

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Системний
аналіз, управління та
інформаційні технології**

№ 2 (8) 2022

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: System
analysis, control and
information technology**

No. 2 (8) 2022

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

Харків
НТУ «ХПІ», 2022

Kharkiv
NTU "KhPI", 2022

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: System analysis, control and information technology : зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2022. — № 2 (8) 2022. — 108 с. — ISSN 2079-0023.

Видання публікує нові наукові результати в області системного аналізу та управління складними системами, отримані на основі сучасних прикладних математичних методів і прогресивних інформаційних технологій. Публікуються роботи, пов'язані зі штучним інтелектом, аналізом великих даних, сучасними методами високопродуктивних обчислень у системах підтримки прийняття рішень.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів та спеціалістів у галузі системного аналізу, управління та комп'ютерних технологій.

Edition publishes new scientific results in the field of system analysis and control of complex systems, based on the application of modern mathematical methods and advanced information technology. Works related to artificial intelligence, big data analysis and modern methods of high-performance computing in decision support systems are publishing.

For scientists, teachers of higher education, post-graduate students, students and specialists in the field of systems analysis, management and computer technology.

Свідоцтво Міністерства юстиції України КВ № 23778-13618Р від 14 лютого 2019 р.

Мова статей – українська, англійська.

Наказом МОН України № 1643 від 28 грудня 2019 року «Про затвердження рішень Атестаційної колегії Міністерства щодо діяльності спеціалізованих вчених рад від 18 грудня 2019 року» «Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології» внесено до категорії Б «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук».

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології включений до зовнішніх інформаційних систем, у тому числі в наукометричну базу даних Index Copernicus (Польща), бібліографічну базу даних OCLC WorldCat (США), індексується пошуковими системами Google Scholar і Crossref; зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Офіційний сайт видання: <http://samit.khpi.edu.ua/>

Засновник

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Редакційна колегія

Головний редактор

Годлевський М. Д., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Заступник головного редактора

Куценко О. С., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Члени редколегії

Ахієзер О. Б., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Безменов М. І., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Бентаєб Ф., доц., Ліонський університет-2, Франція

Богомолів С., доц., Австралійський національний

університет, Австралія

Галуза О. А., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Дорофєєв Ю. І., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Керстен В., проф., Гамбурзький технологічний

університет, Німеччина

Любчик Л. М., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Москаленко В. В., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Павлов О. А., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Раскін Л. Г., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Ткачук М. В., проф., ХНУ ім. В. Н. Каразіна, Україна

Хайрова Н. Ф., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Чередніченко О. Ю., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Шаронова Н. В., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Відповідальний секретар

Безменов М. І., проф., НТУ «ХПІ», Україна

Editorial

Editor-in-chief

Godlevskiy M. D., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Deputy editor-in-chief

Kutsenko O. S., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Editorial staff members

Akhiezer O. B., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Bezmenov M. I., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Bentayeb F., Associate Professor, University of Lyon-2, France

Bogomolov S., Assistant Professor, Australian National

University, Australia

Galuzha O. A., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Dorofeyev Yu. I., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Kersten Wolfgang, Prof., Hamburg University of Technology,

Germany

Lyubchik L. M., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Moskalenko V. V., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Pavlov O. A., prof., NTUU "KPI", Ukraine

Raskin L. G., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Tkachuk M. V., prof., V. N. Karazin KhNU, Ukraine

Khairova N. F., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Cherednichenko O. O., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Sharonova N. V., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Executive secretary

Bezmenov M. I., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 10 від 20 грудня 2022 р.

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ І ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

SYSTEM ANALYSIS AND DECISION-MAKING THEORY

UDC 004:519.24:681.3.06

DOI: 10.20998/2079-0023.2022.02.01

A. A. PAVLOV, M. N. HOLOVCHENKO

MODIFIED METHOD OF CONSTRUCTING A MULTIVARIATE LINEAR REGRESSION GIVEN BY A REDUNDANT DESCRIPTION

A number of scientific works of Prof. O. A. Pavlov and his disciples is devoted to the development of an original method of efficient estimation of coefficients at nonlinear terms of multivariate polynomial regression given by a redundant description under the conditions of an active experiment. The solution of the formulated problem is reduced to the sequential construction of univariate polynomial regressions (finding efficient estimates for the coefficients at nonlinear terms) and solving the corresponding systems of linear nondegenerate equations, the variables of which are the estimates for coefficients at nonlinear terms of the multivariate polynomial regression given by the redundant description. Thus, the problem was reduced to the estimation of the coefficients at linear terms of a multivariate linear regression given by a redundant description in the conditions of an active experiment. We have proposed an original method of its solution that uses a cluster analysis algorithm. The algorithm's implementation significantly reduces the enumeration of partial descriptions of multivariate linear regression followed by the finding of the residual sum of squares for each of them. This allows using the chi-squared criterion to build a linguistic variable which value gives a qualitative assessment (high reliability, acceptable reliability, low reliability, unreliability) to the obtained result. The analysis of the computational experiments made it possible to modify the proposed method, which significantly increased its efficiency, first of all, of finding a reliable structure of the sought multivariate linear regression given by the redundant description. The method modification, in particular, has reduced the enumeration of partial descriptions and has led to a more efficient use of the general procedure of the least squares method.

Keywords: multivariate linear regression, least squares method, redundant description, cluster analysis, active experiment, linguistic variable.

O. A. ПАВЛОВ, М. М. ГОЛОВЧЕНКО

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ БАГАТОВИМІРНОЇ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ, ЗАДАНОЇ НАДЛИШКОВИМ ОПИСОМ

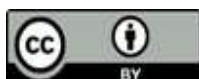
Низка наукових робіт проф. Павлова О. А. та його учнів присвячена розробці оригінального метода ефективної оцінки коефіцієнтів при нелінійних членах багатовимірної поліноміальної регресії, заданої надлишковим описом в умовах активного експерименту. Розв'язання сформульованої задачі зводиться до послідовної побудови одновимірних поліноміальних регресій (знаходження ефективних оцінок коефіцієнтів при нелінійних членах) та розв'язання відповідних систем лінійних невідроджених рівнянь, змінними яких є оцінки коефіцієнтів при нелінійних членах багатовимірної поліноміальної регресії, заданої надлишковим описом. Таким чином, задача звелася до оцінки коефіцієнтів при лінійних членах багатовимірної лінійної регресії, заданої надлишковим описом в умовах активного експерименту. Був запропонований оригінальний метод її розв'язання, що використовує алгоритм кластерного аналізу, реалізація якого суттєво зменшує перебір варіантів часткового опису лінійної багатовимірної регресії з наступним знаходженням для кожної з них залишкової суми квадратів, що дозволяє з використанням критерія χ^2 побудувати лінгвістичну змінну, значення якої дає якісну оцінку (висока достовірність, допустима достовірність, мала достовірність, недостовірність) отриманого результату. Аналіз проведених обчислювальних експериментів дозволив модифікувати запропонований метод, що суттєво підвищило його ефективність, в першу чергу знаходження достовірної структури шуканої лінійної багатовимірної регресії, заданої надлишковим описом. Модифікація методу, зокрема, зменшила перебір варіантів часткових описів та привела до більш ефективного використання загальної процедури методу найменших квадратів.

Ключові слова: багатовимірна лінійна регресія, метод найменших квадратів, надлишковий опис, кластерний аналіз, активний експеримент, лінгвістична змінна.

Introduction. Models of regression analysis are widely used in various spheres of human activity, such as science, engineering, economics, medicine [1–9], etc. Forecasting models are created using multivariate (in particular, linear) regression. As the analysis of the scientific literature shows, the theoretical and practical aspects of creating efficient universal methods for constructing regression models with the simultaneous finding of input deterministic variables that affect the value of the output

variable are still an actual problem today. The method of constructing a multidimensional polynomial regression given by a redundant description based on the results of an active experiment described in scientific works [10, 11] reduces this problem to the problem of constructing a multidimensional linear regression (MLR) given by a redundant description. An original method of its solution is given in [12] based on:

© A. A. Pavlov, M. N. Holovchenko, 2022



Research Article: This article was published by the publishing house of NTU "KhPI" in the collection "Bulletin of the National Technical University "KhPI" Series: System analysis, management and information technologies." This article is distributed under a Creative Commons [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Conflict of Interest:** The author/s declared no conflict of interest.



- using the algorithm of cluster analysis which reduces the selection of partial descriptions of the searched MLR;
- construction of a linguistic variable based on the simultaneous fulfillment of two criteria: minimization of the residual sum of squares (RSS) and the χ^2 criterion. The value of the linguistic variable characterizes the reliability of the final result.

In this work, we increase the efficiency of the new method, in particular, due to the modification of the cluster analysis algorithm; the use of a test sequence (results of a repeated active experiment) to find the RSS; refinement of the estimates of the coefficients of the found MLR structure for the entire data ensemble using only the previously constructed inverse matrix.

The problem statement. A MLR given by a redundant description has the following form:

$$Y(\bar{x}) = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j x_j + E, \quad (1)$$

where $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ is the redundant vector of deterministic input variables;

E is a random variable, its mathematical expectation $ME=0$, its variance $DE < \infty$;

$\bar{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})^T$ is the vector of values of input deterministic variables in i -th test, $i = \overline{1, n}$;

The result of an active experiment is the data of $(\bar{x}_i \rightarrow y_i, i = \overline{1, n})$ where

$$y_i = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j x_{ji} + \varepsilon_i, \quad (2)$$

where ε_i is the realization of the random variable E in the i -th experiment.

We consider y_i as an implementation of a virtual random variable $Y_i, i = \overline{1, n}$; random variables $Y_i, i = \overline{1, n}$, are independent

$$Y_i = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j x_{ji} + E_i, i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

where the random variables $E, i = \overline{1, n}$, are virtual independent copies of the random variable E (ε_i are considered realizations of the random variable $E, i = \overline{1, n}$). Let $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$. The values of the coefficients $b_j, j = \overline{0, m}$, are unknown. A redundant description (or representation) means that some input variables may not affect the value of the output variable. We need to find the true structure of the MLR using the general procedure of the least squares method (LSM) and estimate the values of its coefficients.

Modified procedures of the construction method for the MLR given by a redundant description [12].

1. *Design of the active experiment.* As computer experiments have shown, it is desirable not to set the values of the

input variables equal to zero, i.e. $\forall x_{ij} \neq 0$. The explanation of the recommendation follows from the fact that, based on the results of the active experiment, all input variables that do not affect the output variable should be excluded.

2. *Modified cluster analysis algorithm.* The cluster analysis algorithm [12] consists of the following routines.

Finding estimates of the coefficients $b_j, j = \overline{0, m}$, and ranking of the modules of their values according to the results of an active experiment $(\bar{x}_i \rightarrow y_i, i = \overline{1, n})$ using the redundant description (1) and the general scheme of LSM:

$$|\hat{b}_{j_1}| \geq |\hat{b}_{j_2}| \geq \dots \geq |\hat{b}_{j_{m+1}}|.$$

We use a sequential procedure to split all coefficients $b_j, j = \overline{0, m}$, into two classes: M_1 and M_2 .

The first step: $b_{j_1} \in M_1, b_{j_{m+1}} \in M_2$. If $|\hat{b}_{j_1}| - |\hat{b}_{j_2}| < |\hat{b}_{j_2}| - |\hat{b}_{j_{m+1}}|$, then $b_{j_2} \in M_1$, else $b_{j_2}, b_{j_3}, \dots, b_{j_{m+1}} \in M_2$.

The partitioning is complete.

The second step: $b_{j_2} \in M_1$. If $\frac{1}{2}(|\hat{b}_{j_1}| + |\hat{b}_{j_2}|) - |\hat{b}_{j_3}| < |\hat{b}_{j_3}| - |\hat{b}_{j_{m+1}}|$, then $b_{j_3} \in M_1$, else the partitioning is complete, $M_1 = \{b_{j_1}, b_{j_2}\}$, $M_2 = \{b_{j_3}, \dots, b_{j_{m+1}}\}$.

Step l : $b_{j_l} \in M_1$. If $\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l |\hat{b}_{j_i}| - |\hat{b}_{j_{l+1}}| < |\hat{b}_{j_{l+1}}| - |\hat{b}_{j_{m+1}}|$, then $b_{j_{l+1}} \in M_1$, otherwise the partitioning is complete, $M_1 = \{b_{j_1}, \dots, b_{j_l}\}$, $M_2 = \{b_{j_{l+1}}, \dots, b_{j_{m+1}}\}$.

It is obvious that in a limited number of steps the algorithm completes the partitioning of coefficients $b_j, j = \overline{0, m}$, into two classes M_1 and M_2 .

The partitioning of the coefficients of the MLR given by a redundant description into two classes [12] allows to find estimates of the coefficients of partial descriptions of the desired MLR based on the results of an active experiment $(\bar{x}_i \rightarrow y_i, i = \overline{1, n})$. We form the partial descriptions according to the following rule: each of them includes all terms whose coefficients are in the class M_1 as well as all possible different combinations of the members whose coefficients belong to the set M_2 .

Remark. If $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{y}$ in the LSM formula, and the matrix \mathbf{A} was built to estimate the MLR coefficients given by the redundant description based on the results of an active experiment $(\bar{x}_i \rightarrow y_i, i = \overline{1, n})$, then in order to build the corresponding matrix to estimate the coefficients of a partial description of the MLR based on the results of the active experiment $(\bar{x}_i \rightarrow y_i, i = \overline{1, n})$, we need to keep only those columns in the matrix \mathbf{A} corresponding to the coefficients included in the partial description. The vector \mathbf{y} does not change.

In the general case, having a sufficient number m of input variables and a significant scatter of the absolute non-

zero coefficient values of the sought MLR, the set M_2 can include non-zero coefficients, and its cardinality $|M_2|$ can be a sufficiently large number, which can lead to the construction of an unacceptably large number of partial descriptions of the MLR. Therefore, we propose the following modification of the cluster analysis algorithm: the algorithm is supplemented with the following procedure.

