УДК 681.5

А. С. КУЦЕНКО, С. В. КОВАЛЕНКО, В. И. ТОВАЖНЯНСКИЙ

СТРУКТУРНЫЙ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Предлагается один из возможных подходов к синтезу регулятора параметров технологического процесса, математическая модель которого представлена в виде системы трансцендентных уравнений, связывающих входы и выходы технологического процесса. Целью работы является адаптация методов современной теории управления к управлению квазистатическими процессами. Подробно рассмотрен линейный случай взаимосвязи «вход-выход» и квадратичный критерий качества процесса стабилизации параметров технологического процесса.

Ключевые слова: технологический процесс, система стабилизации, линейно-квадратичная задача, квазистатическая математическая модель, теория управления.

Введение. Задачи управления сложными технологическими процессами (ТП) в теплоэнергетике, металлургии и химической промышленности обычно осложнены значительными неопределенностями математических моделей рабочих процессов объектов управления. В самом общем случае математические модели перечисленных технологических процессов, состоят из композиций подсистем дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных), дополненных между собой статическими связями [1–4]. Математические модели технологических процессов в форме дифференциальных уравнений позволяют моделировать как переходные, так и установившиеся режимы функционирования технологического оборудования, соответствующие нулевым значениям производных, входящих в систему дифференциальных уравнений. Квазистатические математические модели технологических процессов обладают тем достоинством, что они могут быть получены на основе экспериментальных данных методами планирования экспериментов. Недостатком квазистатических математических моделей управляемых процессов является их слабая приспособленность к методам современной теории управления, ориентированной на управление динамическими объектами.

Целью настоящей работы является адаптация некоторых методов современной теории управления к управлению технологическими процессами, представленными квазистатическими математическими моделями.

Постановка задачи. Будем рассматривать некоторый технологический процесс, характеризующийся вектором технологических параметров $x \in R^m$. Компоненты вектора x связаны между собой системой технологических уравнений

$$f_k\left(x_1, x_2, \ldots x_m\right) = 0, \; k = \overline{1, p}, \qquad (1)$$

полученных на основании различных физических законов и экспериментальных данных. Вектор x предполагается состоящим из двух составляющих $x^1 \in R^n$ и $x^2 \in R^{m-n}$. Вектор x^1 соответствует вектору выходных координат, характеризующих результат технологического процесса, а x^2 представляет собой множество управляющих параметров, выбор которых определяет результат технологического процесса x^1.

Будем далее предполагать, что количество уравнений p в системе (1) совпадает с размерностью n вектора x^1, а размерность x^1 совпадает с размерностью x^2. Таким образом, (1) задает неявное отображение

$$R^n \underset{G}{\rightarrow} R^n$$

Будем также предполагать, что G гомеоморфно и существует обратное преобразование $\overline{G}$. Математическую модель, удовлетворяющую перечисленным требованиям, будем называть нормальной и далее записывать в следующей форме

$$f\left(x, u\right) = 0, \qquad (2)$$

где $x \overset{\Delta}{=} x^1$ – вектор выхода технологического процесса; $u \overset{\Delta}{=} x^2$ – вектор управляющих параметров; $f\left(x, u\right)$ – n-мерная вектор-функция.

По отношению к технологической системе, представленной математической моделью (2), сформулируем две постановки основных задач управления технологическим процессом.

Задача 1. Для заданного значения вектора выхода x^* найти вектор управляющих параметров u^* такой, чтобы выполнялось условие

$$f\left(x^*, u^*\right) = 0.$$

Эту задачу можно назвать задачей предварительной настройки параметров технологического процесса, и сводится она к решению системы уравнений (2) относительно вектора u при заданном $x = x^*$.

Задача 2. Представляет собой задачу стабилизации технологической системы относительно выбранного положения равновесия $\left(x^*, u^*\right)$.

Настоящая работа посвящена структурному и параметрическому синтезу системы стабилизации заданного положения равновесия, т. е. решению задачи 2.

Выбор структуры системы стабилизации. Поскольку математическая модель вида (2) является приближенной и в процессе функционирования технологической системы имеют место параметрические возмущения, то естественно априори отказаться от рассмотрения регулятора, основанного на измерениях

© А. С. Куценко, С. В. Коваленко, В. И. Товажнянский, 2015

возмущений, и в дальнейшем рассматривать регулятор, основанный на принципе обратной связи.

