УДК 519.2+539.1

А. С. МАЗМАНИШВИЛИ, А. Ю. СИДОРЕНКО

АЛГОРИТМ ПОВЫШЕНИЯ ПОРЯДКА СТАЦИОНАРНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО МАРКОВСКОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ

Предлагается алгоритм построения двухмерного вещественного нормального марковского поля второго порядка, любые ортогональные сечения которого являются стационарными случайными процессами Орнштейна-Уленбека. Показано, что предлагаемый подход позволяет синтезировать марковские случайные поля более высокого порядка. Смоделированы нормальные марковские поля нулевого, первого и второго порядков, реализованные на плоской поверхности двух переменных.

Ключевые слова случайный процесс, марковские поля, двумерный объект, процесс Орнштейна-Уленбека, генерирование случайных полей.

Введение. При стохастическом моделировании для вычислительной задачи необходим синтез алгоритмов генерации случайных величин с необходимыми свойствами. Зачастую задачи сводятся к генерированию не одномерных случайных величин, а двухмерных случайных полей, а также полей еще более высокой размерности. Так, алгоритмы генерирования случайного двумерного объекта на плоскости используются при моделировании движения транспортных средств, а также при рассмотрении других задач, решение которых требует применить марковские нормальные случайные поля второго порядка.

Алгоритмы генерирования двумерных марковских полей [1, 2] приспособлены для построения полей лишь нулевого или первого порядка. Между тем, в задачах машиностроения [3], технической электродинамики [4], навигации [6] и других случайные поля должны характеризоваться, по крайней мере, вторым порядком. Это обусловлено, прежде всего, необходимостью их применения при моделировании динамических задач, в которых рассматриваются дифференциальные уравнения второго или более высокого порядков.

В данной работе синтезирована последователь-ность вложенных алгоритмов генерирования случайного объекта – нормального марковского поля второго порядка, любые ортогональные сечения которого являются стационарными случайными процессами Орнштейна-Уленбека (ОУ-процесс), в которых дифференциальные уравнения имеют второй или выше порядок.

Целью данной работы является построение ал-горитма повышения порядка нормального марков-ского поля, любые ортогональные одномерные сече-ния которого являются стационарными случайными ОУ-процессами.

Математическая модель исследования.

В теории стохастических марковских процессов и полей известно уравнение Ланжевена первого порядка [6, 7]. Решением этого уравнения является диф-ференцированная функция. Это означает, что функция имеет порядок на единицу выше, чем порождающий процесс «белого» шума.

В этом случае уравнение движения для марковского поля $h(x,y)$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+\mu\right)h(x,y)=u(x,y), \quad (1)$$

где $u(x,y)$ – случайное поле, имеющее свойства гаус-совского двумерного «белого» шума на плоскости xOy с единичной интенсивностью; ν и μ – декре-менты стохастического движения вдоль осей x и y соответственно.

К уравнению (1) необходимо

присоединить гра-ничные условия, которые соответствуют двум нор-мальным марковским процессам и описываются пар-циальными уравнениями Ланжевена

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\nu\right)h(x,0)=u(x,0)\,,\quad \left(\frac{\partial}{\partial y}+\mu\right)h(0,y)=u(0,y)\,, \qquad (2)$$

реализующимися вдоль осей x и y соответственно, а также начальное условие, отвечающее вершинному значению случайной величины

$$h(0,0)=u(0,0)\,. \qquad (3)$$

Основным свойством нормального марковского поля $H(x,y)$ (НМД-поля) является его корреляцион-ный функционал с парциальными корреляторами $p=\exp(-\nu\,|\,x-x'\,|)$, $q=\exp(-\mu\,|\,y-y'\,|)$:

$$K_{xy}=K_{xy}(x,y\,|\,x',y')=\mathrm{M}[H(x,y)H(x',y')]=pq\sigma^2\,, \qquad (4)$$

где случайная величина $h(x,y)$ – реализация гауссовского двумерного поля $H(x,y)$ в прямоугольной области $\{x\in[0,a],\,y\in[0,b]\}$ на плоскости xOy;

ν и μ – декременты затухания поля $h(x,y)$ вдоль осей x и y соответственно.

