УДК 518.5

О. В. ТОНИЦА, канд. физ.-мат. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

В статті пропонуються конструктивні методи та алгоритми стохастичного моделювання фізико-механічних полів на основі теорії R-функцій та нечіткої логіки, які дозволяють враховувати технічні та технологічні допуски на геометричну та фізичну інформацію, погрішності вимірів, помилки скруглення, та на основі аналізу їх комплексного впливу на розв'язок робити експертний висновок.

В статье предлагаются конструктивные методы и алгоритмы стохастического моделирования физико-механических полей на основе теории R-функций и нечёткой логики, позволяющие учитывать технические и технологические допуски на геометрическую и физическую информацию, погрешности измерений, ошибки округления, и на основе анализа их комплексного влияния на решение делать экспертное заключение.

The constructive methods and algorithms for simulation of physical-mechanical fields based on the R-functions theory and fuzzy logics are elaborated which allow us take into account technical and technological assumptions on geometrical and physical informations, meassuring errors, rounding errors, and draw expert conclusions.

Существуют производственные задачи, при решении которых необходимо учитывать и совместно перерабатывать сложную геометрическую, логическую и аналитическую информацию. К таким задачам относятся проблемы математической физики, связанные с инженерными расчетами физико-механических полей, определяющих основные качественные характеристики изделий. Возрастающий интерес к расчетам физических полей объясняется тем, что они необходимы в теплофизике, теории упругости и пластичности, магнитной гидродинамике и других областях науки, достижения которых имеют первостепенное значение для научно-технического прогресса [1, 2]. Данная работа посвящена развитию интеллектуальных систем исследования физических полей серии «Поле» для учета технологических допусков и методических погрешностей.

Математические модели физико-механических полей могут быть представлены в виде краевых задач для уравнений с частными производными при определенных краевых условиях. Специфическая особенность поля как объекта моделирования − его зависимость не только от характера физических законов, учитываемых соответствующими уравнениями, но и от формы, взаимного расположения тел, в которых возбуждаются поля, от конфигурации площадок их взаимодействия и других геометрических и физических факторов. При исследовании и решении перечисленных проблем весьма важно создать эффективные вычислительные методы, которые позволили бы решить поставленные задач и учесть при этом геометрическую, логическую и аналитическую информацию. Такую информацию необходимо приводить к единому аналитическому виду, позволяющему включать ее в разрешающий алгоритм. Особенно актуальна разработка методов решения задач, которые имели бы универсальный характер и не требовали от исследователя глубокого знания теории. Универсальность позволяет использовать методы системного программирования для автоматизации научных исследований в математической физике.

К широко известным универсальным методам относятся вариационные и проекционные методы, которые принято называть прямыми [1]. Их характерная особенность − сведение краевых задач к системам линейных алгебраических уравнений. Приближенное решение задачи отыскивается в виде линейных комбинаций, так называемых координатных функций, которые удовлетворяют, если это необходимо, краевым условиям рассматриваемой задачи, а также требованиям полноты и условиям аппроксимационной универсальности. Построение координатных функций, удовлетворяющих перечисленным условиям для областей практически произвольной формы, долгое время оставалось проблематичным. Рассмотреть данный вопрос с общих позиций удалось после создания конструктивного математического аппарата теории R-функций [1, 2], позволившего получить решение соответствующей математической задачи в виде формулы, называемой структурой решения и содержащей явную зависимость от геометрических и физических параметров. Полученные теоретические результаты использовались при создании современной технологии программирования в математической физике, реализации проблемно-ориентированных языков и специализированных систем серии «Поле». Пользователи последних указывают формулировку задачи, исходные данные, требуемую форму выдачи результатов на языке высокого уровня, который максимально приближен к общепринятому языку описания постановки задачи и алгоритма ее решения. По заданию пользователя система «Поле» создает вычислительную схему, а затем автоматически синтезирует рабочую программу решения задачи. Опыт применения проблемно-ориентированных языков и специализированных систем серии «Поле» показывает, что они существенно упрощают и ускоряют наиболее трудоемкие этапы вычислительных экспериментов: программирование и отладку модулей, решение задач и анализ результатов.

