

Е. Л. ПИРОТТИ, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХПИ»;
А. В. ЧАЙКА, студентка НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Розглянута задача визначення стаціонарних електричних полів у ґрунті. Модель побудована для випадку розташування штырїв у вершинах квадрата. Отримані результати дають можливість прогнозувати зміни, які можуть відбуватися під дією навколишнього електростатичного поля на клітинному рівні.

Рассмотрена задача определения стационарных электрических полей в почве. Модель построена для случая расположения штырей в вершинах квадрата. Полученные результаты дают возможность прогнозировать изменения, которые могут происходить под воздействием внешнего электростатического поля на клеточном уровне.

The problem of determining the stationary electric fields in the soil was studied. The model was constructed for the case of the location of pins in the tops of the square. The results, which have been obtained, give the possibility to predict the changes that can occur under the influence of an external electrostatic field on cellular level.

Введение. Существует достаточно большое число работ отечественных и зарубежных авторов, в которых с теоретической и экспериментальной точек зрения рассматривается взаимодействие высокочастотных электромагнитных полей с биологическими объектами разной природы и с разными геометрическими и электрофизическими свойствами. В результате этого взаимодействия можно получать изменение жизненных процессов, происходящих в тканях этих объектов. Такие изменения могут нести как позитивный, так и негативный характер.

Исследования подобного рода проводились и с семенами сельскохозяйственных культур с целью повышения их урожайности, улучшения биохимических свойств, а также устойчивости по отношению к возможным вредителям. При этом, как правило, подобная обработка семян электромагнитными полями происходила в воздушной среде в свободном пространстве или в направляющих системах.

Однако следует отметить, что стимулирующее или ингибирующее действие на биологические объекты может оказывать и стационарное электрическое поле, в котором находятся данные объекты. В полной мере это относится и к семенам и корневым системам сельскохозяйственных культур, находящихся в ґрунті.

Очевидно, что для проведения теоретического исследования такого взаимодействия необходимо вначале рассмотреть модель распределения электростатического поля в почве, вызванного помещенным в ґрунт

единичным заряженным штырем, а также системой таких штырей, как с одноименными, так и с разноименными зарядами. Подобные исследования и будут проведены в данной работе.

Постановка задачи. На основании уравнений Максвелла построить модель, описывающая распределение электростатического поля, создаваемого заряженными металлическими штырями в ґрунті, и действующего на находящиеся в этом ґрунті растения или их семена. Построить модель для случая расположения штырей в вершинах квадрата.

Итак, пусть в землю помещен одиночный металлический штырь с заданными размерами и заданным постоянным потенциалом, поданным на него, см. рис.1. Поверхность земли при этом будем считать плоской.

Среда 1, находящаяся над границей раздела, является воздухом и характеризуется диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и магнитной проницаемостью μ_1 , среда 2 – это почва с проницаемостями ϵ_2 и μ_0 . Поскольку обе указанные среды являются немагнитными, то их магнитные проницаемости одинаковы и равны проницаемости свободного пространства μ_0 . Диэлектрическую проницаемость воздуха можно считать такой же, как и у свободного пространства, то есть $\epsilon_1 = \epsilon_0$.

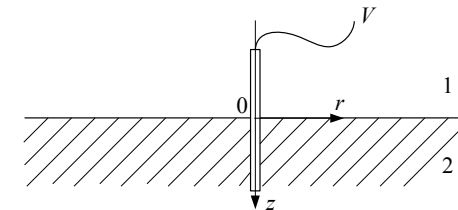


Рис. 1 – Одиночный металлический штырь в ґрунті, с подведенным напряжением V : 1 – пространство над поверхностью почвы; 2 – почва

В принципе, создаваемое заряженным штырем в почве поле не является настоящим электростатическим, поскольку почва обладает некоторой электропроводностью ($\sigma \neq 0$), причем величина этой электропроводности растет с ростом влажности почвы и увеличением в ней количества различных микроэлементов. Следовательно, заряженный штырь постепенно терял бы свой заряд при отсутствии подаваемого на него постоянного напряжения. Но поскольку в данном случае электропроводность не очень велика, а создаваемые заряженным штырем токи достаточно малы, можно считать, что магнитная энергия процесса остается пренебрежимо малой по сравнению с электрической. Поэтому в дальнейшем будем пользоваться представлениями электростатики.