Обобщением известных конструкций (переход-ных вероятностей для нормального марковского ОУ-процесса) может быть переходная плотность рас-пределения вероятностей для амплитуды поля $H(x,y)$

$$f_H\big(h(x,y)\,|\,h(x',y),h(x,y'),h(x',y')\big)= =\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)\,\sigma^2}}\exp\{-Q[h(x,y)]\}, \qquad (5)$$

где $Q[h(x,y)]$ – квадратичная форма относительно переменных поля

$$Q[h(x,y)]=\frac{[h(x,y)-ph(x',y)-qh(x,y')+pqh(x',y')]^2}{2(1-p^2)(1-q^2)\sigma^2}.$$

В случае если $x'\to\infty$ или $y'\to\infty$ получаем граничные переходные плотности вероятностей $f_H\big(h(x,y)\,|\,h(x',y)\big)$ или $f_H\big(h(x,y)\,|\,h(x,y')\big)$, которые рассматриваются в качестве переходных плотностей для парциальных ОУ-процессов, а при $x'\to\infty$ и $y'\to\infty$ вершинную плотность распределения вероятностей равновесного вида $f_H\big(h(x,y)\big)$ для случайной величины – реализации $h=H(x,y)$ поля $H_1(x,y)$ в точке с координатами (x,y), откуда получается корреляционная функция (4).

Таким образом, если использовать обозначения $u(x,y)\to H^{(0)}(x,y)$ и $h(x,y)\to H^{(1)}(x,y)$, то действие дифференциального выражения (1), граничных начальных условий (2) и вершинного начального условия (3) можно формально записать как операторное соотношение с дифференциальным операто-ром $D(\nu,\mu)$ вида

$$D(\nu,\mu)H^{(1)}(x,y)=H^{(0)}(x,y) \qquad (6)$$

или операторное соотношение с интегральным оператором $I(\nu,\mu)$

$$H^{(1)}(x,y)=I(\nu,\mu)H^{(0)}(x,y). \qquad (7)$$

Явный вид этого операторного соотношения можно записать с помощью выражения

$$\begin{aligned} H^{(1)}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4\nu\mu}}\Big\{&(\nu\mu)^{-1}\exp(-\nu x-\mu y)H^{(0)}(0,0)+\\ &+\mu^{-1}\int_0^x\exp[-\nu(x-x')]H^{(0)}(x',0)\,dx'+\\ &+\nu^{-1}\int_0^y\exp[-\mu(y-y')]H^{(0)}(0,y')\,dy'+\\ &+\int_0^x\int_0^y\exp[-\nu(x-x')-\mu(y-y')]H^{(0)}(x',y')\,dx'\,dy'\Big\}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Таким образом, если поле $H^{(0)}(x,y)$ является заданным вместе с граничными условиями, то при заданной очередной паре парциальных декрементов затухания ν и μ поля вдоль осей x и y можно определить поле $H^{(1)}(x,y)$. Можно убедиться, что марковское свойство для поля $H^{(1)}(x,y)$ согласно (8) имеет место вдоль граничных осей x и y, а также на плоскости xOy.

Алгоритм генерирования НМД-поля k-го порядка $H^{(k)}(x,y)$. Пусть теперь ищется НМД-поле k-го порядка $H^{(k)}(x,y)$, а НМД-поле $(k-1)$-го порядка $H^{(k-1)}(x,y)$ является заданным вместе с начальным условием и граничными условиями с декрементами ν_k и μ_k соответственно, то есть оба поля

$H^{(k-1)}(x,y)$ и $H^{(k)}(x,y)$ связаны соотношением вида $D(\nu_k,\mu_k)H^{(k)}(x,y)=H^{(k-1)}(x,y)$.

Тогда для искомого поля $H^{(k)}(x,y)$ получаем согласно (6) и (7)

$$H^{(k)}(x,y)=I(\nu_k,\mu_k)H^{(k-1)}(x,y). \qquad (9)$$

На основании решения (8) можно построить численный алгоритм генерирования НМД-поля $H^{(k)}(x,y)$ при условии, что ранее получены значения $H^{(k-1)}(x,y)$. Этот рекуррентный алгоритм обеспечивает генерирование значений в узлах случайного нормального стационарного марковского поля в прямоугольной области со сторонами a и b.

Рассмотрим на плоскости xOy прямоугольник с одной из вершин расположенных в точке $(0;0)$. Выберем сетку узлов $\{0\le n\le N,\ 0\le m\le M\}$ с шагом Δ_x вдоль оси x и с шагом Δ_y вдоль оси y так, чтобы $N=a/\Delta_x$ и $M=b/\Delta_y$.

Тогда искомый рекуррентный алгоритм значений $\left\{h_{n,m}^{(k)},\ 0\le n\le N,\ 0\le m\le M\right\}$ НМД-поля $H^{(k)}(x,y)$, с помощью приведенной в [2, 5] техники, удобно представить следующими 5 шагами.