Как было отмечено ранее, методы теории управления ориентированы на использование математических моделей управляемых процессов в форме дифференциальных уравнений.

В связи с этим введем в контур обратной связи интегрирующие звенья

$$\dot{u} = \delta . \qquad (3)$$

Таким образом, вместо управлений $u(t)$ будем считать управлениями скорости изменения компонент вектора u, т. е. величину δ. В связи с отмеченными обстоятельствами и сделанными предположениями будем рассматривать следующую структурную схему системы стабилизации положения рабочей точки технологического процесса (рис. 1).

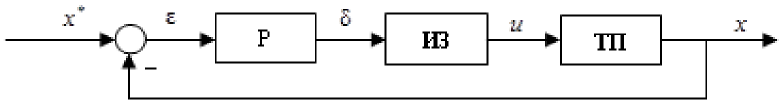

Рис. 1 – Структурная схема регулятора параметров технологического процесса. Р – регулятор, ИЗ – интегрирующее звено, ТП – технологический процесс

Схема на рис. 1 является классической схемой системы автоматического регулирования, которую можно увидеть в любом учебнике по ТАУ. Однако, некоторые ее особенности, связанные со статичностью технологического процесса и наличием чистых интеграторов в цепи обратной связи, позволяют получить ряд частных результатов в области теории синтеза параметров систем управления. Ниже в рамках выбранной структуры системы стабилизации будет рассмотрена задача параметрического синтеза регулятора, обеспечивающего устойчивость и наилучшее качество стабилизации рабочей точки ТП.

Линейно-квадратичная задача стабилизации рабочей точки ТП. Линейно-квадратичная задача оптимального управления (ЛКЗ) является одной из немногих задач теории управления, решенных в общем виде. Параметры регулятора, полученные в результате решения ЛКЗ, обеспечивают устойчивость замкнутой системы и необходимое качество переходных процессов, обусловленное выбором весовых матриц квадратичного критерия качества.

Предварительно рассмотрим линейную статическую модель технологического процесса

$$x = Bu , \qquad (4)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^n$, B – невырожденная $n \times n$ матрица, и поставим задачу стабилизации нулевого положения равновесия $x = 0$, $u = 0$ с интегральным квадратичным критерием качества

$$Y = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x^T Q x + \delta^T R \delta\right) dt , \qquad (5)$$

где Q и R положительные симметрические матрицы; а $\delta \in R^n$ – вектор управлений, связанный с управляющими переменными соотношением (3).

Соотношения (4) и (3) можно заменить традиционной системой дифференциальных уравнений в форме Коши, представляющей собой стандартный вид объекта управления в пространстве состояний

$$\dot{x} = B\delta . \qquad (6)$$

Воспользовавшись общеизвестным методом решения данной задачи оптимизации [5], получим закон управления в виде

$$\delta = -R^{-1}B^T P x = Kx , \qquad (7)$$

где $K = -R^{-1}B^T P$ – матричный коэффициент усиления; а P – положительное решение матричного уравнения Риккати, принимающего для данной задачи следующий вид:

$$PBR^{-1}B^T P = Q . \qquad (8)$$

Полученное уравнение (8) отличается от общего вида уравнения Риккати отсутствием линейных слагаемых в связи с нулевой матрицей динамики. Для его решения воспользуемся следующим приемом. Без ограничения общности будем считать симметрическую матрицу $BR^{-1}B^T$ единичной, поскольку, как известно из теории матриц [6], всегда можно выбрать линейное преобразование координат $y = Tx$ такое, что в новом базисе рассматриваемая матрица будет единичной, а матрица Q преобразуется в $\overline{Q}$.

Таким образом, вместо уравнения (8) будем рассматривать уравнение

$$P^2 = \overline{Q} . \qquad (9)$$

Для решения (9) воспользуемся спектральной теоремой [7]. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – спектр матрицы $\overline{Q}$, а $u_1, u_2, ..., u_n$ и $v_1, v_2, ..., v_n$ – квазибиортогональные системы правых и левых собственных векторов. Тогда ее спектральное представление имеет вид

$$\overline{Q} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G_i , \qquad (10)$$

где $G_i = u_i v_i^T$ ($i = \overline{1,n}$) – сопутствующие матрицы.

