УДК 621.396

А. Е. ГОЛОСКОКОВ, канд. тех. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
М. А. БРОДСКИЙ, студент НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

У даній статті розглянута задача прогнозування конфліктних ситуацій. Проведено моделювання руху повітряних суден з урахуванням впливу випадкових збурень. Процес руху повітряних суден описується випадковим марківським процесом Орнштейна–Уленбека. Оцінка ймовірності конфлікту знаходиться шляхом вирішення рівняння Потрягіна або Фоккера–Планка–Колмогорова.

В данной статье рассмотрена задача прогнозирования конфликтных ситуаций. Проведено моделирование движения воздушных судов с учетом влияния случайных возмущений. Процесс движения судов описывается случайным марковским процессом Орнштейна–Уленбека. Оценка вероятности конфликта находиться путем решения уравнения Потрягина или Фоккера–Планка–Колмогорова.

The problem of predicting the conflict situations was considered in this article. The motion of aircrafts is modeled with the effect of random perturbations. The aircraft motion process is described by a random Markov process of Ornstein-Uhlenbeck process. Estimating the probability of conflict is solved by Potryagina or Fokker–Planck–Kolmogorova equations.

Введение. Согласно прогнозам к 2018 году в два раза увеличится интенсивность воздушного движения. В связи с этим возникает необходимость пересмотра существующих и развития новых концепций организации движения воздушного транспорта. Также в мировом авиационном сообществе активно обсуждается проблема безопасности полетов в связи с переходом от централизованного управления воздушным движением (УВД) к децентрализованному. Решить данную проблему возможно с помощью введения режима «свободного полета» (Free Flight) [1].

Концепция свободного полёта подразумевает существование среды, в которой пилот наделен полномочиями выбора маршрута в реальном времени без контроля со стороны диспетчера и, следовательно, пилот уже сам несет ответственность за безопасность и оптимальное проведение полёта [2].

Кооперативное УВД – новая концепция, которая позволяет повысить производительность и безопасность воздушного движения путем оптимизации взаимодействия диспетчеров, экипажей самолетов и других служб за счет интеграции цифровой системы передачи данных, улучшения методов наблюдения и автоматизации.

Концепция свободного полёта имеет два преимущества. С одной стороны, это сокращение финансовых затрат за счёт меньшего потребления топлива, а с другой стороны – возможность увеличения воздушного трафика. Локальная оптимизация, которая проводится непосредственно бортом, может быть гораздо более эффективной, чем глобальная оптимизация, которая проводится диспетчером, – прежде всего из-за того, что критерии оптимальности у различных авиакомпаний могут различаться [2].

Из-за наличия достаточно большого числа факторов, приводящих к отклонению самолета от заданных параметров траектории движения, возможны ситуации, когда нарушаются нормы безопасного расстояния между самолетами. При этом возникает угроза их столкновения, даже если первоначально спланированные полеты являются бесконфликтными и имеется система, контролирующая воздушное движение. В условиях оперативно изменяющейся воздушной обстановки, связанной с изменением направления и динамикой относительного движения самолетов, а также при сокращении норм эшелонирования значительно возрастает роль системы обнаружения и предупреждения опасного сближения самолетов.

В этой ситуации моделирование движения воздушных судов (ВС) под воздействием случайных внешних воздействиях и оценка вероятности их опасного сближения является актуальной проблемой.

Описание объекта исследования. Объектом исследования в данной работе является пара динамических объектов – воздушные судна (ВС). ВС, как динамические объекты, характеризуется вектором состояний. Рассматриваемые динамические объекты находиться в режиме полета.