Exclude from the set M_2 the members $b_{j_1}, b_{j_{l+1}}, \dots, b_{j_{m+1}}$ that satisfy the conditions

$$|\hat{b}_{j_l}| - |\hat{b}_{j_{m+1}}| \leq \Delta_{DE,n}, \quad |\hat{b}_{j_{l-1}}| - |\hat{b}_{j_{m+1}}| > \Delta_{DE,n}, \quad (5)$$

where $\Delta_{DE,n} > 0$ is an expert bound, its value is found according to the results of experiments and depends on the value of DE and the number of experiments n . The bound statistically significantly guarantees that $b_{j_k} = 0$, $k = \overline{l, m+1}$. That is $\Delta_{DE,n} > 0$ must be a sufficiently small number. This means that non-zero coefficients may remain in M_2 and the need to enumerate the set M_2 remains, but the number of redundant partial descriptions of the MLR significantly decreases. The desired regression is found [12] using simultaneously two criteria: the minimum of RSS and the value of χ^2 that checks the hypothesis that the estimates of the random variable E realizations correspond to the given distribution.

3. Modification of RSS construction algorithm for partial descriptions of a MLR. In [12], the RSS for each partial description is given by formula (22).

Remark. For the MLR problem, we set to zero $f(\bar{x}_i)$, $i = \overline{1, n}$, in formulas (22), (23) [12]. In [12], the RSS is found according to the results of an active experiment $(\bar{x}_i \rightarrow y_i, i = \overline{1, n})$. This leads to such a value of the RSS of the partial description that has a correct structure and is practically minimal but never minimal. We proposed there to use the main idea of the group method of data handling by O. G. Ivakhnenko, namely, the RSS of each partial description is found by data that are not the components of the vector \mathbf{y} (2). To find such data, we implement a repeated active experiment $(\bar{x}_i \rightarrow y_{n+i}, i = \overline{1, n})$. Next we will show that in this case we use only the inverse matrices found by the results of the active experiment $(\bar{x}_i \rightarrow y_{n+i}, i = \overline{1, n})$ to find the coefficient estimates of the MLR partial description on the whole dataset. Thus, the numbers $y_i, i = \overline{1, n}$, are replaced with the numbers $y_{n+i}, i = \overline{1, n}$, in the formula (23) [12] to find the RSS of each partial description.

That is

$$\text{RSS}(M_1, M_2^j) = \sum_{i=1}^n \left[y_{n+i} - \sum_{\forall \hat{b}_l \in M_1} (\hat{b}_l \cdot x_{li}) \vee \hat{b}_0 - \sum_{\forall \hat{b}_l \in M_2^j} (\hat{b}_l \cdot x_{li}) \vee \hat{b}_0 \right]^2$$

where $M_2^j \subset M_2$; M_1, M_2^j unambiguously define a partial description of the MLR.

Remark. The expression $\vee \hat{b}_0$ included in the formulas (12) and (22), (23) [12] means that the coefficient b_0 can either be included in the set M_1 or M_2^j , or not belong to M_1 or M_2^j .

4. Modification of the algorithm for finding realizations of the random variable E. 4.1. Rank and renumber the partial descriptions of the MLR by the increasing values of their RSSs, and then keep the first t of them that meet the conditions

$$\text{RSS}(M_1, M_2^1) \lesssim \text{RSS}(M_1, M_2^2) \lesssim \dots \lesssim \text{RSS}(M_1, M_2^t), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \text{RSS}(M_1, M_2^t) - \text{RSS}(M_1, M_2^1) < \\ & < \text{RSS}(M_1, M_2^{t+1}) - \text{RSS}(M_1, M_2^t). \end{aligned}$$

Inequality (6) means that the values of RSSs of the first t partial descriptions are practically the same, and the values of RSSs of other partial descriptions are sufficiently different from them.

Remark. t can be equal to one. The practical equality of RSS values can be set in the form of fractions of the value of the minimal $\text{RSS}(M_1, M_2^1)$ and found experimentally. On average, it states 2÷3 % of the $\text{RSS}(M_1, M_2^1)$ value.

Let us find again for each of the partial descriptions (M_1, M_2^l) , $l = \overline{1, t}$, estimates of their coefficients using the whole experimental dataset: $(\bar{x}_i \rightarrow y_i, i = \overline{1, n})$ and $(\bar{x}_i \rightarrow y_{n+i}, i = \overline{1, n})$. Let us show that for this it is not necessary to find a new matrix \mathbf{A} and the corresponding inverse matrix $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ in the general formula of the LSM when using the vector of initial data with the components $y_i, i = \overline{1, 2n}$.

Let us consider the basic formula of LSM in the general case, i.e. for an arbitrary partial description of a MLR.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}, \quad (7)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{RV}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Y}, \quad (8)$$

where $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ is the realization of the random vector \mathbf{Y} ;

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{RV}}$ is a random vector, the vector $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is its realization, $M \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{RV}} = 0$;

$$DY_i = DE;$$

$\boldsymbol{\theta}$ is a vector of exact coefficients of an arbitrary partial description (M_1, M_2^j) .

The matrix \mathbf{A} was built based on the results of an active experiment $(\bar{x}_i \rightarrow y_i, i = \overline{1, n})$. Let us conduct the repeated active experiment $(\bar{x}_i \rightarrow y_{n+i}, i = \overline{1, n})$, let $\mathbf{y}^1 =$

$= (y_{n+i}, i = \overline{1, n})^T$ be the implementation of a virtual random vector Y_1 . Then,

$$M\hat{\theta}_{\text{RV}} = M(A^T A)^{-1} A^T Y_1 = \theta, \quad (9)$$

where $DY_{i1} = DE, i = \overline{1, n}$;

$Y_i, i = \overline{1, n}, Y_{i1}, i = \overline{1, n}$ are independent random variables. The matrix A in formulas (7)–(9) is the same.

Statement. The estimates obtained by formulas

$$\hat{\theta}^* = (A^T A)^{-1} A^T \frac{1}{2}(y + y^1), \quad (10)$$

$$\hat{\theta}_{\text{RV}}^* = (A^T A)^{-1} A^T \frac{1}{2}(Y + Y_1) \quad (11)$$

are unbiased, that is, $\forall j M\hat{\theta}_{\text{RV}}^* = \theta_j$ and

$$\forall j D\hat{\theta}_{\text{RV}}^* = \frac{1}{2} D\hat{\theta}_{\text{RV}},$$

where $\hat{\theta}_{\text{RV}}, \hat{\theta}_{\text{RV}}^*$ are the j -th components of the vectors $\hat{\theta}_{\text{RV}}, \hat{\theta}_{\text{RV}}^*$, respectively.

Proof.

$$\begin{aligned} M\hat{\theta}_{\text{RV}}^* &= M \left[(A^T A)^{-1} A^T \frac{1}{2}(Y + Y_1) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[M(A^T A)^{-1} A^T Y + M(A^T A)^{-1} A^T Y_1 \right] = \frac{1}{2}(\theta + \theta) = \theta. \end{aligned}$$

Vectors Y and Y_1 are independent.

$$\begin{aligned} D\hat{\theta}_{\text{RV}}^* &= D \left[(A^T A)^{-1} A^T \frac{1}{2}(Y + Y_1) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[D \left((A^T A)^{-1} A^T Y \right) + D \left((A^T A)^{-1} A^T Y_1 \right) \right] = \frac{1}{2} D\hat{\theta}_{\text{RV}}. \end{aligned}$$

Remark. Formulas (10), (11) follow from the equality

$$\left((A^T A^T) \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} \right)^{-1} \left((A^T A^T) \begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} (A^T A)^{-1} A^T \frac{1}{2}(Y + Y_1).$$

Corollary. Suppose that the experiment $(\bar{x}_i \rightarrow y_i, i = \overline{1, n})$ is repeated k times. Then the estimates obtained by the formula

$$\hat{\theta}_{\text{RV}}^* = (A^T A)^{-1} A^T \frac{1}{k} \left(Y + \sum_{j=1}^{k-1} Y_j \right)$$

are unbiased, and the variances of the components of the random vector $\hat{\theta}_{\text{RV}}^*$ are k times less than the variances of the components of the random vector $\hat{\theta}_{\text{RV}}$ (8).

Remark. An active experiment $(\bar{x}_i \rightarrow y_i, i = \overline{1, n})$ can consist of k repeated experiments, and then the whole dataset can be split in two parts: the first one for finding

estimates of the coefficients of partial descriptions, the second one for finding their RSSs. Inverse matrices can be built for the input data of a single experiment.

4.2. We find estimates E_i^j of realizations of the random variable E for a partial description $(M_1, M_2^j), j = \overline{1, t}$ of the MLR by the formulas

$$\begin{aligned} E_i^j &= y_i - \sum_{\forall \hat{b}_l \in M_1} (\hat{b}_l \cdot x_{li}) \vee \hat{b}_0 - \\ &\quad - \sum_{\forall \hat{b}_l \in M_2^j} (\hat{b}_l \cdot x_{li}) \vee \hat{b}_0, i = \overline{1, n}, \\ E_{n+i}^j &= y_{n+i} - \sum_{\forall \hat{b}_l \in M_1} (\hat{b}_l \cdot x_{li}) \vee \hat{b}_0 - \\ &\quad - \sum_{\forall \hat{b}_l \in M_2^j} (\hat{b}_l \cdot x_{li}) \vee \hat{b}_0, i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (12)$$

5. A modified algorithm for a linguistic variable construction. From the set of the MLR's partial descriptions $(M_1, M_2^j), j = \overline{1, t}$, we choose the one containing the minimum number of terms.

Remark. In most cases, it corresponds to the minimum RSS.

We propose to consider this partial description as an effective approximation of the sought MLR that contains only the input variables significantly affecting the output variable's value. For this description we build a linguistic variable. Let us denote this MLR's description (M_1, M_2^j) .

If we know the density function of the random variable E or aware of its analytical expression with accuracy up to the values of its numerical parameters, then we check the hypothesis that these estimates are its realizations. We do this based on the estimates of the realization of the random variable E (12) for the partial description (M_1, M_2^j) of the MLR using χ^2 criterion. Let $\chi^2(M_1, M_2^j)$ be the realization of χ^2 criterion for the partial description of the MLR (M_1, M_2^j) that has $r \geq 3$ degrees of freedom if the checked hypothesis is true. Suppose expert numbers q_1, q_2 are given satisfying the conditions

$$P(\chi^2 \geq q_1) = 0.05, P(\chi^2 \geq q_2) = 0.4, \quad (13)$$

the random variable χ^2 has $r \geq 3$ degrees of freedom, and $r-2$ is the argument value at which the density function of the random variable χ^2 reaches its unique maximum. Then, if the condition

$$r-2 \leq \chi^2(M_1, M_2^j) \leq q_2 \quad (14)$$

is met, then, with a high probability, the partial description (M_1, M_2^j) of the MLR is the sought MLR that contains all variables, each of which essentially affects the original variable. If

$$q_2 \leq \chi^2(M_1, M_2^j) < q_1, \quad (15)$$

then the obtained result has a sufficient reliability degree. If

$$\chi^2(M_1, M_2^j) \geq q_1,$$

then the obtained result is unreliable, primarily due to insufficiently accurate estimates of the partial description (M_1, M_2^j) coefficients of the MLR.

Remark 1. If there are several descriptions with a minimum number of members (M_1, M_2^j) , ..., (M_1, M_2^p) , then we study all of them, but the first contender for the solving is the one that achieves

$$\min_{i=1,p} [r - 2 - \chi^2(M_1, M_2^i)].$$

Remark 2. As a possible additional analysis, specialists in the subject field may consider other partial descriptions from the set (M_1, M_2^j) , $j = \overline{1, t}$, which have been checked by the χ^2 criterion for belonging of the numbers (12) to the distribution of the random variable E .

Conclusions. The content of this scientific article is the presentation of modified algorithmic procedures for the method of constructing a multivariate linear regression given by a redundant description [12]. The modifications follow from the analysis of statistical experiments results.

1. We have given recommendations for an active experiment design.

2. We have modified the cluster analysis algorithm for splitting the coefficients of a multivariate linear regression given by a redundant description into two classes.

3. We have modified the algorithm for finding the residual sum of squares for partial descriptions of a multivariate linear regression.

4. We have modified the algorithm for finding realizations of the random variable E .

5. We have presented a new theoretical property of the least squares method.

6. We have modified the algorithm for the linguistic variable construction.

References

1. Yu L. Using negative binomial regression analysis to predict software faults: a study of Apache Ant. *International Journal of Information Technology and Computer Science (IJITCS)*. 2012. Vol. 4, no. 8. P. 63–70. doi: 10.5815/ijitcs.2012.08.08
2. Shahrel M.Z., Mutalib S., Abdul-Rahman S. PriceCop – price monitor and prediction using linear regression and LSVM-ABC methods for e-commerce platform. *International Journal of Information Engineering and Electronic Business (IJIEEB)*. 2021. Vol. 13, no. 1. P. 1–14. doi: 10.5815/ijieeb.2021.01.01
3. Satter A., Ibtehad N. A regression based sensor data prediction technique to analyze data trustworthiness in cyber-physical system. *International Journal of Information Engineering and Electronic Business (IJIEEB)*. 2018. Vol. 10, no. 3. P. 15–22. doi: 10.5815/ijieeb.2018.03.03
4. Isabona J., Ojuh D. O. Machine learning based on kernel function controlled gaussian process regression method for in-depth extrapolative analysis of Covid-19 daily cases drift rates. *International Journal of Mathematical Sciences and Computing (IJMSC)*. 2021. Vol. 7, no. 2. P. 14–23. doi: 10.5815/ijmsc.2021.02.02
5. Sinha P. Multivariate polynomial regression in data mining: methodology, problems and solutions. *International Journal of Scientific & Engineering Research*. 2013. vol. 4, iss. 12. P. 962–965
6. Kalivas J. H. Interrelationships of multivariate regression methods using eigenvector basis sets. *Journal of Chemometrics*. 1999. Vol. 13 (2). P. 111–132. doi: 10.1002/(SICI)1099-128X(199903/04)13:2<111::AID-CEM532>3.0.CO;2-N
7. Ortiz-Herrero L., Maguregui M. I., Bartolomé L. Multivariate (O)PLS regression methods in forensic dating. *TrAC Trends in Analytical Chemistry*. 2021. vol. 141, 116278. doi: 10.1016/j.trac.2021.116278