При конструировании на аналитическом уровне решений краевых задач для сложных областей со сложным характером условий применяется метод R-функций в сочетании с вариационными и проекционными методами. Благодаря тому, что метод R-функций позволяет автоматизировать процесс преобразования геометрической информации в аналитическую, результат решения краевой задачи можно рассматривать как некоторое соотношение, включающее всю информацию о краевой задаче. Однако применение операций дифференцирования делает такие соотношения весьма громоздкими, труднообозримыми и неудобными в обращении. Их использование при решении краевой задачи невозможно без специального аппарата формализации, позволяющего свести алгоритм решения к последовательности простых операций. Сложные математические объекты объединяются средствами алгебры дифференциальных кортежей [2], а затем применяются обычные алгебраические методы преобразования этих соотношений.

При решении краевых задач математической физики используется традиционная схема реализации прямых методов, которая сводится к последовательному выполнению следующих этапов: учет геометрической информации; формирование разрешающих систем линейных алгебраических уравнений; решение систем уравнений или проблемы собственных чисел и векторов; обработка результатов вычислений.

Системы серии «Поле» являются сложными комплексами программ, предназначенными для программирования и решения краевых задач, сформулированных для уравнений с частными производными при произвольных краевых условиях и сложной геометрии области. Организационно данные системы состоят из двух частей − функционального и системного наполнения. Инструментальная система «Поле» может быть использована для исследования и решения краевых задач математической физики. Проблемной ориентацией служит решение краевых задач для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами без ограничений на характер краевых и начальных условий, форму области и участков границы. Входные языки системы «Поле» позволяют вводить всю необходимую информацию о краевых задачах математической физики.

В настоящее время автоматизация программирования в области математической физики достигла значительного прогресса. Эффект от использования проблемно-ориентированных языков и специализированных систем состоит в сокращении времени решения многих научно-технических задач, а также в создании базы для перехода к индустриальным методам и новой технологии программирования. Такие языки и системы являются инструментальной базой для проведения вычислительных экспериментов, освобождающей математиков и инженеров от рутинной и не соответствующей их специальности работы по составлению и отладке громоздких программ. Для проведения вычислительных экспериментов в области математической физики во многих случаях необходимо глубокое изучение моделируемого процесса или явления, познание законов природы процессов и их проявлений в сложном взаимодействии. Кроме того, при решении задач математической физики приходится учитывать вопросы сходимости, устойчивости вычислительного процесса, точности вычислений, эффективности применяемых методов и т.д. Эти обстоятельства создают дополнительные трудности при разработке математического обеспечения для решения задач математической физики. С помощью системы «Поле» решено много научно-технических и инженерных задач. Например, произведены расчет и оптимизация различных конструкций, для которых определяются основные качественные характеристики (прочность, добротность, долговечность, надежность и т.д.). При решении таких сложных задач возникает необходимость в проведении все более тонких расчетов температурных, деформационных, силовых и других физико-механических полей с учетом самых различных факторов физического и геометрического характера.

Для решения перечисленных задач используются методы и конструктивные средства теории R-функций, позволяющие с единых позиций решать вопросы учета и совместной переработки сложной геометрической, логической и аналитической информации, а также системы серии «Поле», характерной особенностью которых является возможность явного задания на проблемно-ориентированном языке необходимых физических и геометрических параметров. Это позволяет проводить многовариантные вычислительные эксперименты, переходить от решения одной задачи к другой, изменяя при этом форму рассматриваемых объектов и различные физические и математические параметры. Анализируя методы теории R-функций и ее программное обеспечение, следует отметить, что они представляют собой достаточно эффективную совокупность средств для проведения вычислительных экспериментов по расчету различных физико-механических полей в объектах сложной формы. Различные тестовые примеры, сравнение результатов с точными решениями, согласование решений реальных задач с данными физических экспериментов подтверждают достоверность результатов и свидетельствуют о целесообразности применения описанных программных и языковых средств для инженерных расчетов. Основное направление развития теории R-функций связано с созданием новых, более простых и эффективных конструктивных средств и с расширением предметной области системы «Поле».