Поскольку все $\lambda_i > 0$ в силу положительности матрицы Q , то в соответствии с [7] решение (9) имеет вид

$$P = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} G_i . \qquad (11)$$

Полученное решение положительно, а, следовательно, является искомым решением уравнения Риккати.

Рассмотрим теперь замкнутую систему стабилизации нулевого положения равновесия с управлением (6). Система уравнений замкнутой системы стабилизации запишется как

$$\dot{x} = -BR^{-1}B^T Px \qquad (12)$$

Проанализируем качественную структуру переходных процессов в однородной линейной системе (12) при ненулевых начальных условиях. Для этого представим (12) в виде

$$F\dot{x} + Px = 0 , \qquad (13)$$

где матрица $F = (BR^{-1}B^T)^{-1}$ представляет собой положительную симметрическою матрицу.

Из теории матриц [6] известно, что существует линейное преобразование координат $x = Yy$ такое, что матрицы $Y^T FY$ и $Y^T PY$ одновременно принимают диагональный вид:

$$Y^T FY = E , \ \ Y^T PY = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) ,$$

где μ_k – корни характеристического уравнения пучка квадратичных форм с матрицами P и F

$$\left| P - \mu F \right| = 0 . \qquad (14)$$

Таким образом, в системе координат y векторное уравнение (13) распадается на n независимых дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{y}_k = -\mu_k y_k , \ k = \overline{1, n} , \qquad (15)$$

где все числа $\mu_k > 0$.

Поскольку решения уравнений (15) имеют вид

$$y_k = y_k^0 e^{-\mu_k t} , \qquad (16)$$

где y_k^0 – начальные условия, то переходные процессы по всем компонентам вектора x также имеют апериодический характер.

Вернемся теперь к задаче стабилизации ненулевой рабочей точки технологического процесса. Тогда схеме на рис. 1 будет соответствовать следующая система уравнений:

$$x = Bu , \ \dot{u} = \delta , \ \delta = K\varepsilon , \ \varepsilon = x^* - x , \qquad (17)$$

которая после несложных преобразований примет вид

$$\dot{\varepsilon} = BK\varepsilon . \qquad (18)$$

Система (18) оптимальна в смысле интегрального квадратичного критерия качества

$$Y = \int_0^{\infty} \left(\varepsilon^T Q \varepsilon + \delta^T R \delta \right) dt , \qquad (19)$$

а вектор выхода x апериодически стремится к заданной рабочей точке x^*.

Как видно из предыдущего рассмотрения, оптимальный регулятор переходных процессов основан на измерении всех компонент вектора x. Рассмотрим случай, когда в процессе управления измеряется вектор $y \in R^l$

$$y = Cx , \qquad (20)$$

где C – $(l \times n)$ матрица измерений.

В теории управления для восстановления вектора x по измерениям y обычно используются наблюдающие устройства. Полноразмерный наблюдатель вектора состояния системы (6) по измерениям (20) в соответствии с [8] описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\hat{x}} = L\left(y - C\hat{x} \right) + B\delta , \qquad (21)$$

где $\hat{x} \in R^n$ – оценка вектора x.

Из (21) следует, что при любом выборе матрицы наблюдателя L невозможно получить асимптотическую сходимость оценки $\hat{x}$ к x, поскольку $n \times n$ матрица динамики наблюдателя $(-LC)$ представляет собой произведение двух прямоугольных матриц, каждая из которых имеет ранг $l < n$, а, следовательно, матрица LC всегда вырождена.

Рассмотрим случай, когда непосредственному измерению доступны некоторые линейные комбинации (или отдельные компоненты) вектора выхода

$$y = Cx , \ \ y \in R^l \qquad (22)$$

и вектора входа

$$z = Du , \ \ z \in R^{n-l} . \qquad (23)$$

Для восстановления вектора x по измерениям y и z (22) и (23) подставим (4) в (22). В результате получим систему линейных уравнений относительно u

$$\begin{pmatrix} CB \\ \text{------} \\ D \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} y \\ \text{---} \\ z \end{pmatrix} . \qquad (24)$$