Установим компоненты вектора состояния для каждого воздушного судна:

$$D_j = \{x_j(t), y_j(t), z_j(t), t, \Delta x_j(t), \Delta y_j(t), \Delta z_j(t), v_{xj}(t), v_{yj}(t), v_{zj}(t),$$

$$v_{0j}, \Delta v_{xj}(t), \Delta v_{yj}(t), \Delta v_{zj}(t), h_{xj}, h_{yj}, h_{zj}, m_j, d_j, W_j(t)\},\ j = 1, 2,$$

где $x_j(t)-$ координата продольного положения самолета в момент времени t;

$y_j(t)-$ координата бокового положения самолета в момент времени t;

$z_j(t)-$ координата вертикального положения самолета в момент времени t;

$t-$ текущий момент времени;

$\Delta x_j(t)-$ отклонение продольного положения самолета от линии заданного курса;

$\Delta y_j(t)-$ отклонение от линии заданного курса;

$\Delta z_j(t)-$ отклонение вертикального положения самолета от линии заданного курса;

$v_{xj}(t)$ – скорость полета по оси *x*;

$v_{yj}(t)$ – скорость полета по оси *y*;

$v_{zj}(t)$ – скорость полета по оси *z*;

v_{0j} – заданная скорость полета;

$\Delta v_{xj}(t)$ – отклонение от заданной скорости по оси *x*;

$\Delta v_{yj}(t)$ – отклонение от заданной скорости по оси *y*;

$\Delta v_{zj}(t)$ – отклонение от заданной скорости по оси *z*;

h_{xj} – горизонтальное минимальное расстояние между парой ВС по направлению паллета;

h_{yj} – горизонтальное боковое минимальное расстояние между парой ВС;

h_{zj} – вертикальное минимальное расстояние между парой ВС;

m_j – масса ВС;

d_j – расстояние до *i* ВС;

m_j – масса ВС;

$W_j(t)$ – винеровский процесс (воздействие внешней среды на ВС).

Система находится в состоянии конфликта тогда, когда внутренние или внешние факторы препятствуют, противодействуют осуществлению ее базисного предназначения.

Конфликтная ситуация (КС) — это наименьшая целостная неделимая часть конфликта, обладающая всеми его основными свойствами [3].

Постановка задачи. Задачей исследования является нахождение вероятности возникновения конфликтной ситуации, т.е вероятности попадания ВС в конфликтную область. Математическая модель решаемой задачи описывается с помощью стохастических дифференциальных уравнений.

Спрогнозировать конфликтную ситуацию означает определить вероятность опасного сближения ВС, следовательно прогнозирование конфликтных ситуаций чрезвычайно актуальная задача, на фоне увеличения количества ВС.

Для решения поставленной задачи рассматриваются две стохастические модели прогнозирования конфликтной ситуации. Каждая из моделей отличается размерностью и характеризуется векторами $D_j,\ j=1,2$.

В первой модели не учитывается управляющее воздействие по оси *y*. Процесс отклонения от заданной скорости полета по оси *x* считается случайным процессом и описывается следующим вектором состояний:

$$D_j=\left\{x_j(t),y_j(t),t,v_{xj}(t),v_{0j},\Delta v_{xj}(t),d_j,W_j(t)\right\},\ j=1,2. \quad (1)$$

Во второй модели учитывается управляющее воздействие по осям *x* и *y*. Процесс отклонения от заданной скорости полета по осям *x* и *y* считается случайным процессом и описывается следующим вектором состояний:

$$D_j=\left\{x_j(t),y_j(t),t,v_{xj}(t),v_{yj}(t),v_{0j},\Delta v_{xj}(t),\Delta v_{yj}(t),d_j,W_j(t)\right\},\ j=1,2. \quad (2)$$

В работе авторы считают, что процесс отклонения является случайным и его можно аппроксимировать процессом Орнштейна-Уленбека.

Математическая модель. Предположим, что состояние системы в некоторый момент времени описывается случайным векторным процессом $\mathbf{x}_t=\left\{x_1(t),\ \ldots,\ x_N(t)\right\}$ в *N*-мерном пространстве. Компонентами случайного вектора $\mathbf{x}_t$ являются координаты и скорости динамического объекта.

