УДК 519.681

В. В. КАРПЕНКО, Р. Х. АХМАДОВ

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЕТКИМ СПРОСОМ

Рассмотрена модель транспортной задачи линейного программирования, в которой спрос на транспортируемый продукт в пунктах его реализации задан нечетко. Предложен метод решения этой задачи, учитывающий потери, связанные с неопределённостью спроса, а также транспортные расходы. Метод реализует итерационную процедуру последовательного улучшения плана.

Ключевые слова: транспортная задача, линейное программирование, нечеткий спрос.

Введение. Каноническая транспортная задача линейного программирования формулируется следующим образом [1].

Пусть имеется m пунктов производства некоторого продукта и n пунктов его потребления. Производство и потребление сбалансированы, т.е. общие объемы производства и потребления равны между собой. Задача заключается в отыскании рационального плана перевозок из пунктов производства к пунктам потребления, при котором транспортные расходы минимальны. Полученный в результате решения план перевозок должен удовлетворят следующим требованиям: 1) спрос каждого из пунктов потребления должен полностью удовлетворяться; 2) весь произведенный в каждом пункте производства продукт должен полностью использоваться.

Формализуем поставленную задачу. Введем следующие обозначения:

x_{ij} – количество единиц продукта, перевозимого из i–го пункта производства в j–й пункт потребления;

c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукта из i-го пункта в j–й;

a_i – количество единиц продукта, производимое в i–м пункте;

b_j – количество единиц продукта, потребляемое в j–м пункте.

В принятых обозначениях сформулированная задача сводится к отысканию набора переменных $\{x_{ij}\}$, $i=1,2,\ldots,n,$ минимизирующего целевую функцию

$$L(\{x_{ij}\}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

и удовлетворяющего ограничениям

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,\ldots,n; \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,\ldots,m; \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n.$$

В системе сделанных здесь допущений наиболее жестким и практически всегда нарушаемым является предположение о том, что величина спроса в каждом из пунктов потребления точно известна. В связи с этим гораздо более естественно считать, что в отношении значений b_i, $i = 1,2,\ldots,m,$ имеется неопределенность. Характер этой неопределенности может быть различным. Если для каждого пункта потребления получена предварительная выборка значений спроса, то её стандартная статистическая обработка в рамках теоретико-вероятностного подхода позволяет получить плотность распределения наблюдаемой величины спроса и её моменты. На практике дело обстоит не так: имеющихся данных оказывается достаточно только для получения удовлетворительных по качеству оценок диапазона возможных значений спроса в каждом пункте и его математического ожидания. Это обстоятельство приводит к целесообразности использования для описания системы транспортировок аппарата нечеткой математики [2–5]. Сформулируем постановку транспортной задачи в условиях, когда спрос в пунктах потребления задан нечетко.

Постановка задачи. С учетом сказанного введём описание возможных значений спроса в пунктах потребления b_j функциями принадлежности $\varphi_j(b_j)$, $j=1,2,\ldots,n.$ Появляющаяся при этом некоторая свобода выбора значений заказываемого объема продукта z_j обладает важным достоинством, так как позволяет учесть различия в величине потерь при неудачном выборе величины заказа. Введем

$R_1(z_j)$ – величина потерь, появляющихся в случаях, когда заказ z_j превышает спрос и возникает необходимость хранения нереализованного продукта, $j=1,2,\ldots,n$;

$R_2(z_j)$ – величина потерь, появляющихся, если спрос b_j в конкретном j–м пункте реализации продукта превышает заказ z_j и в результате этого, помимо ущерба, связанного с потерей имиджа, возникают потери дефицита (недополучение возможной прибыли).

Понятно, что в этой ситуации набор значений z_j, $j=1,2,\ldots,n,$ необходимо каким–то разумным способом выбирать. В связи с этим формальная постановка задачи преобразуется к следующей: найти наборы $Z=(z_j)$ и $X(Z)=\{x_{ij}((z_j)\},$ минимизирующие

$$L(x_{ij}(z_j))=\sum_{j=1}^{n}R_1(z_j)+\sum_{j=1}^{n}R_2(z_j)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}(z_j) \quad (4)$$

и удовлетворяющие ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}(z_j)=a_i,\quad i=1,2,\ldots,m, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}(z_j)=z_j,\quad j=1,2,\ldots,n, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n}z_j=\sum_{i=1}^{m}a_i, \quad (7)$$

$$x_{ij}(z_j)\ge 0,\ i=1,2,\ldots,m,\quad j=1,2,\ldots,n. \quad (8)$$

Основной материал. Получим аналитическое описание функций $R_1(z_j)$ и $R_2(z_j)$, $j=1,2,\ldots,n.$ Так как z_j – нечеткие числа, то и любая их функция – тоже нечетное число. Используя функции принадлежности $\varphi_j(b_j)$, введем функции

$$\tilde{\varphi}_j(b_j)=\frac{\varphi_j(b_j)}{\int\limits_{G_j}\varphi(b_j)db_j},\quad j=1,2,\ldots,n, \quad (9)$$

где G_j – диапазон возможных значений b_j.