Рекуррентный алгоритм значений НМД-поля k-го порядка:

Шаг 1. Генерирование значения в вершине $n=0,\ m=0$:

$$g_{0,0}=h_{0,0}^{(k-1)}. \qquad (10)$$

Шаг 2. Генерирование значений ОУ-процесса вдоль x-границы $n>0, m=0$:

$$g_{n+1,0}=p_k g_{n,0}+\sqrt{1-p_k^2}\,h_{n+1,0}^{(k-1)}. \qquad (11)$$

Шаг 3. Генерирование значений ОУ-процесса вдоль y-границы $n=0, m>0$:

$$g_{0,m+1}=q_k g_{0,m}+\sqrt{1-q_k^2}\,h_{0,m+1}^{(k-1)}. \qquad (12)$$

Шаг 4. Последовательное (слева-направо и послойно) заполнение значениями внутренних узлов прямоугольника $n>0,\ m>0$:

$$\begin{aligned} g_{n+1,m+1}&=p_k g_{n,m+1}+q_k g_{n+1,m}-p_k q_k g_{n,m}+\\ &+\sqrt{(1-p_k^2)(1-q_k^2)}\,h_{n+1,m+1}^{(k-1)} \end{aligned}. \qquad (13)$$

Шаг 5. Получение искомых значений $\left\{h_{n,m}^{(k)},\ 0\le n\le N,\ 0\le m\le M\right\}$:

$$h_{n,m}^{(k)}=\frac{1}{\sqrt{4\nu_k\mu_k}}\,g_{n,m}. \qquad (14)$$

В выражениях (10)–(14) обозначено $p_k=\exp(-\nu_k\Delta_x)$, $q_k=\exp(-\mu_k\Delta_y)$ с парциальными декрементами ν_k и μ_k, Δ_x и Δ_y – расстояния между узлами вдоль осей x и y соответственно.

Отметим, что при выбранных значениях Δ_x и Δ_y (то есть при количестве шагов N и M, которые отвечают заданным размерам прямоугольника со сторонами a и b) интенсивность в числовом алгоритме необходимо пронормировать таким образом, чтобы энергия НМД-поля $H^{(k)}(x,y)$, приходящаяся на единицу плоскости, совпадала с заданной при любом количестве шагов.

Из формул (10)–(14) можно получить величины математического ожидания для значений $h_{n,m}^{(k)}$ и $\left(h_{n,m}^{(k)}\right)^2$ для любых (n,m)-узлов поля $H^{(k)}(x,y)$, а именно

$$\mathrm{M}\left[H_{n,m}^{(k)}\right]=0, \qquad \mathrm{M}\left[\left(H_{n,m}^{(k)}\right)^2\right]=\mathrm{const}, \qquad (15)$$

если последовательно уменьшать значение n-индекса, а потом значение m-индекса, и, наконец, найти безусловное равновесное среднее при $n=m=0$.

Таким образом, алгоритм (10)–(14) генерирования значений случайного поля $H^{(k)}(x,y)$ в прямоугольнике на плоскости является стационарным.

Объединение (8)–(15) дает возможность сформулировать следующее.

Утверждение 1. Пусть на выбранной декартовой сетке с шагами Δ_x и Δ_y между узлами вдоль осей x и y задано для $k=0$ поле $H^{(0)}$ «белого» шума с интенсивностью σ_0, а для $k=1,2,\ldots$ известна последовательность декрементов $\{(\nu_1,\mu_1)$, (ν_2,μ_2), …, $(\nu_k,\mu_k)\}$. Тогда для переходных вероятностей $\left\{f_{H^{(k)}}(.)\right\}$ амплитуд $\{h_{n,m}^{(k)}\}$ нормального марковского поля $H^{(k)}(x,y)$ порядка k могут быть использованы следующие переходные вероятности для амплитуд НМД-поля

$$f_{H^{(k)}}\left(h_{n,m}^{(k)} \mid h_{n-1,m}^{(k)}, h_{n,m-1}^{(k)}, h_{n-1,m-1}^{(k)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p_k^2)(1-q_k^2)}\,\sigma_k^2} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{\left[h_{n,m}^{(k)} - p_k h_{n-1,m}^{(k)} - q_k h_{n,m-1}^{(k)} + p_k q_k h_{n-1,m-1}^{(k)}\right]^2}{2(1-p_k^2)(1-q_k^2)\sigma_k^2}\right\}, \quad (16)$$