Рассмотрим подходы к усовершенствованию систем анализа физических полей. При построении систем исследования задач расчета полей важен учет стохастического характера погрешностей измерений, допусков на геометрическую и физическую информацию и ошибок округления. В связи с этим возникает необходимость в развитии существующих систем расчета полей для многовариантных задач с целью получить допуски на решение и последующее экспертное заключение. Вычисления в системах расчета полей, как правило, носят детерминированный характер, в то время как реальные процессы в определенной степени являются стохастическими, содержат в себе некоторую нечеткость. Для учета последней нужно так преобразовать существующую схему исследования физических полей, чтобы в результате многовариантного счета получить более точное «нечеткое» решение, которое будет ближе к реальности. Целесообразно ввести в схему решения учет допусков, т. е. источников нечеткости, наиболее сильно влияющих на результирующее решение. Практика показывает, что таких источников, как правило, три: допуски модели (на геометрические и физические характеристики), ошибки метода («усечение» ряда, ошибки интегрирования, решения систем линейных уравнений) и погрешности округления[3]. Необходимо установить комплексное влияние варьирования величин в пределах допусков и исследовать возможности построения допусков на решение. В связи с этим большой интерес представляет разработка систем исследования полей, ориентированных на многовариантное решение краевых задач с целью учесть варьирование определенных величин в пределах заданных допусков.

Для иллюстрации нечеткости реальной задачи моделирования рассмотрим задачу Дирихле для дифференциального уравнения общего вида. Пусть заданы область D и краевые условия с учетом допусков:

$$\begin{aligned}
&Au = f;\\
&U\big|_{\Gamma_{\text{ш}}} = \varphi_i^* \Leftrightarrow \varphi \pm \Delta_\varphi;\\
&D \Leftrightarrow D \pm \Delta_D.
\end{aligned}$$

Изменяя допуски на геометрию и краевые условия в заданных пределах, получаем допуски на U, которым должно удовлетворять решение реальной краевой задачи. Предлагаемая методика моделирования для задачи анализа включает в себя следующие этапы: формирование допусков на решение; решение реальной краевой задачи; формирование экспертного заключения о приемлемости найденного решения.

Рассмотрим модель физического поля, например задачу Дирихле [1]. Четкую модель поля будем обозначать через m:

$$\begin{aligned}
&Au = f;\\
&U\big|_{\Gamma_i} = \varphi_i;\\
&D.
\end{aligned}$$

Ее решение структурным методом строится в виде

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} C_i\, \omega\, P_i + \Psi,$$

где ω − аналитическое описание области D; Ψ − функция, продолжающая краевые условия внутрь области; C_i − неопределенные коэффициенты.

В соответствии с описанными выше источниками нечеткости построим нечеткую модель поля [2]:

$$\begin{aligned}
&Au = f;\\
&U\big|_{\Gamma_i} = \varphi_i \Leftrightarrow (\varphi \pm \Delta_\varphi, \mu_{\varphi^*}(\varphi^\square));\\
&D \Leftrightarrow (D \pm \Delta_D, \mu_{D^*}(D^*)),
\end{aligned}$$

которую будем обозначать через M. Для выборки $\{m\} \subset M$ нужно получить нечеткое решение

$$U_n^* = \sum_{i=1}^{n} C_i\, \omega^\square\, P_i + \Psi_i(\varphi_i), \mu_{U_n^*}(U_n^\square).$$

Через M_1 обозначим модель, учитывающую варьирование физических величин в пределах заданных допусков, а через M_2 − учитывающую варьирование геометрических характеристик.