8. Guo G., Niu G., Shi Q., Lin Q., Tian D., Duan Y. Multi-element quantitative analysis of soils by laser induced breakdown spectroscopy (LIBS) coupled with univariate and multivariate regression methods. *Analytical Methods*. 2019. Vol. 11, iss. 23. P. 3006–3013, doi: 10.1039/C9AY00890J
9. Babatunde G., Emmanuel A. A., Oluwaseun O. R., Bunmi O. B., Precious A. E. Impact of climatic change on agricultural product yield using k -means and multiple linear regressions. *International Journal of Education and Management Engineering (IJEME)*. 2019. Vol. 9, no. 3. P. 16–26. doi: 10.5815/ijeme.2019.03.02
10. Pavlov A. A. Holovchenko M. N., Drozd V. V. Construction of a multivariate polynomial given by a redundant description in stochastic and deterministic formulations using an active experiment. *Вісник Нац. ун-ту «ХПІ»: зб. наук. пр. Темат. вип.: Системний аналіз, управління та інформаційні технології*. Харків: НТУ «ХПІ», 2022. № 1 (7). С. 3–8. doi: 10.20998/2079-0023.2022.01.01
11. Pavlov A., Holovchenko M., Mukha I. et al. Mathematics and software for building nonlinear polynomial regressions using estimates for univariate polynomial regressions coefficients with a given (small) variance. *Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*. 2022. Vol. 134. P. 288–303. doi: 10.1007/978-3-031-04812-8_25
12. Павлов О. А., Головченко М. М., Ревич М. М. Метод оцінки коефіцієнтів при лінійних членах багатовимірної поліноміальної регресії, заданої надлишковим описом. *Адаптивні системи автоматичного управління: міжвідомчий наук.-техн. збірник*. Київ: НТУУ «КПІ», 2022. Том 1, № 40. С. 110–117. doi: 10.20535/1560-8956.40.2022.261665

References (transliterated)

1. Yu L. Using negative binomial regression analysis to predict software faults: a study of Apache Ant. *International Journal of Information Technology and Computer Science (IJITCS)*. 2012, vol. 4, no. 8, pp. 63–70. doi: 10.5815/ijitcs.2012.08.08
2. Shahrel M.Z., Mutalib S., Abdul-Rahman S. PriceCop – price monitor and prediction using linear regression and LSVM-ABC methods for e-commerce platform. *International Journal of Information Engineering and Electronic Business (IJIEEB)*. 2021, vol. 13, no. 1, pp. 1–14. doi: 10.5815/ijieeb.2021.01.01
3. Satter A., Ibtehad N. A regression based sensor data prediction technique to analyze data trustworthiness in cyber-physical system. *International Journal of Information Engineering and Electronic Business (IJIEEB)*. 2018, vol. 10, no. 3, pp. 15–22. doi: 10.5815/ijieeb.2018.03.03
4. Isabona J., Ojuh D. O. Machine learning based on kernel function controlled gaussian process regression method for in-depth extrapolative analysis of Covid-19 daily cases drift rates. *International Journal of Mathematical Sciences and Computing (IJMSC)*. 2021, vol. 7, No. 2, pp. 14–23. doi: 10.5815/ijmsc.2021.02.02
5. Sinha P. Multivariate polynomial regression in data mining: methodology, problems and solutions. *International Journal of Scientific & Engineering Research*. 2013, vol. 4, iss. 12, pp. 962–965
6. Kalivas J. H. Interrelationships of multivariate regression methods using eigenvector basis sets. *Journal of Chemometrics*. 1999, vol. 13 (2), pp. 111–132. doi: 10.1002/(SICI)1099-128X(199903/04)13:2<111::AID-CEM532>3.0.CO;2-N
7. Ortiz-Herrero L., Maguregui M. I., Bartolomé L. Multivariate (O)PLS regression methods in forensic dating. *TrAC Trends in Analytical Chemistry*. 2021, vol. 141, 116278. doi: 10.1016/j.trac.2021.116278
8. Guo G., Niu G., Shi Q. et al. Multi-element quantitative analysis of soils by laser induced breakdown spectroscopy (LIBS) coupled with univariate and multivariate regression methods. *Analytical Methods*. 2019, vol. 11, iss. 23, pp. 3006–3013, doi: 10.1039/C9AY00890J
9. Babatunde G., Emmanuel A. A., Oluwaseun O. R., Bunmi O. B., Precious A. E. Impact of climatic change on agricultural product yield using k -means and multiple linear regressions. *International Journal of Education and Management Engineering (IJEME)*. 2019, vol. 9, no. 3, pp. 16–26. doi: 10.5815/ijeme.2019.03.02
10. Pavlov A. A. Holovchenko M. N., Drozd V. V. Construction of a multivariate polynomial given by a redundant description in stochastic and deterministic formulations using an active experiment. *Visnyk Nats.*

- tekhn. un-tu "KhPI": zb. nauk. pr. Temat. vyp.: Systemnyy analiz, upravlinnya ta informatsiyni tekhnologiyi [Bulletin of the National Technical University "KhPI": a collection of scientific papers. Thematic issue: System analysis, management and information technology]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2022, no. 1 (7), pp. 3–8. doi: 10.20998/2079-0023.2022.01.01
11. Pavlov A., Holovchenko M., Mukha I., Lishchuk K. Mathematics and software for building nonlinear polynomial regressions using estimates for univariate polynomial regressions coefficients with a given (small) variance. *Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*. 2022, vol. 134, pp. 288–303. doi: 10.1007/978-3-031-04812-8_25
12. Pavlov O. A., Holovchenko M. M., Revych M. M. Metod otsinky koefitsiyentiv pry liniynykh chlenakh bahatovymirnoyi polinomial'noyi rehresiyi, zadanoyi nadlyshkovym opysom. [Method for estimating coefficients for linear terms of multidimensional polynomial regression given by redundant description] *Adaptivni systemy avtomatichnoho upravlinnya: mizhvidomchyy nauk.-tekhn. zbirnyk* [Adaptive systems of automatic control: interdepartmental scientific and technical. collection]. Kyiv, NTUU "KPI" Publ., 2022, vol. 1, no. 40, pp. 110–117. doi: 10.20535/1560-8956.40.2022.261665

Received 26.09.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Павлов Олександр Анатолійович – доктор технічних наук, професор каф. інформатики та програмної інженерії Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»; м. Київ, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6524-6410>; e-mail: pavlov.fiot@gmail.com

Головченко Максим Миколайович – старший викладач каф. інформатики та програмної інженерії Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»; м. Київ, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9575-8046>; e-mail: ma4ete25@ukr.net

Pavlov Alexander Anatolievich – Doctor of Technical Sciences, Full Professor of Informatics and Software Engineering Department of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”; Kyiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6524-6410>; e-mail: pavlov.fiot@gmail.com

Holovchenko Maxim Nikolaevich – Senior Lecturer of Informatics and Software Engineering Department of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”; Kyiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6524-6410>; e-mail: ma4ete25@ukr.net

О. С. КОНЧАКОВСЬКА

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ КВАЗИФУНКЦІЙ ГРІНА – РВАЧОВА У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ОДНІЄЇ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОЇ НАНОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

У роботі розглядається задача чисельного аналізу однієї електростатичної наноелектромеханічної системи. Наноелектромеханічні системи – мініатюрні пристрої, що поєднують електронні та механічні компоненти мікронних та нанорозмірів. Електростатична активація механічних компонентів таких систем є одним із найпоширеніших видів активації та використовується в акселерометрах, перемикачах, мікродзеркалах та мікрорезонаторах тощо. Недоліки таких пристроїв пов'язані з нестабільністю втягування. Цей ефект виникає, коли напруга, прикладена до рухомого електрода, перевищує критичне значення, в результаті чого система втрачає свою нерухому конфігурацію. Для математичного моделювання процесу використано напівлінійне еліптичне рівняння з оператором Лапласа та першою крайовою умовою. Для побудови наближеного розв'язку задачі пропонується використовувати методи нелінійного аналізу в напіввпорядкованих просторах, зокрема, результати В. І. Опоїцева про розв'язність нелінійних операторних рівнянь з гетеротонним оператором. Крайова задача, що моделює наноелектромеханічну систему, зводиться до інтегрального рівняння Урсона за допомогою методу квазіфункцій Гріна – Рвачова, що дозволяє розширити застосування методу двобічних наближень для областей досить довільної геометрії. У статті обґрунтовано можливість побудови двосторонніх наближень до додатного розв'язку задачі, а саме: наведено обчислювальну схему, отримано умови її збіжності до єдиного додатного розв'язку розглядуваної задачі, а також отримано оцінку похибки. Метод проілюстровано обчислювальними експериментами для задачі, що розглядається у прямокутній області. Результати обчислювальних експериментів представлені у вигляді числової та графічної інформації.

Ключові слова: метод двобічних наближень, метод квазіфункцій Гріна – Рвачова, додатний розв'язок, теорія нелінійних операторів, рівняння Урсона, напіввпорядкований простір, сильно інваріантний конусний відрізок, гетеротонний оператор, наноелектромеханічна система.

O. S. KONCHAKOVSKA

USING THE GREEN – RVACHEV'S QUASIFUNCTIONS METHOD IN THE NUMERICAL ANALYSIS OF ONE ELECTROSTATIC NANOELECTROMECHANICAL SYSTEM

The problem of numerical analysis of one electrostatic nanoelectromechanical system is considered in the article. Nanoelectromechanical systems are miniature devices that combine electronic and mechanical components of micro and nano sizes. Electrostatic actuation of the mechanical components of such systems is one of the most common types of actuation and that used in accelerometers, switches, micro-mirrors, micro-resonators, etc. The disadvantages of such devices are related to the pull-in instability. This effect occurs when the voltage applied to the moving electrode exceeds a critical value, causing the system to lose its stationary configuration. A semi-linear elliptic equation with the Laplace operator and the first boundary condition was used for mathematical modeling of the process. To construct an approximate solution of the problem, it is suggested to use the methods of nonlinear analysis in semi-ordered spaces, in particular, the results of V. I. Opoitsev on the solvability of nonlinear operator equations with a heterotone operator. The boundary value problem modeling the nanoelectromechanical system is reduced to the integral Urysohn's equation using the Green – Rvachev's quasi-function method, which allows us to expand the application of the two-sided approximation method for domains of fairly arbitrary geometry. The article substantiates the possibility of constructing two-sided approximations to a positive solution of the problem, namely: a computational scheme is given, conditions for its convergence to a single positive solution of the problem under consideration are obtained, and an error estimate is obtained. The method is illustrated by computational experiments for a problem considered in a rectangular domain. The results of computational experiments are presented in the form of numerical and graphical information.

Keywords: method of two-sided approximations, Green – Rvachev's quasi-function method, positive solution, theory of nonlinear operators, Urysohn's equation, semi-ordered space, strongly invariant cone segment, heterotone operator, nanoelectromechanical system.

Вступ. Стрімкий розвиток мікросистемної техніки створив передумови для розширення функціональності пристроїв при мінімізації їх енергоспоживання та розміру. Такі пристрої знаходять широке використання в медицині, авіаційній техніці, автомобілебудуванні, робототехніці, системах зв'язку тощо. Для дослідження електростатичних, механічних, магнітних, оптичних чи інших властивостей таких систем застосовують різноманітні методи математичного моделювання [1].

Для найбільш точних та складних моделей основними методами знаходження розв'язку є чисельні методи, які дають ітераційну послідовність, що має двобічну збіжність до шуканого розв'язку. Ці методи дають змогу апостеріорно оцінювати похибку наближеного розв'язку на кожному кроці ітераційного процесу. Для дослідження крайової задачі, що моделює

електростатичну мікроелектромеханічну систему двобічні методи були застосовані у роботах [2–6]. Дана робота продовжує розпочаті в них дослідження.

Постановка задачі. Основним елементом електростатичних електромеханічних систем є пристрій, що складається із закріпленої вздовж межі еластичної діелектричної мембрани, що розташована над жорсткою нееластичною пластиною, яка добре проводить струм. При цьому поверхня мембрани покрита тонкою металевою плівкою. Внаслідок подачі напруги на плівку мембрана відхиляється до пластини і може відбутися злипання електродів. Зворотний процес називається стійким станом системи. Схема роботи найпростішої електростатичної електромеханічної системи зображена на рис. 1.

Мініатюризація пристроїв призводить до необхідності урахування крім сили Кулона ще й сили

© О. С. Кончаковська, 2022



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом *НТУ «ХПІ»* у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХПІ» Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Common Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



Казимира. Ця сила описує взаємодію прилеглих незаряджених поверхонь з різних матеріалів (металів, діелектриків або напівпровідників). Наявність сили Казимира значно обмежують мініатюризацію електростатичних пристроїв, оскільки за певного критичного розміру нестабільність відхилення, що виникає при нульовій напрузі, може призвести до руйнування приладу в процесі виготовлення [7, 8].

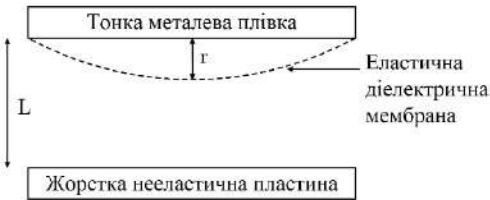


Рис. 1. Схема роботи найпростішої електростатичної електромеханічної системи

Математичною моделлю описаного процесу є наступна крайова задача [7, 8]:

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u)^2} + \frac{\mu g(\mathbf{x})}{(1-u)^4} + P(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (3)$$

де Ω – плоска область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$;

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2);$$

u – величина прогину мембрани;

$P(\mathbf{x})$ – зовнішній тиск;

$f(\mathbf{x})$ та $g(\mathbf{x})$ – функції, що описують діелектричні властивості мембрани;

λ та μ – параметри, що характеризують сили Кулона та Казимира відповідно;

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 V^2 L^2}{2\sigma_0 h g_0^3}, \quad \mu = \frac{\eta c \pi^2 L^2}{240\sigma_0 h g_0^5},$$

σ_0 – напруга у мембрані;

g_0 – відстань між двома електродами за відсутності деформації мембрани;

h – товщина деформованої мембрани;

ε_0 – вакуумна діелектрична стала;

L – довжина мембрани;

V – прикладена напруга;

η – стала Планка;

c – швидкість світла у вакуумі.

За своїм фізичним сенсом функції $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ і $P(\mathbf{x})$ є неперервними і невід'ємними при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

Нехай $G(\mathbf{x}, s)$ – функція Гріна задачі (1)–(3). Тоді розглядувана задача еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-u(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-u(s))^4} + P(s) \right] ds, \quad (4)$$

де $s = (s_1, s_2)$.

