УДК 621.396

А. Ю. СИДОРЕНКО, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПИ»

ВЫБОР ОСИ СТАЦИОНАРНОСТИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОФИЛОГРАММ ОБРАБОТАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В статті розглянуто метод вибору положення системи координат при дослідженні профілограм поверхонь, що оброблюються. Знайдені оцінки основних параметрів шорсткості: дисперсії та коефіцієнту кореляції. Представлені основні результати оцінювання параметрів шорсткості та положення системи стаціонарності.

В статье рассмотрен метод выбора системы координат при исследовании профилограмм обработанных поверхностей. Найдены оценки основных параметров шероховатости дисперсии и коэффициента корреляции. Представлены основные результаты оценивания параметров шероховатости и положения система стационарности.

In the article the method of choice of position of the system of coordinates is considered at research of of profilogram the treated surfaces. The estimations of basic parameters of roughness of dispersion and coefficient of correlation are found. The basic results of method are presented and drawn conclusion.

Введение. Исследование профилограмм обработанных поверхностей приводит к проблеме выбора положения системы координат и начала отсчета, так как профилограмма представляет собой последовательность точек. При этом с точки зрения физической задачи эта последовательность точек является некоторой реализацией случайного процесса (дискретного или непрерывного). Как следствие этого, возникает задача выбора системы координат удобной для проведения исследования.

Математическая модель оценивания параметров шероховатости. В данной работе в качестве модели, которая описывает профилограммы и соответствует на практике параметрам шероховатости обработанных поверхностей, рассматривается дискретный квадратичный функционал

$$J_h = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} h_n^2 , \tag{1}$$

где $h_n = h(n\Delta)$ – элемент дискретной последовательности отсчетов (*мкм*);
n – номер элемента выборки ($n = 0, 1, \ldots, N-1$);
N – количество элементов в выборке;
L – длина интервала измерений (*мкм*);
Δ – шаг измерений (*мкм*), $\Delta = \dfrac{L}{N-1}$.

Данный функционал имеет нормальное марковское распределение.

Задача оценивания параметров дискретной нормальной случайной последовательности точек и положения системы координат (оси стационарности) рассматривалась для случая независимых наблюдений [1]. Но на практике требование независимости слишком ограничивает исследование профилограмм. Поэтому представляет интерес рассмотрение данной задачи для случая нормального марковского процесса, но с заданным средним $\overline{h}$ и корреляционной функцией

$$K(h_n, h_m) = q_{nm} \cdot \sigma^2 , \tag{2}$$

где q_{nm} – набор корреляционных факторов $q_{nm} = e^{-\nu\Delta|n-m|}$, $n, m = 0, 1, \ldots$,
ν – декремент затухания, *мкм*$^{-1}$,
σ^2 – дисперсия, *мкм*^{2}.

Корреляционная функция такого вида обуславливает марковость рассматриваемого процесса по теореме Дуба [1].

Итак, сформулируем постановку проблемы: известна последовательность точек на плоскости, также известно, что данная последовательность подчиняется нормальному марковскому закону с известным средним и корреляционной функцией. При этом неизвестным является расположение системы координат (СК), а именно ось абсцисс x^*. Требуется по экспериментальным данным оценить параметры расположения системы координат, относительно которой последовательность обладает заданными свойствами.

Для решения данной задачи можно воспользоваться алгоритмом, описанным в [2]. Выбирается и фиксируется произвольная система координат xOy , при этом искомая ось абсцисс x^* должна проходить через её первый квадрант. Пусть (x', y') – координаты начала O' системы относительно xOy , а φ – угол между осями СК xOy и $x'O'h$, следовательно, необходимо оценить еще параметры φ , x' , y' .

Задача решается методом максимального правдоподобия. В рамках этого метода используется функция плотности распределения последовательности

$$L_h = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{N+1}{2}}(1-q^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{h_0^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2\left(1-q^2\right)}\sum_{i=0}^{N-1}\left(h_{i+1} - qh_i\right)^2\right\} . \tag{3}$$

В результате перехода к наблюдаемым СВ (x_i, y_i) по формулам

$$x_i^* = x_i \cos\varphi + y_i \sin\varphi - \left(x' \cos\varphi + y' \sin\varphi\right), \tag{4}$$

$$y_i^* = -x_i \sin\varphi + y_i \cos\varphi - \left(-x' \sin\varphi + y' \cos\varphi\right), \tag{5}$$

