УДК 621.165

В. П. СУББОТОВИЧ, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
С. А. ТЕМЧЕНКО, мл. науч. сотр. НТУ «ХПИ»

О МЕТОДЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НАРУЖНОЙ ГРАНИЦЫ ВЫХОДНОГО ДИФФУЗОРА ГАЗОВОЙ ТУРБИНЫ

Описаний новий метод проектування зовнішньої межі вихідного дифузора газової турбіни при вісесиметричній моделі течії ідеального газу. Метод спеціально розроблений для використання в задачах оптимального проектування проточних частин турбомашин, враховує особливості схем оптимізації і дозволяє істотно розпаралелювати обчислювальні процеси.

Описан новый метод проектирования внешней границы выходного диффузора газовой турбины при осесимметричной модели течения идеального газа. Метод специально разработан для использования в задачах оптимального проектирования проточных частей турбомашин, учитывает особенности схем оптимизации и позволяет существенно распараллелить вычислительные процессы.

The new method of exit cone outside boundary design of the gas turbine is described at axial-symmetric model of ideal gas flow. The method is specially developed for the usage in the problems of turbomachines' flowing pass optimum design; takes into account features of optimum alternative organisation and allows to parallel computing processes essentially.

Введение. Выходной диффузор газовой турбины – свободный кольцевой канал, у которого внутренняя ограничивающая поверхность является, как правило, цилиндрической или конической поверхностью вращения, и геометрические характеристики этой поверхности заранее известны из конструктивных соображений. Течение в диффузоре полагается установившимся, адиабатическим, безотрывным и осесимметричным, а рабочее тело – сжимаемым и невязким. Система координат – неподвижная цилиндрическая (φ, R, Z), где φ – полярный угол, R – радиальное направление, Z – осевое направление, совпадающее с осью канала.

Описание метода. Течение в диффузоре описывается следующей системой уравнений:

1) Уравнение сохранения энергии:

$$\frac{k}{k-1} p^* v^* = \frac{k}{k-1} pv + \frac{C^2}{2}, \tag{1}$$

где p^*, v^* – полные давление и удельный объем;

$C^2 = C_Z^2 + C_R^2 + C_U^2$.

2) Уравнение изоэнтропийного процесса:

$$p^* \left(v^*\right)^k = pv^k = \text{const} . \tag{2}$$

3) Система из трех уравнений, эквивалентная уравнению неразрывности:

$$C_Z = \frac{v}{2\pi R}\frac{\partial G}{\partial R}, \; C_R = -\frac{v}{2\pi R}\frac{\partial G}{\partial Z}, \; \operatorname{tg}\gamma = -\frac{\partial G}{\partial Z} \Big/ \frac{\partial G}{\partial R}, \tag{3}$$

где $G(Z, R)$ – функция массового расхода.

4) Проекция уравнения количества движения на радиальное направление:

$$C_R \frac{\partial C_R}{\partial R} + C_Z \frac{\partial C_R}{\partial Z} - \frac{C_U^2}{R} = -v \frac{\partial p}{\partial R}. \tag{4}$$

5) Проекция уравнения количества движения на осевое направление:

$$C_R \frac{\partial C_Z}{\partial R} + C_Z \frac{\partial C_Z}{\partial Z} = -v \frac{\partial p}{\partial Z}. \tag{5}$$

6) Проекция уравнения количества движения на окружное направление:

$$C_R \frac{\partial C_U}{\partial R} + C_Z \frac{\partial C_U}{\partial Z} + \frac{C_U C_R}{R} = 0 . \tag{6}$$