Практична реалізація методу двобічних наближень на основі рівняння (4) стикається з певними труднощами, бо в скінченному вигляді функцію Гріна (навіть за умови її існування) можна побудувати лише для областей доволі простої, класичної, геометрії. Альтернативою є використання квазіфункції Гріна – Рвачова, за допомогою якої теж можна побудувати еквівалентне задачі (1)–(3) нелінійне інтегральне рівняння. Квазіфункція Гріна – Рвачова будується з використанням конструктивного апарату теорії R-функцій та може бути побудована в явному вигляді для областей досить довільної геометрії [2, 9].

Отже, актуальною є розробка нових та вдосконалення існуючих двобічних ітераційних методів. Відповідно до цього метою даної роботи є розробка для розв'язання задачі (1)–(3) ітераційного методу з двобічним характером збіжності, заснованому на використанні квазіфункції Гріна – Рвачова.

Метод дослідження. Нехай межа області $\partial\Omega$ складається зі скінченної кількості кусків ліній $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, де кожна $\sigma_i(\mathbf{x})$ – елементарна функція. Тоді за допомогою методу R-функцій [9] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію $\omega(\mathbf{x})$, що описує геометрію області Ω , тобто:

- $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω ;
- $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$;
- $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$ на $\partial\Omega$.

Також функція $\omega(\mathbf{x})$ може мати певні властивості диференційовності, завдяки використанню різних достатньо повних систем R-функцій [9].

Означення. Квазіфункцією Гріна – Рвачова першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ у \mathbb{R}^2 назвемо функцію

$$Q(\mathbf{x}, s) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(s)}{r^2}}, \quad (5)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$;

$s = (s_1, s_2)$;

$$r = |\mathbf{x} - s| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2};$$

$\omega(\mathbf{x})$ – функція, що описує геометрію області Ω .

Зауважимо [12], що для випадку, коли Ω – круг радіуса R у \mathbb{R}^2 , а $\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2R}(R^2 - x_1^2 - x_2^2)$, квазіфункція Гріна – Рвачова (5) перетворюється на точну функцію Гріна першої крайової задачі для оператора Лапласа, розглядуваної у крузі Ω .

Квазіфункція Гріна – Рвачова (5) має такі властивості [2]:

- $Q(\mathbf{x}, s) = 0$ на $\partial\Omega$;
- є симетричною функцією: $Q(\mathbf{x}, s) = Q(s, \mathbf{x})$;
- має таку ж особливість при $\mathbf{x} = s$, що і класична функція Гріна;

г) додатна в області Ω : $Q(x, s) > 0$, $x, s \in \Omega$, $x \neq s$.

Нехай u – класичний розв’язок задачі (1)–(3), а функція

$$\tilde{g}(x, s) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)}}.$$

Тоді [2] функція $u(x)$ задовольняє інтегральному рівнянню

$$u(x) = \int_{\Omega} K(x, s)u(s)ds + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-u(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-u(s))^4} + P(s) \right] ds, \quad (6)$$

де $K(x, s) = -\Delta_s \tilde{g}(x, s) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \right) \tilde{g}(x, s)$.

Нелінійне інтегральне рівняння (6) можна подати у вигляді рівняння Урисона

$$u(x) = \int_{\Omega} P(x, s, u(s))ds,$$

де

$$P(x, s, u(s)) = K(x, s)u(s) + Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-u(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-u(s))^4} + P(s) \right].$$

Таким чином, якщо задача (1)–(3) має класичний розв’язок, то він задовольняє також рівняння (6). Якщо ж класичного розв’язку задачі не існує, то рівняння (6) можна використати для введення поняття узагальненого розв’язку задачі (1)–(3).

Рівняння (6) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних у $\bar{\Omega}$. Норма у $C(\bar{\Omega})$ вводиться за правилом $\|u\| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$. У просторі $C(\bar{\Omega})$ виділимо конус $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}\}$ невід’ємних функцій. За допомогою конуса \mathcal{K}_+ у просторі $C(\bar{\Omega})$ введемо напівпорядкованість за правилом [10, 11]:

$$\text{для } u, v \in C(\bar{\Omega}) \quad u \leq v, \text{ якщо } v - u \in \mathcal{K}_+,$$

тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(x) \leq v(x) \text{ для всіх } x \in \bar{\Omega}.$$

Конус \mathcal{K}_+ у $C(\bar{\Omega})$ є нормальним (і навіть гострим), тобто з $u \leq v$ випливає, що $\|u\| \leq \|v\|$.

Означення. Розв’язком (узагальненим) крайової задачі (1)–(3) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв’язком інтегрального рівняння (6).

Побудуємо процес двобічних наближень знаходження розв’язку інтегрального рівняння (6) (а отже, і

розв’язку крайової задачі (1)–(3)), використовуючи методи теорії нелінійних операторів у напівпорядкованих просторах [10, 11].

Введемо до розгляду нелінійний оператор T , що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T(u)(x) = \int_{\Omega} P(x, s, u(s))ds. \quad (7)$$

Позначимо

$$K^+(x, s) = \max\{0, K(x, s)\},$$

$$K^-(x, s) = \max\{0, -K(x, s)\}.$$

Тоді $K^+(x, s) \geq 0$, $K^-(x, s) \geq 0$ при $x, s \in \Omega$ ($x \neq s$), причому

$$K(x, s) = K^+(x, s) - K^-(x, s),$$

$$|K(x, s)| = K^+(x, s) + K^-(x, s),$$

і оператор T вигляду (7) набуде вигляду

$$T(u)(x) = \int_{\Omega} K^+(x, s)u(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)u(s)ds + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-u(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-u(s))^4} + P(s) \right] ds. \quad (8)$$

Оскільки функція

$$F(x, u) = \frac{\lambda f(x)}{(1-u(x))^2} + \frac{\mu g(x)}{(1-u(x))^4} + P(x)$$

монотонно зростає за u для всіх $x \in \Omega$, то оператор T вигляду (8) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w)(x) = \int_{\Omega} K^+(x, s)v(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)w(s)ds + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-v(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-v(s))^4} + P(s) \right] ds. \quad (9)$$

Оператори T і \hat{T} є цілком неперервними.

Виділимо у конусі \mathcal{K}_+ сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v^0, w^0 \rangle$ умовами $\hat{T}(v^0, w^0) \geq v^0$, $\hat{T}(w^0, v^0) \leq w^0$, які для оператора \hat{T} , що визначається рівністю (9), набувають вигляду: для всіх $x \in \bar{\Omega}$

$$\int_{\Omega} K^+(x, s)v^0(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)w^0(s)ds + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-v^0(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-v^0(s))^4} + P(s) \right] ds \geq v^0(x), \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} K^+(x, s)w^0(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)v^0(s)ds +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-w^0(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-w^0(s))^4} + P(s) \right] ds \leq \\
 & \leq w^0(x). \tag{11}
 \end{aligned}$$

Далі за наступною схемою: $v^{(0)} = v^0, w^{(0)} = w^0, v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}), w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}), k = 0, 1, 2, \dots$, сформуємо ітераційний процес

$$\begin{aligned}
 v^{(k+1)}(x) &= \int_{\Omega} K^+(x, s)v^{(k)}(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)w^{(k)}(s)ds + \\
 & + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-v^{(k)}(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-v^{(k)}(s))^4} + P(s) \right] ds, \tag{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w^{(k+1)}(x) &= \int_{\Omega} K^+(x, s)w^{(k)}(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)v^{(k)}(s)ds + \\
 & + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-w^{(k)}(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-w^{(k)}(s))^4} + P(s) \right] ds, \tag{13}
 \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(x) = v^0(x), w^{(0)}(x) = w^0(x). \tag{14}$$

Оскільки конусний відрізок $\langle v^0, w^0 \rangle$ є сильно інваріантним для гетеротонного оператора T , для якого оператор \hat{T} є супровідним, то послідовність $\{v^{(k)}(x)\}$ не спадає за конусом \mathcal{K}_+ , а послідовність $\{w^{(k)}(x)\}$ не зростає за конусом \mathcal{K}_+ . Крім того, з нормальності конуса \mathcal{K}_+ і повної неперервності оператора \hat{T} впливає існування границь $v^*(x)$ і $w^*(x)$ цих послідовностей. Тоді справджується ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned}
 & v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq \\
 & \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0.
 \end{aligned}$$

Можливими є два випадки: $v^* < w^*$ і $v^* = w^*$. У другому випадку $u^* := v^* = w^*$ – єдина на конусному відрізку $\langle v^0, w^0 \rangle$ нерухома точка оператора T , а отже, u^* – єдиний на $\langle v^0, w^0 \rangle$ розв’язок крайової задачі (1)–(3).

Функції $v^*(x)$ і $w^*(x)$ є розв’язком системи рівнянь $v = \hat{T}(v, w), w = \hat{T}(w, v)$, яка у розглядуваного випадку має вигляд:

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \int_{\Omega} K^+(x, s)v(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)w(s)ds + \\
 & + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-v(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-v(s))^4} + P(s) \right] ds, \tag{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w(x) &= \int_{\Omega} K^+(x, s)w(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)v(s)ds + \\
 & + \int_{\Omega} Q(x, s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-w(s))^2} + \frac{\mu g(s)}{(1-w(s))^4} + P(s) \right] ds. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Умовою виконання рівності $v^* = w^*$ є те, що система (15), (16) не має на $\langle v^0, w^0 \rangle$ таких розв’язків, що $v \neq w$ [10].

Отже, справджується така теорема.

Теорема 1. Нехай $\langle v^0, w^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (8) з супровідним оператором \hat{T} вигляду (9) і система рівнянь (15), (16) не має на $\langle v^0, w^0 \rangle$ розв’язків таких, що $v \neq w$. Тоді ітераційний процес (12)–(14) збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v^0, w^0 \rangle$ неперервного додатного розв’язку u^* крайової задачі (1)–(3), причому має місце ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned}
 & v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \\
 & \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що ланцюг нерівностей (17) як раз і характеризує ітераційний процес (12)–(14) як метод двобічних наближень.

Умовою, яка забезпечить рівність $v^* = w^*$, є умова існування такого $\gamma \in (0; 1)$, що

$$\|\hat{T}(v, w) - \hat{T}(w, v)\| \leq \gamma \|v - w\| \tag{18}$$

для всіх $v, w \in \langle v^0, w^0 \rangle$ [12].

Нехай $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max_{x \in \bar{\Omega}} w^0(x), M_0 < 1$.

Оскільки при $0 < v, w < M_0$

$$\left| \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{1}{(1-w)^2} \right| \leq \frac{2}{(1-M_0)^3} |v-w|,$$

$$\left| \frac{1}{(1-v)^4} - \frac{1}{(1-w)^4} \right| \leq \frac{4}{(1-M_0)^5} |v-w|,$$

то отримаємо нерівність

$$\begin{aligned}
 & |F(x, v(x)) - F(x, w(x))| \leq \\
 & \leq \left[\frac{2\lambda f(x)}{(1-M_0)^3} + \frac{4\mu g(x)}{(1-M_0)^5} \right] |v(x) - w(x)|.
 \end{aligned}$$

Розглянемо різницю $\hat{T}(v, w)(x) - \hat{T}(w, v)(x)$:

$$\begin{aligned}
 & \hat{T}(w, v)(x) - \hat{T}(v, w)(x) = \\
 & = \int_{\Omega} [K^+(x, s) + K^-(x, s)][w(s) - v(s)]ds + \\
 & + \int_{\Omega} Q(x, s)[F(x, v(x)) - F(x, w(x))]ds.
 \end{aligned}$$

Тоді

$$\|\hat{T}(v, w) - \hat{T}(w, v)\| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |\hat{T}(v, w)(x) - \hat{T}(w, v)(x)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega} [K^+(x, s) + K^-(x, s)][w(s) - v(s)] ds \right| + \\ &+ \max_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega} Q(x, s)[F(s, v(s)) - F(s, w(s))] ds \right| \leq \\ &\leq \left[M_1 + \frac{2\lambda \tilde{M}_f}{(1 - M_0)^3} + \frac{4\mu \tilde{M}_g}{(1 - M_0)^5} \right] \cdot \|v - w\| = \gamma \|v - w\|, \end{aligned}$$

де позначено

$$\begin{aligned} M_1 &= \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} [K^+(x, s) + K^-(x, s)] ds, \\ \tilde{M}_f &= \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} Q(x, s) f(s) ds, \\ \tilde{M}_g &= \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} Q(x, s) g(s) ds, \\ \gamma &= M_1 + \frac{2\lambda \tilde{M}_f}{(1 - M_0)^3} + \frac{4\mu \tilde{M}_g}{(1 - M_0)^5}. \end{aligned}$$

З огляду на нерівність (18), отримаємо

$$\begin{aligned} &\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| = \|\hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}) - T(w^{(k)}, v^{(k)})\| \leq \\ &\leq \gamma \|w^{(k)} - v^{(k)}\| = \gamma \|\hat{T}(v^{(k-1)}, w^{(k-1)}) - T(w^{(k-1)}, v^{(k-1)})\| \leq \\ &\leq \gamma^2 \|w^{(k-1)} - v^{(k-1)}\| \leq \dots \leq \gamma^{k+1} \|w^{(0)} - v^{(0)}\| \leq \gamma^{k+1} M_0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| = 0$, тобто $v^* = w^*$, якщо $\gamma < 1$. Отже, справджується теорема.

Теорема 2. Нехай $\langle v^0, w^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (8) з супровідним оператором \hat{T} вигляду (9) і має місце умова $\gamma < 1$. Тоді ітераційний процес (12) – (14) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v^0, w^0 \rangle$ неперервного додатного розв’язку u^* крайової задачі (1)–(3).

На k -й ітерації за наближений розв’язок крайової задачі (1)–(3) слід взяти функцію

$$u^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}. \quad (19)$$

Тоді для похибки наближеного розв’язку (19) матимемо зручну апостеріорну оцінку:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in \Omega} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)). \quad (20)$$

Наявність оцінки вигляду (20) є безумовною перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in \Omega} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon,$$

тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$.