Как известно [1], система уравнений Максвелла в случае электростатики имеет вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = 0; \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho; \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}, \end{cases} \quad (1)$$

где \vec{E} – вектор напряженности электрического поля;
 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}$ – вектор электрической индукции;

ρ – плотность электрического заряда;

ε_0 – электрическая постоянная;

ε_2 – относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Частное решение для распределения электрического потенциала в почве вокруг заряженного электрического штыря с заданными граничными условиями имеет вид:

$$\psi(r, \varphi) = U + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \frac{U}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin n\varphi. \quad (2)$$

Полученное выражение (2) позволяет найти напряженность создаваемого штырем электрического поля. При этом величина модуля напряженности электрического поля будет выглядеть следующим образом:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^n}{r^{n+1}}, \quad (3)$$

где n – нечетно.

Приведенные выше выражения (2) и (3) относятся к случаю, когда центр системы координат совпадает с осью заряженного штыря. Однако, поскольку распределение электромагнитного поля инвариантно относительно выбранной системы координат, то при переходе к системе координат, у которой центр находится в произвольной точке, характер указанных выражений не изменится. Несколько другой вид будут иметь лишь координаты рассматриваемой точки.

Пусть начало координат не совпадает с осью заряженного металлического штыря, погруженного в почву, см. рис. 2. Здесь \vec{r}' соответствует радиус-вектору точки, совпадающей с осью штыря в перпендикулярной к нему плоскости; \vec{r}_0 – радиус-вектор точки N , лежащей на поверхности штыря; \vec{r} – радиус – вектор произвольной точки M , в которой исследуется созданное штырем электрическое поле.

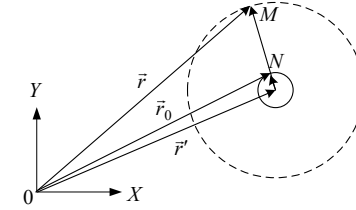


Рис. 2 – Произвольное расположение одиночного металлического штыря в прямоугольной декартовой системе координат

В этом случае выражение (2) примет вид:

$$\psi(r, \varphi) = U + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)^n \frac{U}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin n\varphi, \quad (4)$$

а выражение (3) –

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^n}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{n+1}}. \quad (5)$$

В дальнейшем будем использовать именно полученные выражения (4), (5).

Рассмотрим теперь участок грунта в форме квадрата, содержащий четыре заряженных штыря в его вершинах, см. рис. 3. Участок расположен параллельно поверхности грунта. Начало прямоугольной системы координат расположено в центре квадрата равноудалено от заряженных стержней. На всех стержнях имеется напряжение одинаковой величины U , но с чередующимся знаком. Иначе говоря, у каждого стержня ближайшие соседи имеют потенциал противоположного знака. Расстояние от центра системы координат до точки наблюдения M характеризуется радиус-вектором \vec{r} , расстояние от начала координат до осей заряженных штырей определяется радиус-векторами \vec{r}'_1 , \vec{r}'_2 , \vec{r}'_3 и \vec{r}'_4 , соответственно. Таким образом, в точке M суммируются напряженности плоских электростатических полей, приходящих от вершин квадрата с расстояний $\vec{r} - \vec{r}'_1$, $\vec{r} - \vec{r}'_2$, $\vec{r} - \vec{r}'_3$, $\vec{r} - \vec{r}'_4$. Длина сторон квадрата равна l .