Полученные функции $\tilde{\varphi}_j(b_j)$ обладают всеми свойствами плотностей распределения случайных величин: они неотрицательны и удовлетворяют условию нормировки, то есть

$$\int\limits_{G_j}\tilde{\varphi}(b_j)db_j=1,\quad j=1,2,\ldots,n. \quad (10)$$

Функция $\varphi_j(b_j)$ может быть использована для расчета ожидаемого значения нечеткого числа z_j

$$m_j=\int\limits_{G_j}b_j\tilde{\varphi}(b_j)db_j,\quad j=1,2,\ldots,n, \quad (11)$$

являющегося естественным аналогом определяемого в теории вероятностей значения математического ожидания случайной величины с использованием плотности её распределения.

При этом ожидаемое значение затрат на хранение нереализованной части продукта будет равно

$$R_1(z_j)=\alpha_j\int\limits_{0}^{z_j}(z_j-b_j)\tilde{\varphi}(b_j)db_j, \quad (12)$$

где α_j – средние затраты на хранение единицы продукта в j–м пункте реализации, $j=1,2,\ldots,n.$

Аналогично этому определим потери от дефицита

$$R_2(z_j)=\beta_j\int\limits_{z_j}^{\infty}(b_j-z_j)\tilde{\varphi}(b_j)db_j, \quad (13)$$

где β_j – средняя прибыль, получаемая от реализации продукта в j–м пункте реализации, $j=1,2,\ldots,n.$

Полученные соотношения (12) и (13) можно использовать для независимого расчета рациональных значений z_j для каждого из пунктов реализации, минимизирующих суммарные затраты на хранение не проданной части продукта и потери от дефицита.

С этой целью для j–го пункта реализации введем

$$R_j(z_j)=R_1(z_j)+R_2(z_j)=\alpha_j\int_0^{z_j}(z_j-b_j)\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j+$$

$$+\beta_j\int_{z_j}^{\infty}(b_j-z_j)\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j=\alpha_j z_j\int_0^{z_j}\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j-$$

$$-\alpha_j\int_0^{z_j}b_j\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j+\beta_j\int_{z_j}^{\infty}b_j\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j-$$

$$-\beta_j z_j\int_{z_j}^{\infty}\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j,\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Теперь рациональное значение z_j найдем путем дифференцирования $R_j(z_j)$ по z_j, приравнивая его результат к нулю и решая получаемое уравнение.

Так как

$$\frac{d}{dz_j}\int_0^{z_j}\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j=\tilde{\varphi}_j(z_j),\ \ \frac{d}{dz_j}\int_{z_j}^{\infty}\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j=-\tilde{\varphi}_j(z_j),$$

$$\frac{d}{dz_j}\int_0^{z_j}b_j\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j=z_j\tilde{\varphi}_j(z_j),$$

$$\frac{d}{dz_j}\int_{z_j}^{\infty}b_j\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j=-z_j\tilde{\varphi}_j(z_j),$$

то

$$\frac{dR_j(z_j)}{dz_j}=\alpha_j\int_0^{z_j}\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j+\alpha_j z_j\tilde{\varphi}_j(z_j)-$$

$$-\alpha_j z_j\tilde{\varphi}_j(z_j)-\beta_j z_j\tilde{\varphi}_j(z_j)-$$

$$-\beta_j\int_{z_j}^{\infty}\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j+b_j z_j\tilde{\varphi}_j(z_j)=\alpha_j\int_0^{z_j}\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j-$$

$$-\beta_j(1-\int_0^{z_j}\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j)=(\alpha_j+\beta_j)\int_0^{z_j}\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j-\beta_j=0.$$

Отсюда

$$\int_0^{z_j}\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j)=\frac{\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}.$$