Крім того, за умов теореми 2 можна вказати і апіорну оцінку похибки:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{x \in \Omega} (w^0(x) - v^0(x)).$$

Тоді з нерівності

$$\frac{\gamma^k}{2} \max_{x \in \Omega} (w^0(x) - v^0(x)) < \varepsilon$$

знаходимо, що для досягнення точності ε треба

$$k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{\max_{x \in \Omega} (w^0(x) - v^0(x))}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\gamma}} \right\rceil + 1 \quad (20)$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

З огляду на крайову умову (2) можна рекомендувати шукати кінці v^0, w^0 сильно інваріантного конусного відрізка $\langle v^0, w^0 \rangle$ у вигляді $v^0(x) = \alpha u_0(x), w^0(x) = \beta u_0(x), 0 < \alpha < \beta$, де

$$u_0(x) = \int_{\Omega} Q(x, s) ds.$$

Результати обчислювального експерименту. Розглянемо задачу (1)–(3) у квадраті Ω зі стороною $\sqrt{\pi}$. У літературі [13] запропоновано при дослідженні електромеханічних систем у прямокутних областях використовувати функції, що описують діелектричні властивості мембрани у вигляді

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{\delta}{2}} |x - x^0|,$$

$$f(x) = \exp \left(\delta \left(\frac{2|x - x^0|^2}{\pi} - 1 \right) \right),$$

де $x^0 = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}; \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right),$

$$|x - x^0| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}.$$

Нехай $P = 0,25, \lambda = 0,1, \mu = 0,1$, а функції обра- но наступному вигляді при $\delta = 3$:

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\left(x_1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2 + \left(x_2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2},$$

$$g(x) = \exp \left(\delta \left(\frac{2 \left(\left(x_1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2 + \left(x_2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2 \right)}{\pi} - 1 \right) \right).$$

Тоді квазіфункція Гріна – Рвачова $Q(x, s)$ задачі (1)–(3) у прямокутній області Ω визначається формулою (5), де функція $\omega(x) = \omega(x_1, x_2)$ має вигляд

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{(\sqrt{\pi} - x_1)x_1}{\sqrt{\pi}} + \frac{(\sqrt{\pi} - x_2)x_2}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{\pi} - x_1)^2 x_1^2}{\pi} + \frac{(\sqrt{\pi} - x_2)^2 x_2^2}{\pi}}.$$

Кінці сильно інваріантного конусного відрізка шукатимемо у вигляді $v^0(x) = \alpha u_0(x)$, $w^0(x) = \beta u_0(x)$, де $0 < \alpha < \beta$, $u_0(x) = \int_{\Omega} Q(x, s) ds$.

Було підібрано, що ці функції задовольняють умови (10)–(11), якщо $\alpha = 0,2$, $\beta = 1,3$. Тоді знаходимо, що $M_0 = 0,1672$, $M_1 = 0,7082$, $\tilde{M}_f = 0,0269$, $\tilde{M}_g = 0,0108$ і $\gamma = 0,7283$. Оскільки, $\gamma < 1$ згідно теореми 2 послідовні наближення, що формуються за схемою (12)–(14) двобічно збігаються до розв'язку задачі (1)–(3), розглядуваної в квадраті Ω .

Оскільки

$$\max_{x \in \Omega} (w^{(9)}(x) - v^{(9)}(x)) = 0,13 \cdot 10^{-3},$$

то з точністю $0,65 \cdot 10^{-4}$ отримаємо

$$u^*(x) \approx u^{(9)}(x) = \frac{w^{(9)}(x) + v^{(9)}(x)}{2}.$$

В цьому випадку $\|u^{(9)}\| = 0,0643$. Двобічний характер збіжності послідовних наближень проілюстровано рис. 2, де представлені графіки верхніх (суцільна лінія) та нижніх (пунктирна лінія) наближень до розв'язку задачі при $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(9)}(x)$ зображені на рис. 3 та 4 відповідно.

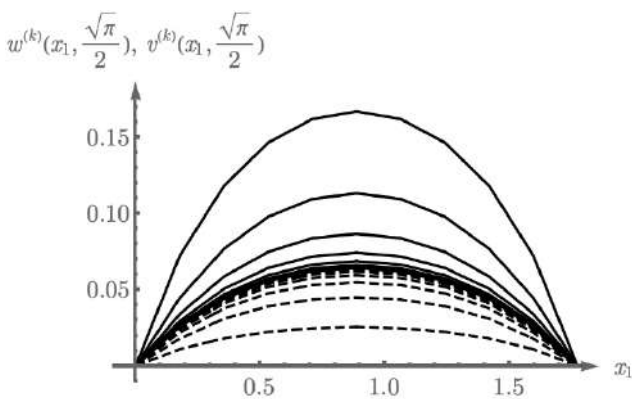


Рис. 2. Графіки верхніх та нижніх наближень до розв'язку задачі у перерізі $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

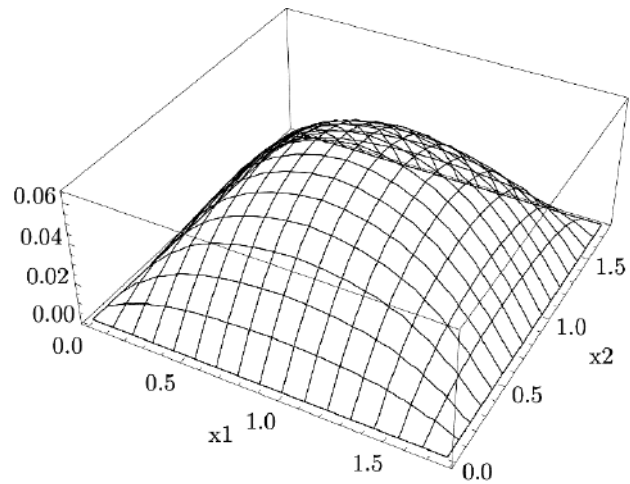


Рис. 3. Графік поверхні наближеного розв'язку

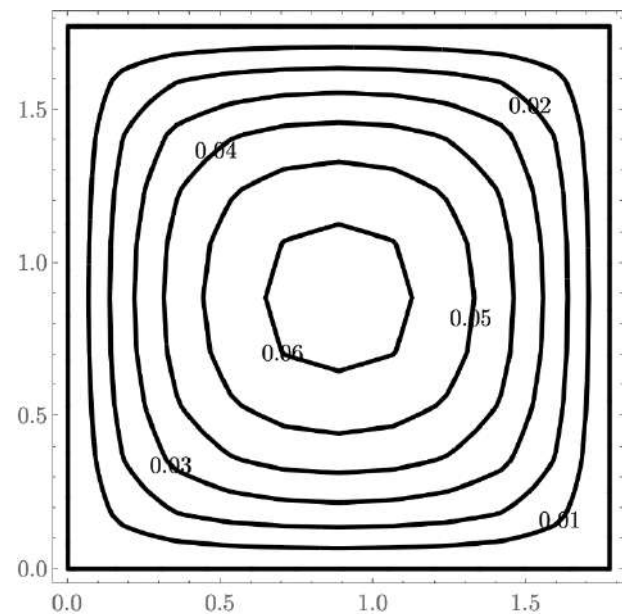


Рис. 4. Графік ліній рівня наближеного розв'язку

Висновки. У роботі вперше обґрунтовано можливість побудови двобічних наближень (на основі використання квазіфункції Гріна – Рвачова) до розв'язку першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння, що виникає при моделюванні електростатичних наноелектромеханічних систем. Застосування методу послідовних наближень з двобічним характером збіжності до розв'язку задачі дозволяє побудувати зручний обчислювальний алгоритм з апостеріорною оцінкою похибки на кожній ітерації. Ефективність роботи запропонованого методу підтверджено низкою обчислювальних експериментів для тестових значень параметрів у прямокутній області. З огляду на це, перспективним є застосування розробленого методу для розрахунку реальних наноелектромеханічних систем.

Список літератури

1. Pelesko J. A., Bernstein D. H. *Modeling MEMS and NEMS*. CRC Press, 2002. 351 p.
2. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of

- nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. Vol. 10, no. 2. P. 360–375.
3. Кончаковская О. С., Сидоров М. В. Численный анализ одного нелинейного эллиптического уравнения, возникающего при моделировании микроэлектромеханических систем. *Радиоэлектроника и информатика*. 2016. Т. 73, № 2. С. 23–28.
 4. Кончаковская О. С., Сидоров М. В. Применение методов нелинейного анализа в математическом моделировании микроэлектромеханических систем. *Бионика интеллекта*. 2017. Т. 88, № 1. С. 60–64.
 5. Кончаковська О. С., Сидоров М. В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи. *Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2018. Вип. 39. С. 33–41.
 6. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*. 2020. Vol. 14, no. 3–4. P. 17–26.
 7. Lai B. On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices with effects of Casimir force. *In Annales Henri Poincaré*. 2015. Vol. 16, no. 1. Art. No. 239253.
 8. Batra R. C., Porfiri M., Spinello D. Effects of Casimir force on pull-in instability in micromembranes. *EPL (Europhysics Letters)*. 2007. Vol. 77, no. 2. Art. no. 20010.
 9. Рвачев В. Л. *Теория R-функций и некоторые её приложения*. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.
 10. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. *Нелинейные операторы в пространствах с конусом*. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
 11. Красносельский М. А. *Положительные решения операторных уравнений*. Москва: Физматгиз, 1962. 394 с.
 12. Guo D., Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1987. Vol. 11, no. 5. P. 623–632.
 13. Esposito P., Ghossoub N., Guo Y. Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS. *Courant lecture notes in mathematics*. Vol. 20. American Mathematical Soc., 2010. 318 p.
 3. Konchakovskaya O. S., Sidorov M. V. Chislennyj analiz odnogo nelinejnogo ellipticheskogo uravneniya, vznikayushchego pri modelirovanii mikroelektromekhanicheskikh sistem [Numerical analysis of one nonlinear elliptic equation that modelling microelectromechanical system]. *Radioelektronika i informatika* [Radioelectronics & Informatics]. 2016, vol. 73, no. 2, pp. 23–28.
 4. Konchakovskaya O. S., Sidorov M. V. Primenenie metodov nelinejnogo analiza v matematicheskom modelirovanii mikroelektromekhanicheskikh sistem [Mathematical modeling of microelectromechanical systems using methods of nonlinear analysis]. *Bionika intellekta* [Bionics of Intelligence]. 2017, vol. 88, no. 1, pp. 60–64.
 5. Konchakovska O. S., Sidorov M. V. Metod dvobichnih nablizhen' u chisel'nomu analizu odniei mikroelektromekhanichnoi sistemi [The two-sided method in numerical analysis of one microelectromechanical system]. *Visnik HNU im. V.N. Karazina. Ser. Matematichne modelyuvannya. Informacijni tekhnologii. Avtomatizovani sistemi upravlinnya* [Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems»]. 2018, vol. 39, pp. 33–41.
 6. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*. 2020, vol. 14, no. 3–4, pp. 17–26.
 7. Lai B. On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices with effects of Casimir force. *In Annales Henri Poincaré*. 2015, vol. 16, no. 1, art. no. 239253.
 8. Batra R. C., Porfiri M., Spinello D. Effects of Casimir force on pull-in instability in micromembranes. *EPL (Europhysics Letters)*. 2007, vol. 77, no. 2, art. no. 20010.
 9. Rvachev V. L. *Teoriya R-funkcij i nekotorye eyo prilozheniya* [Theory of R-functions and its Some Applications]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1982. 552 p.
 10. Opojcev V. I., Hurudze T. A. *Nelinejnye operatory v prostranstvah s konusom* [Nonlinear Operators in Spaces with a Cone]. Tbilisi: Izd-vo Tbilis. un-ta Publ., 1984. 246 p.
 11. Krasnosel'skij M. A. *Polozhitel'nye resheniya operatornyh uravnenij* [Positive Solutions of Operator Equations]. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1962. 394 p.
 12. Guo D., Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1987, vol. 11, no. 5, pp. 623–632.
 13. Esposito P., Ghossoub N., Guo Y. Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS. *Courant lecture notes in mathematics*. Vol. 20. American Mathematical Soc. 2010. 318 p.

References (transliterated)

1. Pelesko J. A., Bernstein D. H. *Modeling MEMS and NEMS*. CRC Press, 2002. 351 p.
2. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018, vol. 10, no. 2, pp. 360–375.

Надійшла (received) 15.10.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Кончаковська Оксана Сергіївна – Харківський національний університет радіоелектроніки, аспірант кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0836-6045>; e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua

Konchakovska Oksana Serhiivna – Kharkiv National University of Radio Electronics, postgraduate student of the Department of Applied Mathematics; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0836-6045>; e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua

В. В. МОСКАЛЕНКО, А. Р. САНТАЛОВА, Н. Г. ФОНТА

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ВАРТОСТІ АКЦІЙ КОМПАНІЙ У НЕСТАБІЛЬНІЙ ЕКОНОМІЦІ

Дані дослідження присвячені аналізу і вибору нейронних мереж різної архітектури та гібридних моделей, до яких включені нейронні мережі, для прогнозування ринкової вартості акцій на фондовому ринку країни, яка перебуває у процесі нестабільного розвитку. Аналіз та прогнозування таких фондових ринків не може бути проведено з використанням класичних методів. Актуальність теми дослідження зумовлена необхідністю розробки програмних систем, які реалізують алгоритмічне забезпечення прогнозування ринкової вартості акцій в Україні. Впровадження таких програмних систем до контуру прийняття інвестиційних рішень у компаніях, які зацікавлені у підвищенні інформаційної прозорості фондового ринку України, дасть можливість покращити прогнози щодо ринкової вартості акцій. Це у свою чергу сприятиме покращенню інвестиційного клімату та забезпечить зростання інвестування в українську економіку. Проведено аналіз результатів існуючих досліджень щодо використання нейронних мереж та інших методів обчислювального інтелекту для моделювання поведінки учасників фондового ринку та прогнозування ринку. У статті надано результати дослідження щодо використання нейронних мереж різної архітектури для прогнозування ринкової вартості акцій на фондових ринках України. Для прогнозування було обрано чотири акції Української фондової біржі: Центренерго (CEEN); Укртелеком (UTLM); Крюківський Вагонобудівний Завод ПАТ (KVBZ); Райффайзен Банк Аваль (BAVL). Для експериментального дослідження були обрані такі моделі: довга короткострокова пам'ять LSTM; згортовка нейронна мережа CNN; гібридна модель, яка поєднує дві нейронні мережі CNN і LSTM; гібридна модель, що складається з алгоритму декомпозиції варіаційного режиму та нейронної мережі довгострокової пам'яті (VMD-LSTM); гібридна модель VMD-CNN-LSTM глибокого навчання на основі варіаційного режиму (VMD) та двох нейронних мереж. Розраховано оцінки якості прогнозу за різними метриками. Зроблено висновок, що використання гібридної моделі VMD-CNN-LSTM дає мінімальну помилку прогнозування ринкової вартості акцій українських підприємств. Також доцільно використовувати модель VMD-LSTM для прогнозування на біржах країн з нестабільною економікою.