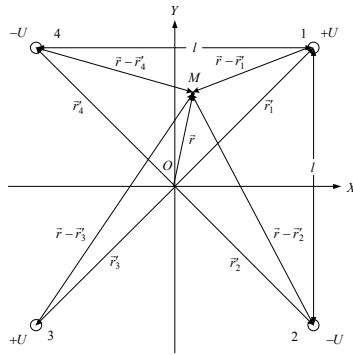


Рис. 3 – Участок грунта в форме квадрата, содержащий четыре заряженных штыря в его вершинах

Определим модуль напряженности электростатического поля в точке M . С этой целью вновь воспользуемся выражением (5), но в виде

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^4 U_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\vec{r}_{0i} - \vec{r}'_i|^n}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^{n+1}}. \quad (6)$$

В развернутом виде данное равенство выглядит следующим образом:

$$|\vec{E}| = \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\vec{r}_{01} - \vec{r}'_1|^n}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|^{n+1}} - \frac{|\vec{r}_{02} - \vec{r}'_2|^n}{|\vec{r} - \vec{r}'_2|^{n+1}} + \frac{|\vec{r}_{03} - \vec{r}'_3|^n}{|\vec{r} - \vec{r}'_3|^{n+1}} - \frac{|\vec{r}_{04} - \vec{r}'_4|^n}{|\vec{r} - \vec{r}'_4|^{n+1}} \right). \quad (7)$$

Здесь n – четное.

Проведен расчет для определения линий равных напряженностей электростатического поля, создаваемого четырьмя заряженными штырями в почве, см. рис. 4. Расчет проведен в предположении, что расстояние между осями штырей, лежащих на одной стороне квадрата, равно 1 м, величина подаваемого на них напряжения – ± 50 В, штыри имеют диаметр, равный 1 см. Расположение силовых линий показывает, что наиболее благоприятное нахождение семян растений или их корневой системы с точки зрения максимального воздействия внешнего электростатического поля – это линия, соединяющая оси заряженных штырей. Аналогичный расчет, сделанный для металлических штырей с диаметром 2 см (рис. 5), дает возможность сделать вывод о том, плотность силовых линий между разноименно заряженными штырями возрастает, то есть участок почвы, на котором напряженность электростатического поля минимальна, становится уже. Расчеты, проведенные

для штырей с разными диаметрами, показали, что оптимальным является именно диаметр в 2 см.

Белые участки вокруг каждого из штырей связаны с тем, что там резко возрастает напряженность электростатического поля, и плотность расположения линий равной напряженности становится слишком большой.

На рис. 6 представлена зависи-

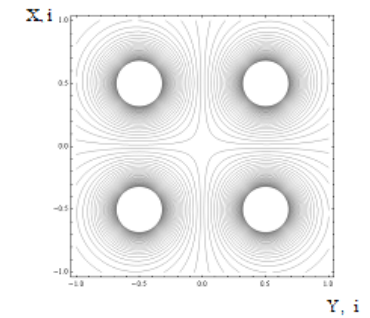


Рис. 4 – Линии равных напряженностей электростатического поля, создаваемого четырьмя заряженными штырями в почве (диаметр штырей – 1 см)

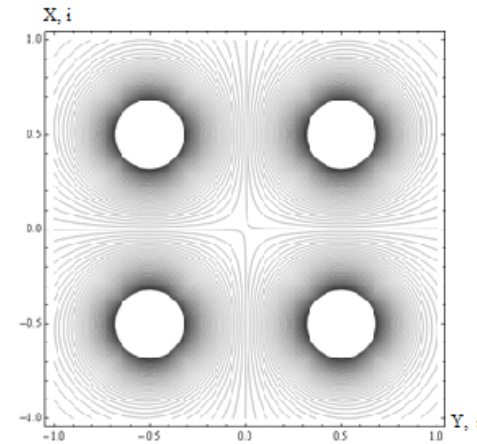


Рис. 5 – Линии равных напряженностей электростатического поля, создаваемого четырьмя заряженными штырями в почве (диаметр штырей – 2 см)

мость амплитуды модуля напряженности электростатического поля от координат точек почвы между заряженными штырями. Данный рисунок подтверждает результаты расчетов на рис. 4, 5, но в трехмерном изображении. Выступы и провалы на поверхности соответствуют расположению штырей. Данный график подтверждает сделанные выше выводы об оптимальных местах расположения сельскохозяйственных растений.