Полученное уравнение относительно z_j решается численно, а если функция $\tilde{\varphi}_j(b_j)$ интегрируема, то и аналитически. Пусть, например плотность распределения $\tilde{\varphi}_j(b_j)$ соответствует закону Рэлея, то есть

$$\tilde{\varphi}_j(b_j)=\frac{b_j}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{b_j^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Тогда

$$\int_0^{z_j}\frac{b_j}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{b_j^2}{2\sigma^2}\right\}db_j=-\int_0^{z_j}\frac{d}{db_j}\left(\exp\left\{-\frac{b_j^2}{2\sigma^2}\right\}\right)=$$

$$=-\exp\left\{-\frac{b_j^2}{2\sigma^2}\right\}\Bigg|_0^{z_j}=1-\exp\left\{-\frac{z_j^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

При этом уравнение относительно z_j имеет вид

$$1-\exp\left\{-\frac{z_j^2}{2\sigma^2}\right\}=\frac{\beta_j}{\alpha_j+\beta_j},$$

откуда

$$\exp\left\{-\frac{z_j^2}{2\sigma^2}\right\}=1-\frac{\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}=\frac{\alpha_j}{\alpha_j+\beta_j},$$

$$-\frac{z_j^2}{2\sigma^2}=\ln\frac{\alpha_j}{\alpha_j+\beta_j},\quad z_j=\pm\sigma\sqrt{2}\ln\frac{\alpha_j+\beta_j}{\alpha_j}.$$

Выбирая положительный корень, имеем

$$z_j^{(0)}=\sigma\sqrt{2}\ln\frac{\alpha_j+\beta_j}{\alpha_j},\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Получаемый при этом набор $\{z_1^{(0)},z_2^{(0)},\ldots,z_n^{(0)}\}$ не обязательно удовлетворяет условиям баланса, то есть

$$\sum_{j=1}^{n}z_j^{(0)}\neq\sum_{i=1}^{m}a_j=a.$$

Найдем значения z_j, минимально удаленные от $z_j^{(0)}$, $j=1,2,\ldots,n,$ и удовлетворяющие условию баланса. Используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$$\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{j=1}^{n}(z_j - z_j^{(0)}) + \lambda(\sum_{j=1}^{n} z_j - a).$$

Отсюда

$$z_j = z_j^{(0)} - \frac{\lambda}{2}, \quad \sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{j=1}^{n} z_j^{(0)} - \frac{n\lambda}{2} = a,$$

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{n}\left(a - \sum_{j=1}^{n} z_j^{(0)}\right).$$

Тогда искомый набор z_j определяется соотношением

$$z_j = z_j^{(0)} + \frac{1}{n}(a - \sum_{j=1}^{n} z_j^{(0)}, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Полученный набор z_j удовлетворяет условию баланса и может быть использован при решении задачи (1)–(3). Вместе с тем, этот набор не учитывает условий транспортирования и поэтому не минимизирует расходы транспортировки. В связи с этим естественно поставить задачу отыскания компромиссного набора z_j, $j=1,2,\ldots,n,$ и соответствующего плана транспортировки $X(Z)$, которые доставляли бы минимум комплексному критерию, учитывающему затраты на хранение нереализованного продукта, потери от дефицита и транспортные расходы. Соответствующая функция приобретает вид:

$$L(x_{ij}(z_j)) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{0}^{z_j} (z_j - b_j)\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \beta_j \int_{z_j}^{\infty} (b_j - z_j)\tilde{\varphi}_j(b_j)db_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}(z_j). \quad (14)$$

Полученная задача отыскания наборов Z и $X(Z)$, минимизирующих (14) и удовлетворяющих (5)–(8), уже не является задачей линейного программирования. Вместе с тем, она может быть решена с использованием методов нулевого порядка, например, методом Нелдера – Мида [6]. В соответствии с этим методом введем совокупность наборов

$$Z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ \ldots \\ z_{1n} \end{pmatrix}, Z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ \ldots \\ z_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, Z_{n+1} = \begin{pmatrix} z_{n+1,1} \\ z_{n+1,2} \\ \ldots \\ z_{n+1,n} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

компоненты которых определены по формулам

$$z_{kj} = \begin{cases} \dfrac{c_0}{n}\left(1 + \dfrac{s(n-1)}{n}\right), & k = j, \\ \dfrac{c_0}{n}\left(1 - \dfrac{s}{n}\right), & k \neq j, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$c_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i, \quad s \in [0;1].$$

Легко видеть, что для любого $k=1,2,\ldots,n+1$ имеет место

$$\sum_{j=1}^{n} z_{kj} = \frac{c_0}{n}\left(1 + \frac{s(n-1)}{n}\right) + \frac{(n-1)c_0}{n}\left(1 - \frac{s}{n}\right) =$$

$$= \frac{c_0}{n}\left[1 + \frac{s(n-1)}{n} + (n-1) - \frac{(n-1)s}{n}\right] = c_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i. \quad (17)$$