Ключові слова: прогнозування, інвестиції, нейронна мережа, довготривала пам'ять, згортовка нейронна мережа, гібридна модель, варіаційна декомпозиція, глибоке навчання.

V. V. MOSKALENKO, A. R. SANTALOVA, N. G. FONTA

STUDY OF NEURAL NETWORKS FOR FORECASTING THE VALUE OF COMPANY SHARES IN AN UNSTABLE ECONOMY

These studies deal with analysis and selection of neural networks with various architectures and hybrid models, which include neural networks, to predict the market value of shares in the stock market of a country that is in the process of unstable development. Analysis and forecasting of such stock markets cannot be carried out using classical methods. The relevance of the research topic is due to the need to develop software systems that implement algorithmic support for predicting the market value of shares in Ukraine. The introduction of such software systems in the circuit of investment decision-making in companies that are interested in increasing the information transparency of the Ukrainian stock market will improve the forecasts of the market value of shares. This, in turn, will help improve the investment climate and ensure the growth of investment in the Ukrainian economy. The analysis of the results of existing studies on the use of neural networks and other methods of computational intelligence for modeling the behavior of stock market participants and market forecasting has been carried out. The article presents the results of a study for the using of neural networks with various architectures for predicting the market value of shares in the stock markets of Ukraine. Four shares of the Ukrainian Stock Exchange were chosen for forecasting: Centrenergo (CEEN); Ukrtelecom (UTLM); Kriukivskiy Vahonobudivnyi Zavod PAT (KVBZ); Raiffeisen Bank Aval (BAVL). The following models were chosen for the experimental study: long short-term memory LSTM; convolutional neural network CNN; a hybrid model combining two neural networks CNN and LSTM; a hybrid model consisting of a variational mode decomposition algorithm and a long-term memory neural network (VMD-LSTM); hybrid VMD-CNN-LSTM deep learning model based on variational mode (VMD) and two neural networks. Estimates of forecast quality based on various metrics were calculated. It is concluded that the use of the hybrid model VMD-CNN-LSTM gives the minimum error in predicting the market value of the shares of Ukrainian enterprises. It is also advisable to use the VMD-LSTM model to predict the stock exchanges of countries with an unstable economy.

Keywords: forecasting, investment, neural network, long-term memory, convolutional neural network, hybrid model, variational decomposition, deep learning.

Вступ. Важливою умовою стабільного розвитку будь-якої національної економіки є фондовий ринок. Наявність розвинутого фондового ринку надає корпораціям великі можливості для залучення акціонерного капіталу та створює умови для їх подальшого розвитку. Можливість передбачити рух фондового ринку є одним із факторів збільшення інвестицій. Інвестори починають використовувати акції як засіб отримання контролю над компанією, для збереження заощаджень та отримання інвестиційного доходу. Оскільки на функціонування фондового ринку впливає багато факторів, то учасникам ринку необхідно для ефективної роботи використовувати різні методи прогнозування ринкової

вартості цінних паперів та інших показників [1]. Основна ідея успішного прогнозу фондового ринку полягає у тому, щоб отримати швидко результати з найменшою помилкою, використовуючи вхідні дані, які постійно змінюються за важко визначеною тенденцією. Статистичні методи прогнозування дозволяють отримати прогнози для більш-менш стабільних ринків. Але в умовах нерівномірного зростання або спаду ринку, його функціонування за умов нестабільності національної економіки такі методи не дають адекватних прогнозів, тому необхідно використовувати нові підходи до прогнозування [2]. В останні десятиліття дуже активно почали розвиватися методи прогнозування з

© В. В. Москаленко, А. Р. Санталова, Н. Г. Фонта, 2022



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом *НТУ «ХПІ»* у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Common Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



використанням штучних нейронних мереж (ШНМ), генетичних алгоритмів тощо [3]. Отже, пропонується для прогнозування вартості акцій у країнах, де фондові ринки перебувають у стадії становлення та розвитку, наприклад, в Україні, використовувати ШНМ та гібридні моделі, до складу яких включені нейронні мережі [3]

Постановка та мета задачі дослідження. Актуальність дослідження нейронних мереж для прогнозування вартості акцій компаній України обумовлена тим, що існуючі результати попередніх досліджень стосуються прогнозів на фондових ринках стабільних економік. Для того щоб використовувати вже існуючі методи прогнозування для фондових ринків країн, які перебувають у стадії становлення та розвитку, потрібно провести дослідження щодо особливостей та доцільності їх використання. При прогнозуванні вартості акцій на фондових ринках, які функціонують в умовах нестабільної економіки, тобто за умов постійних змін трендів статистичних даних, виникають дві основні задачі:

1. Задача отримання прийнятного рівня точності прогнозування. При використанні класичних статистичних методів прогнозування для ринків з слабо моделюваною динамікою виникає ризик неотримання прийнятного рівня точності прогнозів.

2. Обґрунтування та вибір методу прогнозування ринкової вартості акцій компаній, які функціонують в у нестабільній економіці. Наприклад, статистичні методи прогнозування, які засновані на аналізі часових рядів такими як ARIMA дозволяють отримати прогнози для стабільних ринків. Для нестабільних динамічних статистик використовують ШНМ, наприклад, мережа з довгою короткочасною пам'яттю (Long Short-Term Memory – LSTM) та згорткові нейронні мережі (CNN). Статистичні методи та нейронні мережі зазвичай використовуються для прогнозування часових рядів.

Отже, метою дослідження є вибір ШНМ для прогнозування ринкової вартості акцій на фондових ринках країн, які перебувають у процесі становлення та розвитку. У якості прикладу було взято акції, які представлені на Українській фондовій біржі.

Аналіз попередніх досліджень. Проведено аналіз використання ШНМ для прогнозування показників фінансового ринку у різних національних економіках. У роботі [3] надано огляд 148 досліджень із використанням нейронних і гібридних нейротехнічних методів для прогнозування фондових ринків у відносно стабільних умовах. Висновки підкреслюють, що методи штучного інтелекту можна успішно використовувати для вивчення та аналізу діяльності фондового ринку. Розглянемо детальніше деякі з цих методів.

У дослідженні [4] прогнозування фондового індексу здійснено за моделлю ATT-LSTM, яка заснована на механізмі уваги ATT та нейронної мережі LSTM. Вхідними характеристиками моделі є ціна закриття, ціна відкриття, максимальна ціна, мінімальна ціна, зростання/падіння ціни та обсяг торгів фондового індексу, а вихідними є прогнозована ціна закриття

наступного торгового дня. Кількість нейронів у вхідному і вихідному шарах становить 6 і 1 відповідно. Додано вхідні характеристики моделі: коефіцієнт оборотності окремих акцій, коефіцієнт обсягу, співвідношення ціни та прибутку, співвідношення ціни до балансу, ціна до коефіцієнт продажів і загальна ринкова вартість. Кількість нейронів у вхідному шарі та вихідному шарі становить 12 і 1 відповідно. При дослідженні фондового індексу та окремих акцій кількість нейронів у прихованому шарі становить 128. Результати моделювання та експерименту показують, що впровадження механізму уваги може призвести до меншої похибки прогнозу. Надано модель прогнозування ціни акцій у роботі [5]. Тут розглянуто, коли ціна перевищує ринковий індекс. На основі ШНМ із використанням глибокого навчання проведено аналіз та прогнозування високоволатильних моделей цін на акції. У дослідженні [6] запропоновано аналіз великих даних для прогнозу щоденної прибутковості SPDR S&P 500 ETF (тикер: SPY). Використано гібридні алгоритми машинного навчання для прогнозування 60 фінансових та економічних характеристик. Глибокі нейронні мережі DNN (deep neural network) і традиційні штучні нейронні мережі розгортаються на попередньо обробленому та нетрансформованому наборі даних. Також для передбачення щоденного напрямку змін майбутніх доходів фондового ринку використано два набори даних, які трансформовані за допомогою аналізу головних компонентів (PCA). Продемонстровано шаблон для точності класифікації DNN. Проведено експеримент щодо поступового збільшення прихованих шарів від 12 до 1000. Результати моделювання показують, що торгові стратегії, які керуються DNN на основі даних, представлених за PCA, працюють краще.

Метод прогнозування з використанням технології глибокого навчання, який об'єднує традиційні змінні фондового фінансового індексу та текстові функції соціальних мереж як вхідні дані моделі прогнозування, пропонується у дослідженні [7]. У цьому дослідженні використовується Doc2Vec для створення довгих текстових векторів ознак із соціальних медіа, а потім зменшує розміри векторів текстових функцій за допомогою стекового автоматичного кодувальника, щоб збалансувати розміри між змінними текстових функцій і змінними фондового фінансового індексу. На основі вейвлет-перетворення дані часових рядів ціни акцій розкладаються, щоб усунути випадковий шум, спричинений коливаннями фондового ринку. Це дослідження використовує модель довготривалої короткочасної пам'яті для прогнозування курсу акцій. У статті [8] використовується напівапараметричний метод, відомий як дерева прискореної регресії (BRT), для прогнозування прибутковості акцій і місячної волатильності. Результати показують, що розширення набору умовної інформації призводить до більшої точності позабіржового прогнозування порівняно зі стандартними моделями.

У статті [9] пропонується метод глибокого навчання на основі згорткової нейронної мережі для прогнозування руху курсів акцій на китайському

фондовому ринку. Ціна відкриття, максимальна ціна, мінімальна ціна, ціна закриття та обсяг акцій, отриманих з Інтернету, встановлюються як вхідні дані для побудови мережевої архітектури. Результати показали, що використання методу глибокого навчання на основі згорткової нейронної мережі для прогнозування руху цін на акції в Китаї є досить надійним.

Методика створення моделей прогнозування ринку з використанням мультіагентних і нечітких систем представлена в [10]. Агенти в системі представляють трейдерів, які виконують замовлення на купівлю та продаж на ринку. Нечіткі системи використовуються для моделювання правил, яких дотримуються трейдери для здійснення операції на реальному ринку, а нечітка логіка – для моделювання невизначеності їх рішень (інтуїція трейдерів). Експерименти показали, що така модель може бути застосована, але при певних умовах.

Модель довгострокової короткочасної пам'яті (LSTM) у глибокому навчанні (DL) і модель авторегресійного інтегрованого ковзного середнього (ARIMA) вибрано для прогнозування індексу Шанхайської фондової біржі 50 Index у роботі [11]. Результати дослідження пояснюють, що середньоквадратична помилка (RMSE) моделі LSTM нижча, а модель, заснована на методі DL, має сильнішу здатність прогнозувати індекс цін на акції, ніж традиційна модель прогнозування акцій у зростаючій економіці.

Отже, емпіричні результати показали, що ШНМ перевершують лінійну регресію, особливо у випадку більш складної поведінки залежних змінних, наприклад нелінійної, динамічної та хаотичної поведінки гравців ринку. Нейронні мережі є надійними для моделювання нелінійних динамічних ринкових прогнозів. ШНМ робить дуже мало припущень на відміну від припущень про нормальність вибірки, які зазвичай зустрічаються в статистичних методах. Нейронна мережа може виконувати прогнозування після вивчення основного зв'язку між вхідними змінними та виходами. З точки зору статистики, нейронні мережі є аналогом непараметричних, нелінійних регресійних моделей [12].

Дослідження щодо використання ШНМ різної архітектури для прогнозування. Для задачі прогнозування ринкової вартості акцій на фондових ринках країн, які знаходяться в процесі становлення та нестабільного розвитку було обрано такі нейронні мережі: LSTM; CNN; гібридна модель, яка поєднує дві ШНМ CNN і LSTM; гібридна модель, що складається з алгоритму декомпозиції варіаційного режиму та нейронної мережі довгострокової пам'яті (VMD-LSTM); гібридна модель VMD-CNN-LSTM.

У роботі [2] надано результати щодо прогнозів ринкової вартості акцій Української фондової біржі: Центренерго (CEEN); Укртелеком (UTLM); Крюківський Вагонобудівний Завод ПАТ (KVBZ); Райффайзен Банк Аваль (BAVL). У цій роботі наведемо результати формування даних, вибору структури ШНМ та гібридних моделей.

Моделі довгої короткострокової пам'яті (LSTM) найчастіше використовують для аналізу часових рядів та побудови прогнозів. Вони можуть робити прогнози на довільну кількість кроків. Типова мережа LSTM складається з блоків пам'яті, які називаються коміркою. Комірка LSTM зображена на рис. 1 [13]. Модуль (комірка) LSTM має п'ять основних компонентів. За допомогою цих компонент здійснюється моделювання довгострокових та короткострокових даних. У комірку передаються два стани: стан комірки та прихований стан. Стан комірки – це основний ланцюг потоку даних, який дозволяє даним протікати без змін. Однак можливі деякі лінійні перетворення. Дані можна додавати або видаляти зі стану комірки через сигмоподібний гейт (ворота). Гейти подібні до шару або серії матричних операцій, які містять різні індивідуальні ваги.