Как было сказано, приведенные аналитические и графические результаты не учитывают возникающих в почве в этом случае слабых токов. Они

в свою очередь являются причиной появления

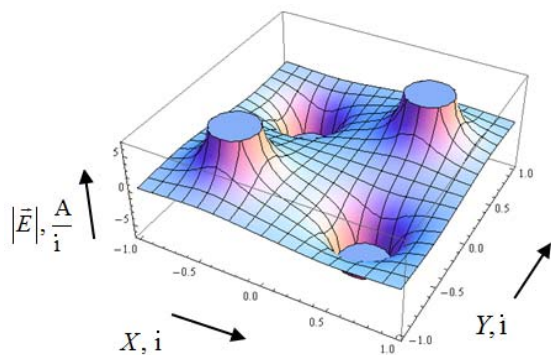


Рис. 6 – Зависимость амплитуды модуля напряженности электростатического поля от координат точек почвы между заряженными штырями

записать, воспользовавшись следующей формулой:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi V} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') + \rho'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv', \quad (8)$$

где V – объем грунта, по которому берется интеграл:

\vec{r}' – координата точки расположения заряда.

На основании (8) были проведены численные расчеты создаваемой дополнительно напряженности электрического поля. Число штырей m бралось равным четырем, объем грунта брался в пределах ячейки из этих четырех штырей на глубину 0,5 м. Полученные результаты говорят о том, что добавка к уже существующему электростатическому полю не превышает 10%. Эта величина лежит в пределах погрешности самих расчетов с учетом ошибки задания диэлектрической проницаемости грунта. Таким образом, в дальнейшем при практических расчетах воздействия электростатического поля на сельскохозяйственные культуры эту поправку можно не учитывать.

Выводы. На основании разработанной модели проведен расчет напряженности электростатического поля между штырями. Расчет произведен в предположении, что потенциал между штырями равен 100 В, расстояние между ними равно 1 м. Показано, что оптимальным является расположение растений, которые несколько смещены от линий, соединяющих оси штырей.

Исходя из того, что процессы, происходящие на уровне клетки, связаны с переносом ионов через ее мембрану, исследовано явление активного переноса ионов через мембрану клетки под воздействием внешнего электростатического поля. Получены уравнения, описывающие изменение объема клетки, находящейся во внешнем электростатическом поле, а также потенциала на ее

меняющегося в различных точках грунта заряда. Поскольку мы считаем глубину погружения штырей достаточно большой, то плотность заряда можно считать зависящей только лишь от двумерных координат (x, y) , но не зависящей от вертикального погружения в землю z .

Как известно [4, 5], решение уравнения Пуассона в случае неограниченной среды можно

мембране. Данный процесс зависит как от исходного потенциала, существующего на мембране, так и от амплитуды поля и времени его воздействия.

Проведен численный анализ полученных выражений. Обнаружено, что приложенное внешнее поле существенно влияет как на объем клетки, так и на потенциал на ее мембране. Полученные результаты дают возможность прогнозировать изменения, которые могут происходить под воздействием внешнего электростатического поля на клеточном уровне. Показана возможность активного влияния на ионный состав внутренней и внешней среды клеток и, следовательно, воздействие электростатическим полем на растительную клетку в грунте дольше десяти–тринадцати дней может приводить к ее гибели, что может использоваться для уничтожения сорняков.

Список литературы: 1. Ильинский А. С. Математические модели электродинамики: Учебное пособие для вузов / А. С. Ильинский, В. В. Кравцов, А. Г. Свеишиков. – М.: Высшая школа, 1991. – 224 с. 2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов, т. 2: Уч. пос. для вузов / Н. С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – 560 с. 3. Кальницкий Л. А. Специальный курс высшей математики для вузов / Л. А. Кальницкий, Д. А. Добротин, В. Ф. Жеветжеев. – М.: Высшая школа, 1976. – 390 с. 4. Тихов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1999. – 799 с. 5. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский. – М.: Наука. – 1978. – 544 с. 6. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма / Дж. А. Стрэттон. – М.: Гостехиздат, 1948. – 540 с.

Надійшла до редколегії 26.05.2011