Выполнение равенства (17) вместе с очевидной неотрицательностью любого z_{kj}, $k=1,2,\ldots,n+1,$ $j=1,2,\ldots,n,$ означает, что каждый из наборов $z_1, z_2, \ldots z_{n+1}$ может быть использован в качестве допустимого плана заказов, удовлетворяющего условию баланса (7). Далее с использованием всех этих наборов решаются $(n+1)$ транспортных задач (1), (5)–(8) в результате чего получим наборы $X_1(z_1)$, $X_2(z_2), \ldots, X_{n+1}(z_{n+1})$. Теперь эти наборы вместе с совокупностью наборов (15) используются для вычисления значений целевой функции (4). Получаемые при этом значения $L(z_1, X(z_1))$, $L(z_2, X(z_2)), \ldots, L(z_{n+1}, X(z_{n+1}))$ далее участвуют в стандартной процедуре улучшения плана, реализуемой методом Нелдера – Мида (см. рис. 1).

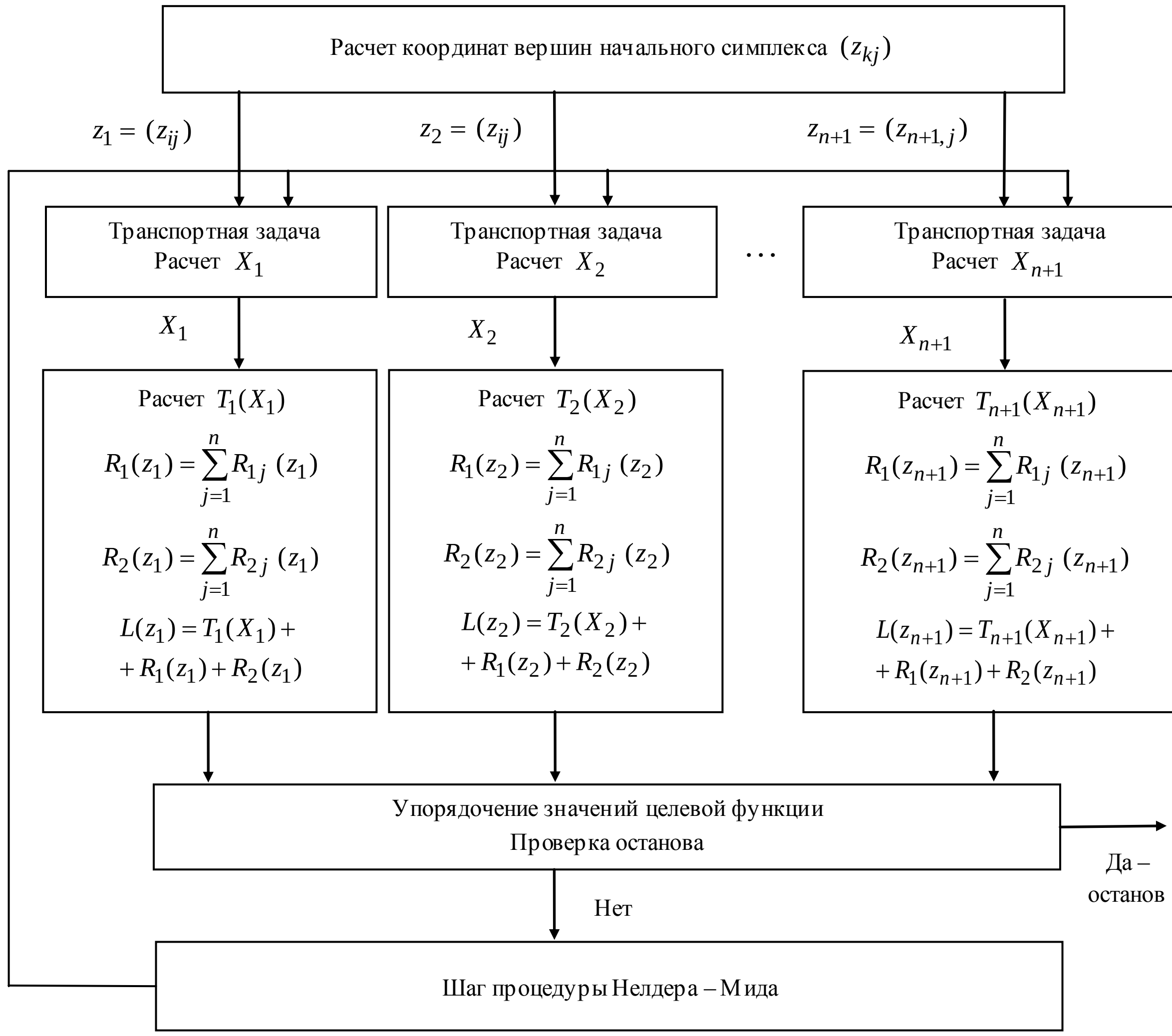

Рис. 1 – Блок-схема алгоритма решения задачи

Другой, приближенный вариант решения задачи может быть получен с использованием следующей двухэтапной процедуры. На первом этапе с использованием рассчитанных по формуле (11) ожидаемых значений спроса в каждом из пунктов потребления решается задача отыскания набора $X = (x_{ij})$, минимизирующего (1) и удовлетворяющего (2)–(3), а также ограничению

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = m_j, \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Пусть $X^{(0)} = (x_{ij}^{(0)})$ – получаемое при этом решение транспортной задачи, которое будем называть модальным. Выделим теперь ненулевые компоненты плана $X^{(0)}$. Число этих компонентов равно $m+n-1$, а их номера образуют множество $N = \{1,2,\ldots,m+n-1\}$. Используя эту нумерацию преобразуем двухиндексную систему уравнений (2)–(3) в одноиндексную, задав вектор правых частей этих уравнений следующим образом $D = (a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, b_1, b_2, \ldots, b_n,)$.

Решение этой системы уравнений даст вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1})$, компоненты которого будут линейно зависеть от нечетких значений $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и, следовательно, будут нечеткими. Используя функции принадлежности нечетких чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ в соответствии с правилами нечеткой математики [2] получим функции принадлежности нечетких чисел X_k, $k = 1,2,\ldots,m+n-1$. Далее по этим же правилам определим функцию принадлежности $F(X)$ нечеткого значения линейной формы $L(x)=\sum_{k\in N} c_k x_k$. Теперь в качестве четкого решения исходной задачи примем набор X, минимизирующий составной критерий