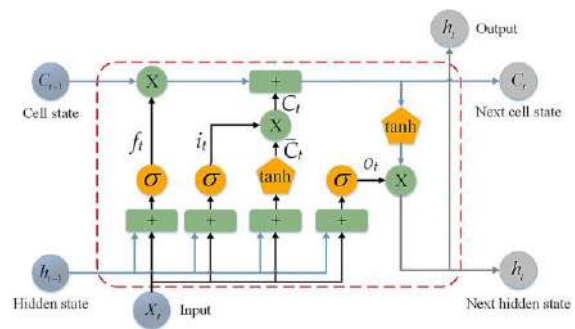


Рис. 1. Комірка LSTM

LSTM розроблено, щоб уникнути проблеми довгострокової залежності, оскільки мережа використовує гейт для керування процесом запам'ятовування. Першим кроком у побудові мережі LSTM є ідентифікація інформації, яка не потрібна та яка буде пропущена з комірки на цьому кроці [14]. Цей процес ідентифікації та виключення даних визначається сигмоїдною функцією σ , яка приймає вихід останнього блоку LSTM (h_{t-1}) і момент часу $t-1$ та поточний вхід (X_t) у момент часу t . Сигмоїдна функція також визначає, яку частину з попереднього результату слід усунути. Ці гейти називаються гейтами забуття та позначаються як f_t :

$$f_t = s(W_f[h_{t-1}, X_t] + b_f),$$

де f_t – гейт забуття, який визначає, скільки інформації з поточного вводу та попереднього стану комірки перетікає у поточний стан комірки; це вектор зі значеннями у діапазоні від 0 до 1, що відповідає кожному числу в стані комірки C_{t-1} ; W_f та b_f – вагова матриця та зміщення, відповідно, гейта забуття.

Наступним кроком є прийняття рішення та збереження інформації з нового входу (X_t) у стан комірки, а також оновлення стану комірки. Цей крок містить два рівні: сигмоподібний шар і другий шар \tanh . Сигмоподібний рівень вирішує, чи слід оновлювати нову інформацію чи ігнорувати (0 або 1), а подруге, функція \tanh надає вагу значенням, які пройшли

повз, вирішуючи рівень їх важливості (від -1 до 1). Два значення множаться, щоб оновити новий стан комірки. Ця нова пам'ять потім додається до старої пам'яті C_{t-1} , що призводить до C_t :

$$i_t = \sigma(W_i[h_{t-1}, X_t] + b_i),$$

де i_t – вхідний вентилю, який визначає, скільки інформації надходить від поточного входу до стану комірки;

$$\bar{C}_t = \tanh(W_c[h_{t-1}, X_t] + b_c);$$

$$C_t = C_{t-1}f_t + \bar{C}_ti_t,$$

де W_i , W_c , b_i , b_c – вагові матриці та зсув, відповідно, стану комірки; C_t – стан осередку – внутрішня пам'ять осередку, у якій зберігаються як короткострокова, так і довгострокова пам'ять в момент часу t .

На останньому кроці вихідні значення (h_t) базуються на стані вихідної комірки (O_t) але є відфільтрованою версією. Сигмоподібний шар вирішує, які частини стану комірки потрапляють на вихід. Далі вихідний сигнал сигмоїдного вентиля (O_t) множиться на нові значення, створені шаром \tanh зі стану комірки (C_t) зі значенням у діапазоні від -1 до 1 .

$$O_t = \sigma(W_o[h_{t-1}, X_t] + b_o);$$

$$h_t = O_t \tanh(C_t),$$

де O_t – вихідний вентилю, який визначає, скільки переходить інформації з поточного до прихованого стану для того, щоб при потребі мережа могла вибирати тільки довгострокову пам'ять або короткострокову; h_t – прихований стан, який містить інформацію щодо стану виведення та розраховується щодо поточних вхідних даних і попереднього прихованого стану. Прихований стан може витягти лише короткострокову або довгострокову пам'ять, або обидві пам'яті, які зберігаються у стані комірки для передбачення; W_o і b_o – вагові матриці та зсув, відповідно, вихідного вентиля; \tanh – функція, яка виводить значення от -1 до $+1$ (масштабує значення комірки).

Для визначення оптимальної архітектури ШНМ (кількості прихованих шарів типу LSTM) для прогнозування ринкової вартості акції було реалізовано 5 різних варіантів, а саме: 2, 3, 4, 5 та 6 прихованих шарів. На рис. 2 представлено зниження точності прогнозів за метрикою MSE. Оскільки, мінімальне та найбільш стійке зниження значення помилки від епохи до епохи демонструє LSTM із двома прихованими шарами, тому використано саме таку архітектуру. Як базова кількість нейронів в одному шарі було взято 50 штук. Збільшення кількості юнітів у кожному шарі до 256 дозволило досягти значного приросту якості моделі (з 0.009235 до 0.005375 для двошарової мережі). Проте подальше збільшення кількості нейронів не вплинуло на показники якості прогнозу. Отже, при подальших експериментах було використано шари LSTM з 256 юнітами.

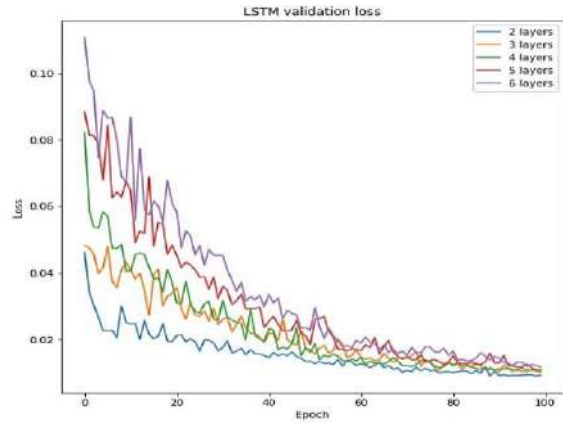


Рис. 2. Порівняння якості прогнозів LSTM з різною кількістю прихованих шарів (2, 3, 4, 5 та 6)

Згорткова нейронна мережа CNN включає шари фільтрів-згорток і підвибірки з додаванням повнозв'язкових шарів за необхідності. Двовимірність вхідних даних передбачає двовимірність згортки. Необхідно використовувати шари підвибірки зі збереженням країв через невеликий розмір початкової матриці ознак [15]. Реалізована архітектура згорткової нейронної мережі заснована на дослідженнях Ш. Чена (Sheng Chen) and та X. Хе (Hongxiang He). У роботі [16] обґрунтовується максимальна ефективність конфігурації мережі, яка наведена на рис. 3.

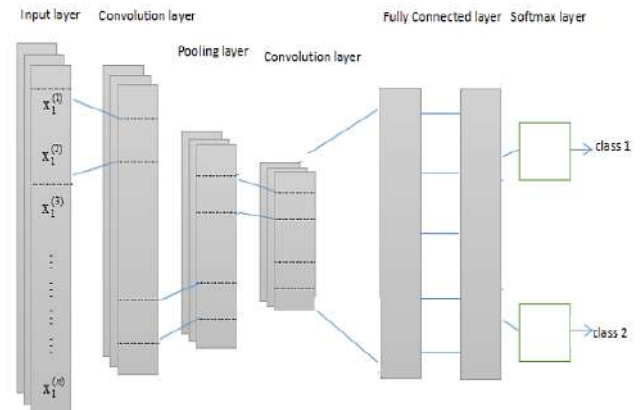


Рис. 3. Архітектура CNN

Модель CNN-LSTM будується послідовно як об'єднання модулів нейромереж CNN і LSTM. Після того, як вихідні дані проходять шари CNN, вони передаються до модуля LSTM. Далі формується чисельний прогноз за допомогою повнозв'язкового шару з одного нейрона. На основі експериментальних досліджень визначається послідовність та параметри шарів усередині модулів. Оскільки у кожній з нейронних мереж існує множина параметрів для оптимізації, вибір ідеальної комбінації їх може зайняти необмежений час. Тому для експериментальної реалізації гібридної моделі CNN-LSTM було обрано архітектуру, яка запропонована у дослідженні [17], оскільки вона має доведену ефективність (рис. 4). Кількість нейронів у LSTM та повнозв'язковому шарі реалізовано виходячи із значень для попередніх моделей – по 256.

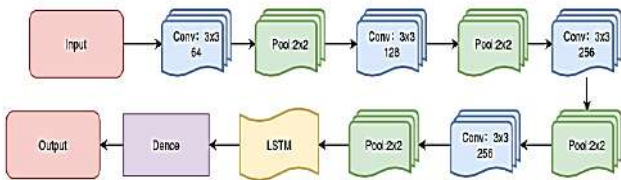


Рис. 4. Архітектура CNN-LSTM

Гібридна модель VMD-LSTM складається з класичного алгоритму машинного навчання та нейронної мережі. У такій моделі Variational Mode Decomposition (VMD) приймається на вхід одновимірний часовий ряд і створює простір ознак подальшої обробки даних мережею LSTM. Оптимальна конфігурація LSTM визначається експериментально. VMD представляє моди як вузькосмугові сигнали з окремими смугами, які стиснуті навколо різних центральних частот. Метод VMD більш стійкий до шуму та помилок вибірки у порівнянні з методами, заснованими на EMD. EMD – це метод розкладання сигналу на набір з нульовим середнім та майже однаковою кількістю компонентів максимумів та мінімумів, він витягує режими рекурсивно, а VMD за допомогою ітеративної процедури робить це одночасно. З точки зору математичної реалізації VMD аналізує K -режими (сигнали), які одночасно здійснюють мінімізацію параметра. Зі збільшенням K збільшується складність задачі оптимізації, що уповільнює збіжність алгоритму. Отже, треба перед запуском алгоритму VMD правильно встановити значення K . Комбінація варіаційної модової декомпозиції (VMD) та LSTM реалізована на основі дослідження [18]. Параметри для модуля VMD-LSTM збігаються з простою LSTM (рис.5).

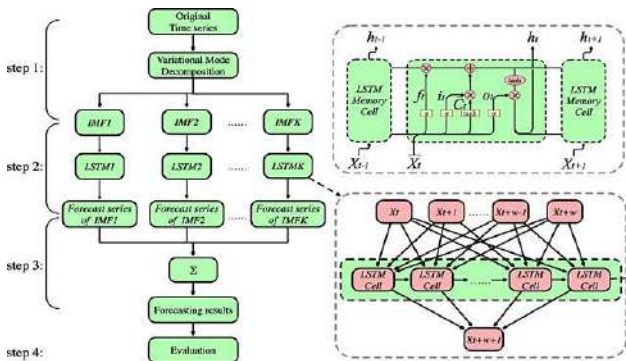


Рис. 5. Архітектура VMD-LSTM

Модель VMD-CNN-LSTM глибокого навчання на основі варіаційного режиму (VMD). VMD використовується для розкладання вихідного часового ряду на кілька підсигналів. Потім застосовується згорточна нейронна мережа (CNN) для вивчення шаблонів реконструкції розкладених підсигналів для отримання кількох реконструйованих підсигналів. Нарешті, мережа довгострокової пам'яті (LSTM) використовується для прогнозування часових рядів із розкладеними підсигналами та реконструйованими підсигналами як входи. Запропонований підхід VMD-CNN-LSTM походить від структури декомпозиції-реконструкції-

ансамбля та інноваційний шляхом вбудовування етапів реконструкції, єдиного прогнозування та ансамблю в уніфікований підхід глибокого навчання. Блок-схема реалізації моделі VMD-CNN-LSTM показана на рис. 6 [19].

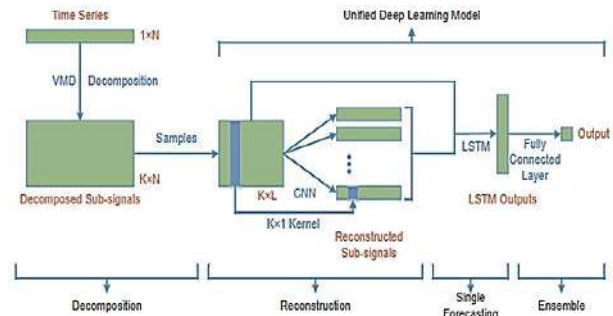


Рис. 6. Блок-схема реалізації моделі VMD-CNN-LSTM

Запропонований підхід VMD-CNN-LSTM в основному складається з чотирьох кроків:

1. VMD використовується для декомпозиції початкового часу. серії в K sub-сигналів.
2. CNN застосовується для вивчення шаблонів реконструкції розкладених підсигналів для отримання реконструйованих субсигналів (розмір ядра CNN дорівнює K на L , де L є довжиною вхідної послідовності, і ядро CNN можна розглядати як ваги реконструкції для розкладених субсигналів).
3. LSTM використовується для прогнозування розкладених підсигналів і реконструйованих підсигналів (розкладені підсигнали і реконструйовані підсигнали можна розглядати як багатовимірне представлення вихідного часового ряду).
4. Повністю пов'язаний рівень використовується для об'єднання результатів прогнозування LSTM для отримання кінцевих результатів прогнозування.

Результати використання ШНМ для прогнозування ринкової вартості акцій фондового ринку країни з нестабільною економікою. Оскільки якість прогнозів значною мірою залежить від вхідних даних, то було проведено підбір наборів даних для навчання і тестування. Вимоги до навчальної вибірки: вона не повинна бути меншою за рік, щоб врахувати сезонні зміни цін акцій, і не повинна бути занадто великою, щоб уникнути перенавчання моделей та великих витрат часових та обчислювальних ресурсів.

Отже, для експериментального тестування було обрано 4 варіанти: дані за 1 рік, 2 роки, 5 та 10 років. Результати порівняння якості прогнозу за різними метриками для часових періодів зведено у табл. 1. За даними табл. 1 можна дійти висновку, що дані за 10 років і 2 роки значно перевищують інші варіанти. При цьому навчальну вибірку за 2 роки можна вважати найкращою як за кількістю найкращих значень метрик, що підтверджують інші дослідження [2], так і більш зручною в процесі експлуатації.

Для оцінки якості прогнозу розраховані такі показники: RMSE (Root Mean Squared Error) – середньоквадратична помилка; MAPE (Mean Absolute Percentage Error) – середня абсолютна відсоткова помилка;

MDA (Mean Directional Accuracy) – середня абсолютна відсоткова помилка, забезпечує ймовірність того, що досліджуваний метод зможе визначити правильний напрямок часового ряду. У табл. 1 кольором позначені найкращі значення метрик помилок прогнозування за моделями (по строкам). При використанні метрики RMSE чим нижче значення, тим кращий прогноз за даною моделлю з використанням даних навчальної вибірки. Чим нижче значення MAPE, тим менша середня різниця між прогнозованим і фактичним значенням, отже, менше значення вважається найкращим. А для метрики MDA навпаки – найкращою буде вважатися модель, яка дає найбільше значення MDA.

