості оптимізації руху завантаженого електричного транспортного засобу на спусках і підйомах. Показано, що структура математичної моделі оптимального струму тягового електропривода електровоза під час руху на спусках і підйомах не змінюється у порівнянні зі структурою математичної моделі струму, що забезпечує оптимальний рух завантаженого електричного транспортного засобу відрізком прямолінійної горизонтальної колії, але суттєвої зміни зазнають коефіцієнти цієї структури. Побудовано алгоритм визначення коефіцієнтів математичної моделі оптимального струму електровоза під час руху завантаженого електричного транспортного засобу на спусках і підйомах.

**Список літератури:** 1. Мокін О. Б. Особливості моделювання руху електричних транспортних засобів з врахуванням залежності навантаження від рельєфу місцевості [Електронний ресурс] / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Наукові праці ВНТУ. – 2010. – № 1. – С. 1–6. – Режим доступу до журн.: [http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2010\\_1/2010-1.files/uk/10abmlor\\_ua.pdf](http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2010_1/2010-1.files/uk/10abmlor_ua.pdf). 2. Мокін Б. І. Математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем для задач оптимізації (частина 1) / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2008. – № 6. – С. 55–58. 3. Мокін Б. І. Математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем для задач оптимізації (частина 2) / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2009. – № 1. – С. 28–33. 4. Мокін О. Б. Оптимізація режиму руху завантаженого електричного транспортного засобу на прямолінійному відрізку колії, прокладеній на горизонтальній площині / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Кременчуцького державного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КДПУ, 2010. – № 3/2010 (62), частина 2. – С. 162–165. 5. Мокін О. Б. Відносні моделі руху електричного транспортного засобу по горизонтальному прямолінійному відрізку колії / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2010. – № 2. – С. 20–24.

Надійшла до редколегії 28.04.2011