Относительное движение двух ВС описывается многомерным линейным стохастическим дифференциальным уравнением вида Ито

$$d\mathbf{x}_t=\mathbf{a}(\mathbf{x}_t,t)\,dt+\sum(\mathbf{x}_t,t)\,d\mathbf{f}_t,\quad \mathbf{x}_0=\mathbf{x}(0,\omega), \quad (3)$$

где $\mathbf{x}_t\in\mathbb{R}^n$ – случайный марковский процесс являющейся решением уравнения (3) (согласно теореме Дуба [5]);

$f_t\in\mathbb{R}^m$, F_t – измеримый при всех $t\in[0,T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $f_t^{(i)};i=1,\ \ldots,\ m$;

$\mathbf{a}:\mathbb{R}^n\times[0,T]\to\mathbb{R}^n$ – коэффициент сноса;

$\sum:\mathbb{R}^n\times[0,T]\to\mathbb{R}^{n\times m}$ – коэффициент диффузии;

$\mathbf{x}_0$ – начальное условие;

$\mathbf{x}_0,\ f_t-f_0,\ t>0$ – стохастические независимые процессы [4].

Каждому элементу вектора D_j соответствует элемент многомерного марковского процесса $\mathbf{x}_t$, которые в свою очередь описываются случайным процессом Орнштейна-Уленбека

$$X(t)=\left\{x(t),y(t),\Delta v_x(t),\Delta v_y(t)\right\}. \quad (4)$$

Процесс отклонения от линии заданного пути является случайным процессом, и аппроксимировать его можно случайным процессом Орнштейна-Уленбека:

$$dy(t)=-\alpha_y y(t)\,dt+\sigma_y dW_y(t) \quad (5)$$

где $x(t)$ – координата продольного положения самолета в момент времени t;

$y(t)$ – координата бокового положения самолета от линии заданного пути;

$v_x(t)$ – скорость полета ВС;

v_0 – заданная скорость полета ВС;

α_y, σ_y – известные положительные коэффициенты [4].

Отклонение самолета от заданной скорости полета по каждой координате также описывается случайным процессом Орнштейна-Уленбека:

$$d\Delta v = -\alpha \Delta v dt + \sigma dW \qquad (6)$$

где α, σ – известные положительные коэффициенты;

$W = W_y(t)$ – стандартный винеровский процесс;

$v = v(t)$ – отклонение от заданной скорости.

На процесс отклонения самолета в продольном движении наиболее существенное влияние оказывают ветровые воздействия, поэтому для продольной координаты запишем модель в виде

$$dx(t) = \left(v_0 + \Delta v_x(t)\right) dt, \qquad (7)$$

где $x(t)$ – координата продольного положения самолета в момент времени t;

$\Delta v_x(t) = v_x(0) - v_0$ – отклонение от заданной скорости полета;

v_0 – заданная скорость полета ВС вдоль линии заданного пути.

Определение вероятности конфликта. Спрогнозировать конфликтную ситуацию означает определить вероятность достижения границы динамической системы многомерным марковским процессом, поведение системы при наличии случайных возмущений описывается системой n стохастических дифференциальных уравнений.

Пусть некоторая замкнутая область Ω многомерного пространства имеет границу Γ и γ – часть этой границы. Обозначим через $p_\gamma(t, \mathbf{x})$ вероятность того, что ВС находящееся в начальный момент времени t =0 в положении $\mathbf{x}$, внутри области Ω, в течении времени t впервые выйдет из Ω через часть границы γ [6].

Данная вероятность может быть получена из решения многомерного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = -\sum_{i=1}^{M} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_i(\mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[a_i(\mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t)\right], \qquad (8)$$

где $\mathbf{x}(t)$ – многомерный марковский процесс;

$P(\mathbf{x}, t)$ – плотность вероятности в произвольный момент времени;

$a_i(\mathbf{x}, t)$ – коэффициент сноса;

$b(\mathbf{x}, t)$ – коэффициент диффузии;

или из уравнения Понтрягина

$$\frac{\partial p_\gamma}{\partial t} = \sum_{i=1}^{M} a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial p_\gamma}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M} b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \qquad (9)$$

Уравнения (8) и (9) относятся к дифференциальным уравнениям в частных производных параболического типа [6].