Модель M_1 будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
&Au = f;\\
&U\big|_{\Gamma_i} = \varphi_i \Leftrightarrow (\varphi \pm \Delta_\varphi, \mu_{\varphi^*}(\varphi^\square), M(x), D(x), f(x));\\
&D.
\end{aligned}$$

Модель M_2 будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
&Au = f;\\
&U\big|_{\Gamma_i} = \varphi;\\
&D \Leftrightarrow (D \pm \Delta_D, \mu_{D^*}(D), M(x), D(x), f(x)).
\end{aligned}$$

Здесь *M(x)* − математическое ожидание, *D(x)* − дисперсия, *f(x)* − закон распределения величины в пределах допусков.

Ошибка в величине параметров имеет случайную природу и обусловлена большим количеством случайных факторов. Вследствие этого можно считать, что изучаемые величины нормально распределены. Для решения задачи нужно построить стохастическую структуру, процесс получения заданного допуска в которой будет непрерывным и стохастическим. Необходимо построить стохастическую дискретную аппроксимацию, которая будет в пределе приближаться к непрерывной стохастической.

Получим нечеткое решение

$$\tilde{U}_n^* = \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i\, \omega^\square P_i + \tilde{\Psi}_i(\varphi_i), D(x), \mu_{U_n^*}(U_n^\square),$$

где *D(x)* − дисперсия случайной величины.

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i,$$

где m_x − математическое ожидание, p_i − вероятность события x_i.

При решении задачи, представленной моделью M_1, получим k систем уравнений, отличающихся столбцом свободных членов. Поэтому необходимо использовать метод Гаусса для решения уравнений с k правыми частями. При решении задачи, представленной моделью M_2, получим k различных краевых задач. Для повышения быстродействия процесса их решения целесообразно использовать распараллеливание по задачам.

Рассмотрим вопросы формирования выборки и интервального решения. Как правило, размытость описывается нормальным законом распределения, где Δ− некоторый доверительный интервал. Генерируя в пределах доверительного интервала случайные последовательности, формируем выборку. Для модели M_1 генерируем случайные последовательности на краевые условия, для M_2 − на геометрию. В результате реализации выборки получаем искомые решения. Интервальное решение в дискретном виде получаем следующим образом. Сканируя нечеткую область D и табулируя $\tilde{U}_n$ в каждом узле некоторой дискретной сетки, находим математическое ожидание, дисперсию и доверительный интервал. Нечеткость определяется математическим ожиданием и доверительным интервалом.

Опишем формирование выборки для задачи синтеза и наработку допусков на геометрию. В этом случае характеристики решения и их допуски уже заданы. Задаем нижние границы значений функции принадлежности и доверительной вероятности, а также последовательность допусков для геометрии, среди которых должен содержаться искомый допуск. Последовательно находя решение для каждого элемента выборки, проверяем значение функции принадлежности. Затем по значениям функции принадлежности для выборки и заданному значению доверительной вероятности оцениваем приемлемость допуска. Последний интервал, для которого условия приемлемости допуска будут выполняться, является искомым доверительным интервалом.

Функцию принадлежности текущей области по отношению к эталонной находим при помощи вычисления поверхностного интеграла по исследуемой области. При решении задачи, поставленной моделью M_1, получим k систем уравнений, отличающихся столбцом свободных членов. Поэтому необходимо использовать метод Гаусса для решения уравнений с k правыми частями. При решении задачи, представленной моделью M_2, получим k различных систем уравнений. Для повышения быстродействия процесса их решения целесообразно использовать распараллеливание по задачам.

Разработанная методика применяется для развития систем исследования физических полей.

Список литературы: **1.** *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / *В. Л. Рвачев.* − К. : Наук. думка. − 1982. − 550 с. **2.** *Рвачев В. Л.* Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов / *В. Л. Рвачев, А. Н. Шевченко*. − К. : Тэхника. − 1988. – 199 с. **3.** *Тоніца О. В.* Методи стохастичного моделювання фізико-механічних полів / *О. В. Тоніца* // 8-я Международная конференция «Теория и техника передачи, приёма и обработки информации» («Интегрированные информационные системы, сети и технологии») «ИИСТ-2002»: Сб. науч.трудов. − Харьков: ХНУРЭ, 2002. − С. 49–51.

Надійшла до редколегії 05.11.2010