Преобразуем эту систему уравнений к системе уравнений меньшей размерности, как показано в работе [1]. Тогда проекции уравнения количества движения примут следующий вид:

$$\frac{v}{(2\pi R)^2}\frac{\partial G}{\partial R}\left[B_1\left(\frac{\partial p}{\partial Z} + \frac{\partial p}{\partial R}\operatorname{tg}\gamma\right) + B_2\right] - \frac{C_U^2}{R} = -v\frac{\partial p}{\partial R}, \tag{7}$$

$$-\frac{v}{(2\pi R)}\frac{\partial G}{\partial R}\left[B_3\left(\frac{\partial p}{\partial Z} + \frac{\partial p}{\partial R}\operatorname{tg}\gamma\right) + vB_4\right] - \frac{C_U^2}{R} = -v\frac{\partial p}{\partial Z}, \tag{8}$$

где $B_1 = \frac{\partial G}{\partial Z}\frac{v^2}{a^2}$; $B_2 = v\left[\left(\frac{1}{R}\frac{\partial G}{\partial Z} - \frac{\partial^2 G}{\partial Z \partial R}\right)\operatorname{tg}\gamma - \frac{\partial^2 G}{\partial Z^2}\right]$; $B_3 = \frac{\partial G}{\partial R}\frac{v^2}{a^2}$;

$B_4 = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial G}{\partial R} - \frac{\partial^2 G}{\partial R^2}\right)\operatorname{tg}\gamma - \frac{\partial^2 G}{\partial Z \partial R}$.

Систему уравнений (7) и (8) сведем к одному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{1 - \mathrm{M}_{\mathrm{Cz}}^2}{1 - \mathrm{M}_{\mathrm{Cz}}^2 - \mathrm{M}_{\mathrm{Cr}}^2}\left\{\frac{\mathrm{M}_{\mathrm{Cz}}\mathrm{M}_{\mathrm{Cr}}}{1 - \mathrm{M}_{\mathrm{Cz}}^2} vB_5 - B_6 + \frac{C_U^2}{vR}\right\}, \tag{9}$$

где $\quad B_5 = \dfrac{1}{(2\pi R)^2} \dfrac{\partial G}{\partial R} \left[\left(\dfrac{1}{R} \dfrac{\partial G}{\partial R} - \dfrac{\partial^2 G}{\partial R^2} \right) \mathrm{tg}\gamma - \dfrac{\partial^2 G}{\partial Z \partial R} \right];$

$$B_6 = \frac{v}{(2\pi R)^2} \frac{\partial G}{\partial R} \left[\left(\frac{1}{R} \frac{\partial G}{\partial Z} - \frac{\partial^2 G}{\partial Z \partial R} \right) \mathrm{tg}\gamma - \frac{\partial^2 G}{\partial Z^2} \right];$$

$\mathrm{M}_{\mathrm{Cz}} = C_Z / a$, $\mathrm{M}_{\mathrm{Cr}} = C_R / a$ – числа Маха, определенные по осевой и радиальной составляющим скорости потока;

$a = \sqrt{kpv}$ – скорость звука.

Постановка задачи. Задачу определения наружной границы диффузора сформулируем следующим образом. Задается:

1) массовый расход m, его распределение и распределение параметров рабочего тела по высоте канала на входе в диффузор, а именно: полных давления p^* и удельного объема v^*, окружной компоненты скорости потока C_U;

2) геометрические характеристики внутренней границы диффузора $R = R_b(Z)$, включая ее первые, вторые и третьи производные;

3) распределения вдоль внутренней границы скорости потока $C = C_b(Z)$ и ее первой и второй производных.

Необходимо определить на меридиональной плоскости геометрию внешней границы диффузора $R_p = R_p(Z)$ и распределение параметров рабочего тела внутри канала.

В приведенной выше формулировке задача может быть решена для любого отдельного торцевого сечения диффузора. Такую задачу для одного сечения $Z = \mathrm{const}$ назовем частной задачей. Поэтому выбираем множество из n плоскостей (расчетных сечений) $Z_0 < Z_1 < \ldots < Z_i < Z_{i+1} < \ldots < Z_n$, пересечения которых с меридиональной плоскостью покрывают с необходимой густотой всю расчетную область. Очевидно, что решение всех частных задач и будет решением задачи определения наружной границы диффузора.