где $p_k = \exp(-\nu_k \Delta_x)$, $q_k = \exp(-\mu_k \Delta_y)$ – корреляторы с парциальными декрементами ν_k и μ_k соответ-ственно;

$$\sigma_k^2 = \mathrm{M}\left[\left(H_{n,m}^{(k)}\right)^2\right] = \frac{\sigma_{k-1}^2}{4\nu_k\mu_k}, \ k = 1, 2, \ldots .$$

Набор $\{f_{H^{(k)}}(.)\}$ этих плотностей вместе с набором $H^{(k)}(x,y)$ полей образуют последовательность, которая является самосогласованной в совокупности.

Утверждение 2. Пусть выражение (9) описывает интегральный оператор $I(\nu,\mu)$ повышения порядка НМД-поля на единицу, отвечающее заданной паре ν и μ. Тогда для заданного K и заданных декрементных наборов $\{\nu_1,\nu_2,..\nu_K\}$ и $\{\mu_1,\mu_2,..\mu_K\}$ с помощью интегрального оператора

$$H^{(K)}(x,y) = I(\nu_K,\mu_K)\ldots I(\nu_1,\mu_1)H^{(0)}(x,y) \quad (17)$$

может быть получено НМД-поле порядка K.

Утверждение 3. Обозначим с помощью $\hat{I}(\nu,\mu)$ оператор, который на основании (10)–(14) соответствует алгоритму повышения порядка случайной реализации НМД-поля, $h_{n,m}^{(k)} = \hat{I}(\nu_k,\mu_k)h_{n,m}^{(k-1)}$, $0 \le n \le N,\ 0 \le m \le M$.

Тогда

$$h_{n,m}^{(K)} = \hat{I}(\nu_K,\mu_K)\ldots\hat{I}(\nu_k,\mu_k)\ldots\hat{I}(\nu_1,\mu_1)h_{n,m}^{(0)}, \quad (18)$$
$$0 \le n \le N,\ 0 \le m \le M.$$

Замечание. Решение (8) и его обобщение (17) по существу являются явным видом решения уравнения Ланжевена на плоскости для первого и соответственно для K-го порядка.

Результаты генерирования НМД. На рис. 1–3 представлены пример генерирования поля $H^{(0)}(x,y)$ «белого» шума и, связанные с ним, примеры генерирования поля $H^{(1)}(x,y)$ первого порядка и поля $H^{(2)}(x,y)$ второго порядка на выбранной декартовой сетке с шагами Δ_x и Δ_y между узлами вдоль осей x и y для заданных размеров (40×40).

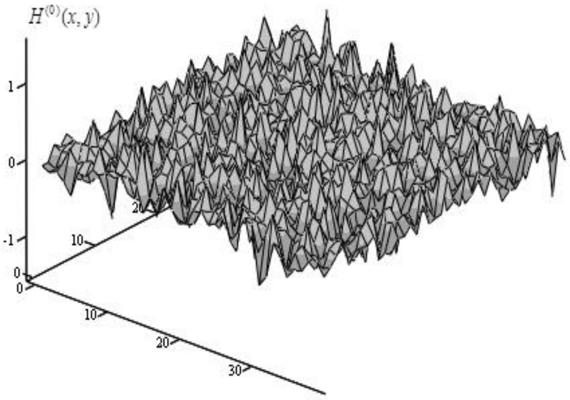

Рис. 1 – Поле «белого» шума $H^{(0)}(x,y)$; параметры: $N = 40$, $\Delta_x = 1$, $M = 40$, $\Delta_y = 1$, $\sigma = 0.2$

Анализируя рис. 1–3, видно, что при уменьшении значений парциальных декрементов ν, μ наблюдается сглаживание формы сгенерированного случайного поля. Можно отметить, что дополнения парциальных декрементов ν, μ влияют на вид топографии сгенерированного случайного марковского поля.