а также простых преобразований получена система уравнений

$$(N+1)u(1-Y^2)-(y_0-y')^2(1-Y^2)-\sum_{i=0}^{N-1}\left[k(y_i,y',z,w)\right]^2=0,$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}\left[k(y_i,y',z,w)\right]\left[(1-Y)i+1\right]=0,$$

$$(y_0-y')(1+Y)+\sum_{i=0}^{N-1}\left[k(y_i,y',z,w)\right]=0, \tag{6}$$

$$Y(1+Y)-\frac{Y}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left[k(y_i,y',z,w)\right]^2+\frac{(1+Y)}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left[k(y_i,y',z,w)\right]\left(y_i-y'-\frac{i}{N}\cdot z\right)=0,$$

где $Y=e^{-w/N}$; $k(y_i,y',z,w)=\left[\Delta y+\left[1-Y\right](y_i-y'-iz/N)-z/N\right]$; $r=L\cos\varphi$; $z=L\sin\varphi$; $u=\sigma^2\cos^2\varphi$; $s=\sigma^2\sin^2\varphi$; $w=\nu L$; $\Delta y=y_{i+1}-y_i$; $\Delta x=x_{i+1}-x_i$.

Пользуясь алгоритмом, описанным в [3], можно найти оценки искомых параметров СК. Для этого, введем несколько ограничений:

1) длина наблюдаемого промежутка L должна быть достаточно велика;
2) декремент затухания ν будет не мал, так чтобы для величины νL выполнялось $1/\nu L<<1$;
3) исходная система координат xOy выбрана приблизительно точно, то есть так, что y' и φ невелики.

Принимаем число наблюдений N столь большим, что в разложении $\exp(-w/N)$ в ряд с достаточной степенью точности можно сохранить только члены до порядка $1/N$ [4]. Учитывая это предположение, можно переписать систему уравнений (6) относительно z и y' с коэффициентами, зависящими от w. Далее, перейдем к переменным η_i по формуле

$$y_i=\sqrt{u}\,\eta_i'+y'+iz/N,$$

где величина η_i' распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Учитывая указанные ограничения и допущения, приходим к следующей системе уравнений для определения оценок $\hat{z}$ и $\hat{y}'$ параметров z и y':

$$2z+3y'=6\frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}i\,y_i, \qquad z+2y'=2\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}y_i.$$

Из этой системы получим для оценок $\hat{z}$ и $\hat{y}'$ параметров z и y':

$$\hat{y}'=2\left(2\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}y_i-3\frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}i\,y_i\right),\quad \hat{z}'=6\left(2\frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}i\,y_i-\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}y_i\right). \tag{7}$$

Полученные оценки (7) при больших значениях N асимптотически совпадают с соответствующими оценками для независимого случая [5]. Они являются асимптотически несмещенными и состоятельными. Аналогично можно рассчитать оценки $\hat{x}'$ и $\hat{r}$ для параметров x' и r

$$\hat{x}'=2\left(2/N\sum_{i=0}^{N-1}x_i-3/N^2\sum_{i=0}^{N-1}i\,x_i\right),\quad \hat{r}=6\left(2/N^2\sum_{i=0}^{N-1}i\,x_i-1/N\sum_{i=0}^{N-1}x_i\right). \tag{8}$$

В [1] показано, что угол φ можно оценить по наблюдениям из соотношения $s/u=\mathrm{tg}^2\varphi$.

Далее, чтобы оценить длину промежутка $\hat{L}$, можно воспользоваться введенными обозначениями и полученными оценками $\hat{z}$ и $\hat{r}$. Окончательно получим

$$\hat{L}=\hat{z}\sin\varphi+\hat{r}\cos\varphi. \tag{9}$$

Если $N>>1$, из системы (6) можно теперь найти оценки $\hat{w}$ и $\hat{u}$

$$\hat{w}=-N\ln\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(y_i-\hat{y}'-\frac{i}{N}\hat{z}\right)^2+D}{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(y_i-\hat{y}'-\frac{i}{N}\hat{z}\right)^2-\frac{1}{N+1}(y_0-\hat{y}')^2}, \tag{10}$$

где $D=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\Delta y_i-\frac{1}{N}\hat{z}\right)\left(y_i-\hat{y}'-\frac{i}{N}\hat{z}\right)$;

$$\hat{u}=\frac{1}{N+1}\left[(y_0-\hat{y}')^2+\frac{G}{(1-Y^2)}\right], \tag{11}$$

где $G=\sum_{i=0}^{N-1}\left[\Delta y_i+(1-Y)\left(y_i-\hat{y}'-\frac{i}{N}\hat{z}\right)-\frac{1}{N}\hat{z}\right]^2$.

Следовательно, на основании (10) – (11) можно найти оценки $\hat{\nu}$ и $\hat{\sigma}^2$ параметров ν и σ^2:

$$\hat{\nu}=\hat{w}/\hat{L},\quad \hat{\sigma}^2=\hat{u}/\cos^2\varphi. \tag{12}$$

Основные результаты. Результаты вычислений, проведенные по формулам, сведены в таблице.