В сечении $Z = Z_i$ выберем N равностоящих точек $R_j, j = \overline{1, N}$. В точке с номером $j = 1$, находящейся на внутренней границе диффузора $R_1 = R_b(Z_i)$, определяем статическое давление p_b из уравнения (1):

$$p_b = \left[\frac{k-1}{kv^*} \left(p^*\right)^{-\frac{1}{k}} \right]^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{k}{k-1} p^* v^* - \frac{C_b^2}{2} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{10}$$

Для точки $R_1 = R_b(Z_i)$ по условию задачи известна функция $C = C_b(Z)$ и её производные до второго порядка включительно. Поэтому можно записать следующую систему трех уравнений:

$$\begin{gathered} C^2 - C_R^2 - C_Z^2 - C_U^2 = 0; \\ C \frac{dC}{dZ} - C_R \frac{dC_R}{dZ} - C_Z \frac{dC_Z}{dZ} - C_U \frac{dC_U}{dZ} = 0; \\ \left(\frac{dC}{dZ}\right)^2 - \left(\frac{dC_Z}{dZ}\right)^2 - \left(\frac{dC_R}{dZ}\right)^2 - \left(\frac{dC_U}{dZ}\right)^2 + \\ + \frac{d^2 C}{dZ^2} - C_Z \frac{d^2 C_Z}{dZ^2} - C_R \frac{d^2 C_R}{dZ^2} - C_U \frac{d^2 C_U}{dZ^2} = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

В системе уравнений (11) компонента скорости C_U определяется из условия $C_U R = \mathrm{const}$, а $\dfrac{dC_U}{dZ} = -\dfrac{C_U}{R} \mathrm{tg}\gamma$, что следует из уравнения (6).

Введем функцию массового расхода $G(Z, R) = m\Psi(Z, R)$, где m – заданный массовый расход, $\Psi(Z, R)$ – безразмерная функция тока. В качестве безразмерной функции тока используется следующая функция:

$$\Psi(Z, R) = \frac{\overline{F}(Z, R) + x(Z, R)\,\overline{F}(Z, R)}{1 + x(Z, R)\,\overline{F}(Z, R)}, \tag{12}$$

где $\overline{F}(Z, R) = \left(R_j^2(Z) - R_k^2(Z)\right) / \left(R_p^2(Z) - R_k^2(Z)\right)$ – относительная торцевая площадь, принимающая значения $0 \le \overline{F}(Z, R) \le 1$.

Отметим, что функция $x(Z, R)$ – некоторая непрерывная дважды дифференцируемая функция вещественных переменных.

Если функция $x(Z, R)$ имеет вид $x(Z, R) = f(R, a_0(Z), a_1(Z), \ldots, a_l(Z))$, тогда для сечения $Z = Z_i$ величины $a_0(Z_i), a_1(Z_i), \ldots, a_l(Z_i)$, $\dfrac{\partial a_0(Z_i)}{\partial Z}, \dfrac{\partial a_1(Z_i)}{\partial Z}, \ldots, \dfrac{\partial a_l(Z_i)}{\partial Z}$ и $\dfrac{\partial^2 a_0(Z_i)}{\partial Z^2}, \dfrac{\partial^2 a_1(Z_i)}{\partial Z^2}, \ldots, \dfrac{\partial^2 a_l(Z_i)}{\partial Z^2}$ – вещественные числа. Например, если $X(Z, R) = f(R, a_0(Z))$, то есть $l = 0$, тогда вектор вещественных переменных X функции $\Psi(Z, R)$ имеет только три компоненты: $X = \left\{ a_0(Z_i), \dfrac{\partial a_0(Z_i)}{\partial Z}, \dfrac{\partial^2 a_0(Z_i)}{\partial Z^2} \right\}$.

При заданном векторе X система уравнений (11) имеет три неизвестные, а именно: искомые геометрические характеристики наружной границы диффузора $R_p, \dfrac{dR_p}{dZ}, \dfrac{d^2R_p}{dZ^2}$. Эта система уравнений решается аналитически.