Уравнение (9) следует решать при начальном условии

$$p_\gamma(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Gamma \qquad (10)$$

и граничных условиях

$$p_\gamma(t, \mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \nu; \qquad (11)$$

$$p_\gamma(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \gamma. \qquad (12)$$

Начальное условие (10) следует из того, что ВС при $t = 0$ находится внутри области Ω. Граничное условие (11) означает, что выделенная часть границы γ достигнута уже при t =0, а условие (12) для точек, принадлежащих остальной части границы, означает, что достижение границы произошло уже при t =0 (ВС вышло из области), но заведомо не на γ. При этом предполагается, что траектории многомерного марковского процесса $\mathbf{x}_t$ могут выходить из области Ω через любую точку границы Γ [6].

В отсутствие случайных возмущений система, находясь в одном стационарном состоянии, не может перейти в другое без каких-либо внешних воздействий. Наличие даже малых случайных возмущений приводит к тому, что система начинает совершать малые флуктуационные колебания вблизи одного из стационарных состояний и время от времени переходит из одного состояния в другое. Естественно, что при рассмотрении подобных систем возникает вопрос о вычислении вероятности таких переходов или же о частоте смены различных состояний [7].

Рассмотрим условия возникновения конфликтной ситуации. Предположим, что два самолета конфликтуют, если относительное расстояние между ними меньше или равно безопасно допустимому расстоянию d. Вероятность опасного сближения самолетов на интервале времени [0, T] определяется по формуле:

$$q = P\left\{\exists t \in [0,T] : \mathbf{r}(t) \le d\right\}$$

где $\mathbf{r}(t)$ – вектор относительного положения самолетов;

d – безопасно допустимому расстоянию между самолетами.

Конфликтная ситуация характеризуется вектором:

$$K = (p, d, t),$$

где p – вероятность опасного сближения самолетов;

d – безопасно допустимому расстоянию между самолетами;

t – момент времени.

Выводы. В работе приведена математическая модель движения ВС под влиянием случайных возмущений, основанная на математическом аппарате линейных стохастических дифференциальных уравнений. Задача прогнозирования конфликтных ситуаций описывается многомерным уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова (8) и многомерным уравнением Понтрягина (9). Дальнейшим развитием работы авторы видят в реализации описанной математической модели прогнозирования КС между парой ВС, доработка последней с целью прогнозирования КС не только между ВС (техническими объектами), но и прогнозирование КС между экономическими объектами.

Список литературы: 1. *A. Alonso-Ayuso*. Conflict Detection &Resolution / *A. Alonso-Ayuso* // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. – 2006. – Vol. 7, № 2. – PP. 242–249. **2.** *Золотухин В. В.* Актуальные задачи управления воздушным движением / *В. В. Золотухин* // ТРУДЫ МФТИ. – 2009. – Т. 1, № 3. – С. 109–111. **3.** *Светлов В. А.* Аналитика конфликта / *В. А. Светлов.* – СПб. : Питер, 2001. – 543 с. **4.** *Кузнецов Д. Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения : теория и практика / *Д. Ф. Кузнецов.* – СПб. : Политехн. ун-т., 2010. – 816 с.**5.** *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы / *Дж. Л. Дуб.* – М. : ИЛ, 1956. – 536 с. **6.** *Тихонов В. И.* Марковские процессы / *В. И. Тихонов.* – М. : Советское радио, 1977. – 488 с. **7.** *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций / *А. А. Свешников.* – М. : Наука, 1968. – 449 с.

Надійшла до редколегії 09.06.2011