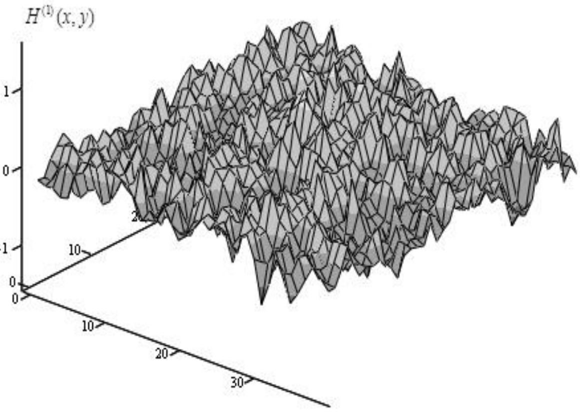

Рис. 2 – Нормальное марковское поле первого порядка $H^{(1)}(x,y)$; параметры: $N = 40$, $\Delta_x = 1$, $M = 40$, $\Delta_y = 1$, $\nu_1 = 0.8$, $\mu_1 = 0.8$, $\sigma = 0.2$

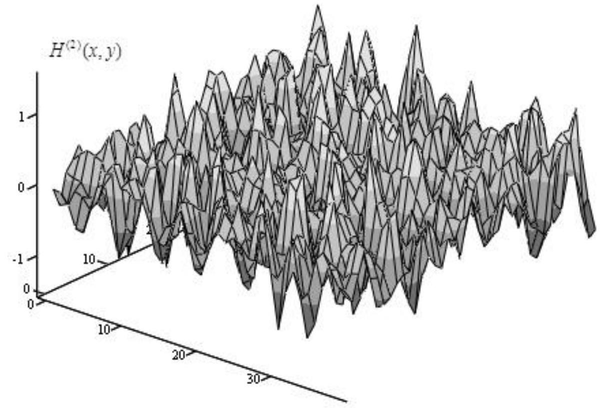

Рис. 3 – Нормальное марковское поле второго порядка $H^{(2)}(x,y)$; параметры: $N=40$, $\Delta_x=1$, $M=40$, $\Delta_y=1$, $\nu_2=1.6$, $\mu_2=1.6$, $\sigma=0.2$

Выводы. В данной работе описан алгоритм повышения порядка случайного объекта – нормального марковского поля, любые ортогональные сечения которого являются стационарными случайными ОУ-процессами. Аналогичные утверждения могут быть сформулированы для полей, которые генерируются в объеме и в пространстве высшей размерности.

Построены нормальные марковские поля нулевого, первого и второго порядка, реализованные на плоской поверхности двух переменных.

Список литературы: **1.** *Habibi A.* Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image / *A. Habibi* // Proc. IEEE, vol. 60, № 7, pp.878–883, (July) 1972. **2.** *Тихонов В. И.* Марковские процессы / *В. И. Тихонов, М. А. Миронов* – М. : Сов. радио, 1977. – 488 с. **3.** *Хусу А. П.* Шероховатость поверхностей / *А. П. Хусу, Ю. Р. Витенберг, В. А. Пальмов.* – М. : Наука, 1975. – 344 с. **4.** *Ярлыков М. С.* Статистическая теория навигации / *М. С. Ярлыков*. – М. : Радио и связь, 1985. – 344 с. **5.** *Мазманишвили А. С.* Повышение порядка двумерных марковских полей / *А. С. Мазманишвили, А. Ю. Сидоренко* // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Харків : НТУ «ХПІ», 2013. – № 3 (977). – С. 110–120. **6.** *Мазманишвили А. С.* Алгоритм генерации нормального марковского поля на поверхности идеального цилиндра / *А. С. Мазманишвили* // Электронное моделирование. – 1998. – Т. 20. – №. 6. – С. 65–69.

Bibliography (transliterated): **1.** Habibi, A. Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image. *Proc. IEEE*, vol. 60, № 7, pp.878-883, (July) 1972. **2.** Tihonov, V. I., and M. A. Mironov. "*Markovskie processi*". Moscov: Sov. Radio, 1977. 488. Print. **3.** Husu, A. P., Vitenberg, Yu. R., and V. A. Palmov. "*Sherohovatost' poverhnosti*". Moscov: Nauka, 1975. Print. **4.** Yarlykov, M. S. "*Statisticheskaya teoriya navigacii*". Moscov: Radio i svyas', 1985. Print. **5.** Masmanishvili A. S. and A. Y. Sydorenko. "Povishenie poryadka dvumernih markovskih poley". *Visnyk NTU "KhPI". Ser.: Systemniy analiz, upravlinnya ta informaciyni tehnologii*. – Kharkiv : NTU "KhPI". No. 3 (977). 2013. 110–120. Print. **6.** Masmanishvili A. S. "Algoritm generacii normal'nogo markovskogo polya na poverhnosti ideal'nogo cilindra". *Elektronnoe modelirovanie.* T. 20. № 2. 1998. 65–69. Print.

Поступила (received) 05.12.2015