Для сечения $Z = \text{const}$ уравнение (9) – обыкновенное дифференциальное уравнение. Его решение – решение задачи Коши $\dfrac{dP}{dR} = f(R, p)$ на интервале [$R_b(Z), R_p(Z)$] с граничным условием (10).

При заданном векторе X для определения распределения параметров рабочего тела в сечении $Z = Z_i$ достаточно решить задачу Коши, найти давления в точках R_j с номерами 2, 3, … , $N-1, N$ и вычислить в этих точках скорости и другие параметры течения. Однако, выполнение уравнения (1) гарантировано только в той единственной точке, в которой определялось граничное условие (10): в точке $R_1 = R_b(Z)$. Во всех других точках R_j, $j = \overline{2, N}$ выполнение уравнения сохранения энергии (1) зависит от правильности выбора вектора X. А правильность выбора вектора X мы сможем оценить из уравнения (1), а именно: определить в каждой точке R_j массовый расход, который следует ожидать через сечение $Z = Z_i$:

$$m_{X\,j} = \sqrt{\frac{\dfrac{2k}{k-1}\left(p_j^* v_j^* - p_j v_j\right)}{\left(\dfrac{v_j}{2\pi R_j}\right)^2 \left[\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial R}\right)_j^2 + \left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial Z}\right)_j^2\right] + \left(C_U^2\right)_j}}\,. \qquad (13)$$

Таким образом, необходимо найти такой вектор X, чтобы величины давлений p_j, полученные в результате решения задачи Коши, обращали уравнение (1) в тождество во всех точках R_j, $j = \overline{2, N}$ сечения $Z = Z_i$. Поэтому задача расчета течения в сечении $Z = \text{const}$ может быть сформулирована как задача нелинейного программирования, независимыми переменными которой выступают компоненты вектора X. При построении целевой функции будем руководствоваться необходимостью выполнения равенства между заданным расходом и определенным по формуле (13) в каждой точке R_j, $j = \overline{2, N}$.

Алгоритм вычисления целевой функции:

1) Задаем компоненты вектора X и вычисляем функцию (12) и её первые и вторые производные в каждой точке R_j, $j = \overline{1, N}$;

2) находим корни системы уравнений (11), а именно: R_p, $\dfrac{dR_p}{dZ}$, $\dfrac{d^2R_p}{dZ^2}$;

3) решаем задачу Коши $\dfrac{dp}{dR} = f(R, p)$ на интервале [$R_b(Z_i), R_p(Z_i)$] при граничном условии в точке $R_1 = R_b(Z)$ и вычисляем ожидаемые массовые расходы $m_{X\,j}$ в точках R_j, $j = 2, 3, \ldots, N$, используя (13);

4) вычисляем целевую функцию, построенную по принципу критерия метода наименьших квадратов:

$$S(X) = \frac{1}{N-1}\sum_{j=2}^{N}\left(\frac{m_{X\,j} - m}{m}\right)^2.$$

Описанная выше задача нелинейного программирования решается методом Нелдера и Мида.

Заключение. Итак, предложен новый метод, который в рамках осесимметричной модели течения находит геометрию наружной границы диффузора, позволяет существенно распараллелить вычислительные процессы, и учитывает особенности решения задач оптимального проектирования каналов:

– решение частной задачи в одном из сечения никак не связано с решением задачи в любом другом сечении, поэтому частные задачи могут решаться в любой последовательности, группами или одновременно;

– частная задача сформулирована как задача нелинейного программирования, что исключает несходящиеся итерационные процессы и не требуется хранения данных о предыстории поиска.

Список литературы: 1. *Субботович В. П.* Определение параметров осесимметричного потока в торцевом сечении кольцевого канала / *В. П. Субботович, С. А. Темченко* // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. научн. трудов. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. – № 6. – С. 52–55.

Надійшла до редколегії 03.11.2010