Таким образом, критерием наблюдаемости вектора u по y, z является неособенность матрицы системы (24)

$$\begin{vmatrix} CB \\ \text{------} \\ D \end{vmatrix} \neq 0 . \qquad (25)$$

Вектор x находится из следующего соотношения

$$x = B \begin{pmatrix} CB \\ \text{------} \\ D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \text{---} \\ z \end{pmatrix} . \qquad (26)$$

Стабилизация рабочей точки нелинейного ТП. Вернемся к исходной задаче – стабилизации рабочей точки $\left(x^*, u^* \right)$ статической системы (2) с интегрирующим регулятором (3). Сведем задачу к уже решенной ЛКЗ. Для этого продифференцируем систему (2) в окрестности рабочей точки ТП. В результате получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = -\left[\left(\frac{\partial^* f}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial^* f}{\partial u}\right] \delta, \qquad (27)$$

где $\frac{\partial^* f}{\partial x}$ и $\frac{\partial^* f}{\partial u}$ – матрицы Якоби, вычисленные в рабочей точке x^*, u^*.

Применяя к (27) методику синтеза матричного коэффициента усиления в контуре обратной связи, получим устойчивую линейную систему. Поскольку последняя является системой первого приближения к исходной нелинейной, то в соответствии с известной теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению исходная нелинейная система в точке x^*, u^* также будет устойчива.

Выводы. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

– использование интегрирующего регулятора положения равновесия многомерной статической системы, синтезированного на основе решения ЛКЗ оптимального управления, позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость процесса стабилизации для любых положительных матриц критерия качества;

– предложенная система стабилизации рабочей точки технологического процесса работоспособна только в случае использования информации о всех компонентах вектора выхода;

– информация о векторе выхода может быть получена на основе измерений различных компонент вектора входа и вектора выхода при выполнении критерия наблюдаемости (25).

Список литературы: **1.** *Анисимов И. В.* Основы автоматического управления технологическими процессами нефтехимической и нефтеперерабатывающей промышленности / *И. В. Анисимов.* – Л. : Химия, 1967. – 408 с. **2.** *Кафаров В. В.* Системный анализ процессов химической технологии. Технологический принцип формализации / *В. В. Кафаров, И. Н. Дорохов*. – М. : Наука, 1979. – 394 с. **3.** *Профос П.* Регулирование паросиловых установок / *П. Профос*. – М. : Энергия, 1967. – 368 с. **4.** *Балакирев В. С.* Оптимальное управление процессами химической технологии / *В. С. Балакирев, В. М. Володин, А. М. Цилин*. – М. : Химия, 1988. – 384 с. **5.** *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами / *Ю. Н. Андреев*. – М. : Наука, 1976. – 424 с. **6.** *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / *Ф. Р. Гантмахер*. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – 575 с. **7.** *Ланкастер П.* Теория матриц / *П. Ланкастер*. – М. : Наука, 1982. – 272 с. **8.** *Гудвин Г. К.* Проектирование систем управления / *Г. К. Гудвин, С. Ф. Гребе, М. Э. Сальгадо*. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 911 с.

Bibliography (transliterated): **1.** Anisimov I. V. *Osnovy avtomaticheskogo upravlenija tehnologicheskimi processami neftehimicheskoj i neftepererabatyvajushhej promyshlennosti.* Leningrad: Himija, 1967. Print. **2.** Kafarov V. V., I. N. Dorohov. *Sistemnyj analiz processov himicheskoj tehnologii. Tehnologicheskij princip formalizacii*. Moscow: Nauka, 1979. Print. **3.** Profos P. *Regulirovanie parosilovyh ustanovok*. Moscow: Jenergija, 1967. Print. **4.** Balakirev V. S., V. M. Volodin and A. M. Cilin. *Optimal'noe upravlenie processami himicheskoj tehnologii*. Moscow: Himija, 1988. Print. **5.** Andreev Ju. N. *Upravlenie konechnomernymi linejnymi ob#ektami*. Moscow: Nauka, 1976. Print. **6.** Gantmaher F. R. *Teorija matric*. Moscow: Nauka, 1967. Print. **7.** Lankaster P. *Teorija matric*. Moscow: Nauka, 1982. Print. **8.** Gudvin G. K., S. F. Grebe and M. Je. Sal'gado *Proektirovanie sistem upravlenija*. Moscow: BINOM. Laboratorija znanij, 2014. Print.

Поступила (received) 09.12.2015