Параметры последовательностей и их оценки

Объем выборки N	Параметры последовательностей и их оценки					
	L, *мкм*	$\hat{L}$, *мкм*	σ^2, *мкм*^{2}	$\hat{\sigma}^2$, *мкм*^{2}	ν, *мкм*	$\hat{\nu}$, *мкм*
100	1.000	0.934	1.000	1.043	1.000	1.245
150	5.000	4.556	1.010	1.052	1.500	1.523
200	10.000	9.654	1.100	1.134	1.700	1.699
250	15.000	14.962	1.300	1.385	2.000	2.041
300	20.000	20.021	1.500	1.542	3.000	3.091

Анализируя данную таблицу, можно сделать вывод, что заданные теоретически параметры последовательностей хорошо согласовываются с полученными оценками при различных объемах выборки.

Теперь можно перейти к практическому применению полученных формул. Итак, пусть задана некоторая случайная дискретная последовательность точек, которая является реализацией нормального марковского процесса (рис. 1).

Необходимо построить ось абсцисс для заданной дискретной последовательности точек. Для построения оси абсцисс можно использовать метод наименьших квадратов и ортогональную регрессию по заданным точкам [6].

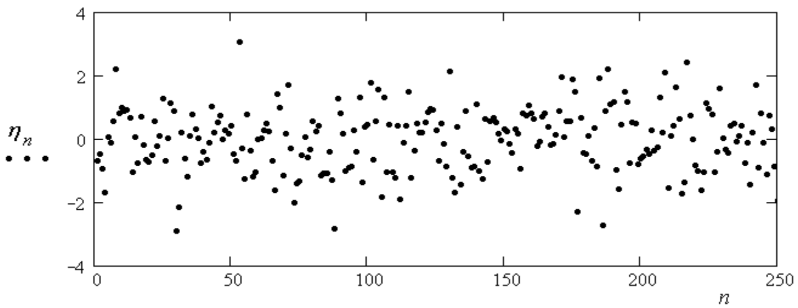

Рисунок 1 – Пример заданной случайной дискретной последовательности ($N = 250$, $\sigma_h = 3$, $\nu = 5$, $\Delta = 1$)

На рис. 2 показан пример построения оси абсцисс по заданной последовательности точек на плоскости.

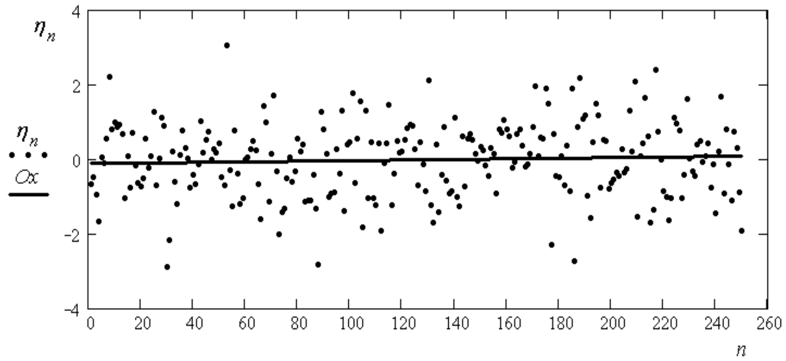

Рисунок 2 – Пример построения оси абсцисс для случайных дискретных последовательностей ($N = 250$, $\sigma_h = 3$, $\nu = 5$, $\Delta = 1$)

Выводы. Таким образом, практические расчеты показывают, что при больших объемах выборки найденные оценки положения осей координат являются достаточными и состоятельными. Следовательно, при выборе положения осей координат можно использовать прямую линейной регрессии, построенную по дискретным точкам методом наименьших квадратов.

Список литературы: **1.** *Хусу А. П.* Об оценивании параметров случайных последовательностей при неизвестной системе координат / *А. П. Хусу* // Вестник Ленинградского Государственного Университета. – 1965. – №1. – С. 27–35. **2.** *Королюк В. С.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике / *В. С. Королюк* – К. : Наукова думка. – 1978. – 584 с. **3.** *Derin H.* Dicsrete-Index Markov Of Tipe Random Processes / *H. Derin*, *A. Kelly //* Proc. IEEE, vol. 77, № 10, pp.1485-1510, 1989. – P. 63–74. **4.** *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / *Г. Корн*, *Т. Корн.* – М. : Наука. – 1987. – 360 с. **5.** *Вентцель Е. С.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / *Е. С. Вентцель*, *Л. А. Овчаров.* – М. : Высшая школа. – 2000. – 383 с. **6.** *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений / *Ю. В. Линник.* – М. : Физматгиз. – 1962. – 143 с.

Надійшла до редколегії 17.05.2011