$$J(x)=\int_{\Omega} F(X)dx+(X-X^{(0)})T(X-X^{(0)}). \quad (18)$$

Этот критерий имеет понятный смысл: первое его слагаемое определяет компактность функции принадлежности нечеткого значения $L(x)$, а второе равно сумме квадратов отклонений искомого решения от модального.

Выводы. Таким образом, в работе предложен метод решения транспортной задачи линейного программирования для случая, когда неопределенность спроса на реализуемый продукт определена в терминах нечеткой математики. Для решения задачи введен комплексный критерий, учитывающий затраты на хранение непроданной части продукта, потери от дефицита, а также транспортные расходы. Получение оптимального плана обеспечивается итерационной процедурой Нелдера – Мида. Рассмотрен альтернативный метод решения задачи, обеспечивающий двухшаговый вариант получения решения.

Список литературы: **1.** *Раскин Л. Г.* Анализ сложных систем / *Л. Г. Раскин* – М. : Сов. Радио, – 1976. – 344 с. **2.** *Орловский С. А.* Проблемы принятий решений при нечеткой исходной инфорамции / *С. А. Орловский* – М. : Наука, – 1981. – 206 с. **3.** *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике / *Д. Дюбуа, А. Прад* – М. : Радио и связь, – 1990. – 286 с. **4.** *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств / *А. Кофман* – М. : Радио и связь, – 1982. – 432 с. **5.** *Раскин Л. Г., Серая О. В.* Нечеткая математика / *Л. Г. Раскин, О. В. Серая* – Х. : Парус, – 2008. – 352 с. **6.** *Раскин Л. Г.* Математическое программирование / *Л. Г. Раскин* – Х. : НТУ «ХПИ», – 2002. – 124 с.

Bibliography (transliterated): **1.** Raskin L. G. *Analiz slozhnyh system*. Moscow: Sov. Radio, 1976. Print. **2.** Orlovskij S. A. *Problemy prinjatij reshenij pri nechetkoj ishodnoj inforamcii.* Moscow: Nauka, 1981. Print. **3.** Djubua D., Prad A. *Teorija vozmozhnostej. Prilozhenie k predstavleniju znanij v informatike.* Moscow: Radio i svjaz, 1990. Print. **4.** Kofman A. *Vvedenie v teoriju nechetkih mnozhestv*. Moscow: Radio i svjaz, 1982. Print. **5**. Raskin L. G., Seraja O. V. *Nechetkaja matematika*. Kharkiv: Parus, 2008. Print. **6**. Raskin L. G. *Matematicheskoe programmirovanie*. Kharkiv: NTU "KhPI", 2002. Print.

Поступила (received) 07.12.2015