Таблиця 1 – Порівняння якості прогнозу за роками

Модель	Помилка	Навчальна вибірка за роками			
		1	2	5	10
LSTM	RMSE	10.435	8.356	8.232	8.173
	MAPE	3.707	2.878	2.803	2.768
	MDA	0.514	0.517	0.510	0.503
CNN	RMSE	10.366	8.123	9.396	10.86
	MAPE	3.687	2.785	3.193	3.847
	MDA	0.503	0.507	0.510	0.517
CNN-LSTM	RMSE	13.695	14.401	10.752	8.790
	MAPE	5.185	5.514	3.829	3.083
	MDA	0.507	0.517	0.5	0.497
VMD-LSTM	RMSE	11.507	8.080	8.104	8.232
	MAPE	4.222	2.731	2.734	2.791
	MDA	0.517	0.517	0.517	0.503
VMD-CNN-LSTM	RMSE	20.531	5.884	7.278	9.431
	MAPE	4.432	1.286	2.897	2.489
	MDA	0.5	0.517	0.517	0.503

Крім обсягу вибірки, значну роль відіграє структура даних: передбачення ціни закриття акцій компанії може ґрунтуватися як виключно на цінах закриття попередніх днів, так і на додаткових даних, таких як ціна відкриття, максимальна та мінімальна за день, а також обсяг проданих за день акцій. У табл. 2 наведено результати розрахунків помилок прогнозування для одновимірних та багатовимірних даних для навчання НМ.

Таблиця 2 – Порівняння одновимірних та багатовимірних даних для навчання

Модель	Метрика	Кількість признаков	
		1	5
LSTM	RMSE	8.395	8.413
	MAPE	2.857	2.894
	MDA	0.507	0.520
CNN	RMSE	8.531	8.925
	MAPE	2.894	3.073
	MDA	0.507	0.510
CNN-LSTM	RMSE	19.947	10.336
	MAPE	8.227	3.680
	MDA	0.0	0.5

Хоча для LSTM та CNN значення метрик при одновимірних та багатовимірних тренувальних даних практично збігаються, у разі гібридної моделі CNN-LSTM додаткові ознаки дозволяють значно підвищити

якість прогнозування. Оскільки для порівняння прогностичної здатності різних моделей необхідний однаковий набір вхідних даних, далі для перерахованих вище моделей використовуються всі 5 ознак.

У випадку VMD-LSTM та VMD-CNN-LSTM простір ознакою генерується при обробці модулем VMD цін закриття акцій і є 5 мод для кожного запису, що збігається з форматом вхідних даних для інших моделей. Крім того, вплив на якість надає розмір рухомого вікна, відповідного кількості попередніх записів, необхідних для розрахунку прогнозованої ціни закриття. У більшості подібних статей розмір вікна відповідає 30 або 60 записам. Також варто перевірити значно менші та більші розміри: 10 та 90. У табл. 3 наведено помилки прогнозів для різних розмірів ковзного вікна.

Таблиця 3 – Порівняння якості прогнозів для різних розмірів ковзного вікна

Модель	Помилка	Значення помилки прогнозів в залежності від розміру рухомого вікна			
		10	30	60	90
LSTM	RMSE	16.684	17.728	8.458	4.781
	MAPE	6.119	6.446	2.923	1.678
	MDA	0.508	0.510	0.517	0.5
CNN	RMSE	16.154	17.036	8.480	4.681
	MAPE	5.920	6.206	2.932	1.662
	MDA	0.503	0.503	0.507	0.5
CNN-LSTM	RMSE	14.696	16.449	14.757	18.91
	MAPE	5.124	6.079	5.674	8.023
	MDA	0.0	0.0	0.514	0.0
VMD-LSTM	RMSE	16.369	17.171	8.154	6.639
	MAPE	6.008	6.255	2.761	2.435
	MDA	0.505	0.507	0.517	0.5
VMD-CNN-LSTM	RMSE	19.768	25.076	5.765	9.531
	MAPE	4.432	6.008	1.286	2.435
	MDA	0.505	0.517	0.517	0.5

У цьому випадку визначити оптимальне значення складніше, оскільки кількість найкращих показників для розмірів 60 та 90 практично збігається. При цьому MDA для всіх моделей краще при прогнозуванні за 60 попередніми значеннями, а це найважливіша на практиці метрика. Крім цього, 60 значень дозволяє скоротити витрати часу та обчислювальну потужність порівняно з 90.

Аналіз результатів. На підставі проведених експериментів підібрано оптимальні параметри для всіх моделей: навчальна вибірка складається із цін закриття акцій за 2 роки; у рухомому вікні 60 значень; усі значення попередньо нормуються у проміжок [0,1]; кожна з моделей реалізована в оптимальній конфігурації. Усі результати прогнозів ринкової вартості акцій наведені у роботі [2]. Зроблено висновок, що найбільш ефективною мережею для прогнозів ринкової вартості акцій українського фондового ринку є модель VMD-LSTM (рис. 7).

Як підсумок треба відзначити, що гібрид методу машинного навчання та нейромережі виявився ефективнішим за з'єднання двох різних типів нейронних мереж. При цьому як додавання VMD до CNN-LSTM

забезпечує приріст якості, так і VMD до LSTM. Не можна стверджувати існування залежності між складністю гібридної моделі (кількістю складових модулів) та її якістю, тому що в результаті експериментальних досліджень подвійна модель CNN-LSTM виявилася гіршою за одинарну CNN. Якісною моделлю для прогнозування цін акцій є гібридна модель VMD-CNN-LSTM, але і модель VMD-LSTM показує гарні результати.

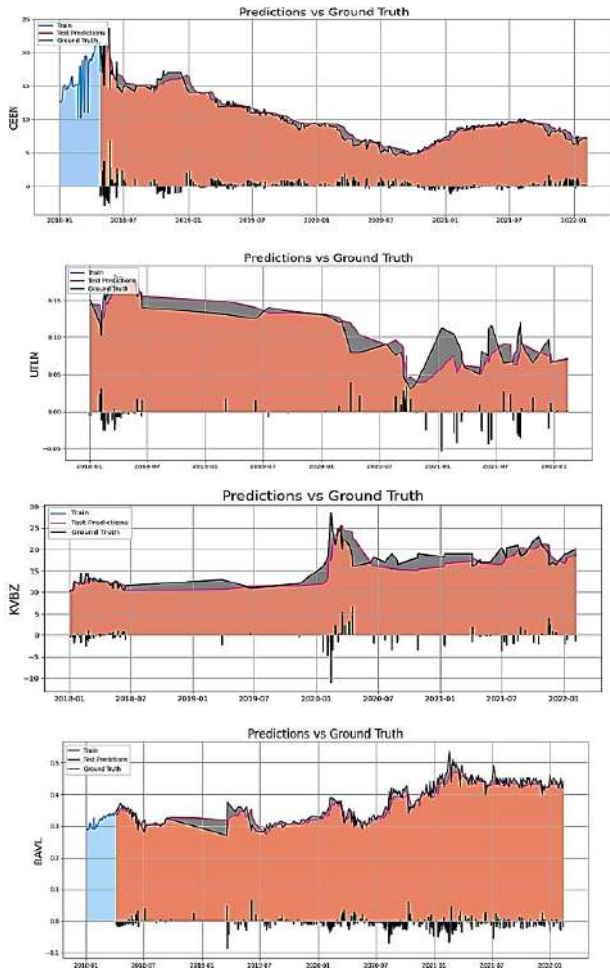


Рис. 7. Прогнози ринкової вартості акцій CEEN, UTLN, KVBZ та BAVL BAVL на основі моделі VMD-LSTM

Висновки. У цій статті проведено аналіз результатів існуючих досліджень щодо використання нейронних мереж та інших методів обчислювального інтелекту для моделювання поведінки учасників фондового ринку та прогнозування ринку. Надано результати дослідження щодо використання нейронних мереж різної архітектури для прогнозування ринкової вартості акцій на фондовому ринку України. Для прогнозування було обрано чотири акції Української фондової біржі: Центренерго (CEEN); Укртелеком (UTLM); Крюківський Вагонобудівний Завод ПАТ (КВБЗ); Райффайзен Банк Аваль (БАВЛ). Для експериментального дослідження були обрані такі моделі: LSTM; CNN; гібридна модель CNN і LSTM; гібридна модель VMD-LSTM; гібридна модель VMD-CNN-LSTM. Розраховано оцінки якості прогнозу. Зроблено висновок, що використання гібридної моделі VMD-CNN-LSTM

дає мінімальну помилку прогнозування ринкової вартості акцій українських підприємств. Також доцільно використовувати модель VMD-LSTM для прогнозування вартості акцій на біржах країн з нестабільною економікою. Результати цих досліджень будуть включені у підсистему прогнозування як складової модуля управління інвестиційною діяльністю системи управління ефективністю підприємства [20]. У наступних дослідженнях буде звернено увагу на прогнозування показників інвестиційного ринку країн з нестабільною економікою.

Список літератури

1. Moskalenko V., Fonta N., Nikulina O., Grinchenko M., Ershova S. Information technology of determination of the company's financial condition for the financial planning subsystem of the EPM system. *Radioelectronic and Computer Systems*. 2022. Vol. 2. P. 83–96.
2. Moskalenko V., Santalova A., Fonta N., Nikulina E. The value of shares prediction in an unstable economy using neural networks. *CEUR Workshop Proceedings*. 2022. Vol. 3171. P. 1202–1215.
3. Chopra R. G., Sharma D. Application of Artificial Intelligence in Stock Market Forecasting: A Critique, Review, and Research Agenda. *Journal of Risk and Financial Management*. 2021. Vol. 14(11).
4. Yan Y., Yang D. A Stock Trend Forecast Algorithm Based on Deep Neural Networks. *Wireless Communications and Mobile Computing*. 2021. Vol. 7. P. 1–10.
5. Oh J. Development of a stock trading system based on a neural network using highly volatile stock price patterns. *Peer J Computer Science*. 2022. URL: <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.915>. (дата звернення: 20.11.2022).
6. Zhong X., Enke D. Predicting the daily return direction of the stock market using hybrid machine learning algorithms. *Financial Innovation*. 2019. Vol. 5(1). P. 1–20.
7. Ji X., Wang J., Yan Z. A stock price prediction method based on deep learning technology. *International Journal of Crowd Science*. 2021. Vol. 5 (1). P. 55–72.
8. Rossi A. G. *Predicting Stock Market Returns with Machine Learning*. 2022. URL: <https://neptune.ai/blog/predicting-stock-prices-using-machine-learning>. (дата звернення: 20.11.2022).
9. Chen S., He H. Stock prediction using convolutional neural network. *IOP Conference series: materials science and engineering*, 2018. Vol. 435. P. 012026.
10. Amaury H.-Á., García-Valdez M., Merelo-Guervós J. J., Castañón-Puga M., López O. C. Using Fuzzy Inference Systems for the Creation of Forex Market Predictive Models. *IEEE Access*. 2021. Vol. 9. P. 69391–69404.
11. Ding Y., Sun N., Xu J., Li P., Wu J., Tang S. Research on Shanghai Stock Exchange 50 Index Forecast Based on Deep Learning. *Mathematical Problems in Engineering*. 2022. Vol. 2022. Article ID 1367920.
12. Narayana C., Naik P. J., Mythili G.Y., Vasu K., Rayalu M. G. Application of Neural Networks in Forecasting Methods. *International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology (IJRASET)*. 2017. Vol. 5. P. 1926–1930.
13. Bui V., Le N.T., Nguyen V.H., Kim J., Jang Y.M. Multi-Behavior with Bottleneck Features LSTM for Load Forecasting in Building Energy Management System. *Electronics*. 2021. Vol. 10(9).
14. Le X.H., Ho H. V., Lee G., Jung S. Application of Long Short-Term Memory (LSTM) Neural Network for Flood Forecasting. *Water*. 2019. Vol. 11 (7). DOI: 10.3390/w11071387
15. Yuan X., Li L., Wang Y. Nonlinear dynamic soft sensor modeling with supervised long short-term memory network. *IEEE transactions on industrial informatics*. 2019. Vol. 16. P. 3168–3176.
16. Chen S., He H. Stock prediction using convolutional neural network. *IOP Conference series: materials science and engineering*. IOP Publishing, 2018. Vol. 435 (1). P. 012–026.
17. Wu J. M. T. et al. A graph-based CNN-LSTM stock price prediction algorithm with leading indicators. *Multimedia Systems*. 2021. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00530-021-00758-w> (дата звернення: 20.11.2022).
18. Niu H., Xu K., Wang W. A hybrid stock price index forecasting model based on variational mode decomposition and LSTM network. *Applied Intelligence*. 2020. Vol. 50 (12). P. 4296–4309.

19. Zhang G., Ren T., Yang Y. A New Unified Deep Learning Approach with Decomposition-Reconstruction-Ensemble Framework for Time Series Forecasting. 2020. URL: <https://arxiv.org/abs/2002.09695>. (дата звернення: 20.11.2022)/
20. Moskalenko V., Fonta N. The method of constructing a development trajectory as the basis of an intelligent module for strategic planning of the EPM system. *CEUR Workshop Proceedings*. 2021. Vol. 2870. P. 1540–1550.

References (transliterated)

1. Moskalenko V., Fonta N., Nikulina O., Grinchenko M., Ershova S. Information technology of determination of the company's financial condition for the financial planning subsystem of the EPM system. *Radioelectronic and Computer Systems*. 2022, vol. 2, pp. 83–96.
2. Moskalenko V., Santalova A., Fonta N., Nikulina E. The value of shares prediction in an unstable economy using neural networks. *CEUR Workshop Proceedings*. 2022, vol. 3171, pp. 1202–1215.
3. Chopra R. G., Sharma D. Application of Artificial Intelligence in Stock Market Forecasting: A Critique, Review, and Research Agenda. *Journal of Risk and Financial Management*. 2021, vol. 14(11).
4. Yan Y., Yang D. A Stock Trend Forecast Algorithm Based on Deep Neural Networks. *Wireless Communications and Mobile Computing*. 2021, vol. 7, pp. 1–10.
5. Oh J. Development of a stock trading system based on a neural network using highly volatile stock price patterns. *Peer J Computer Science*. 2022. Available at: <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.915>. (accessed 20.11.2022).
6. Zhong X., Enke D. Predicting the daily return direction of the stock market using hybrid machine learning algorithms. *Financial Innovation*. 2019, vol. 5(1), pp. 1–20.
7. Ji X., Wang J., Yan Z. A stock price prediction method based on deep learning technology. *International Journal of Crowd Science*. 2021, vol. 5 (1), pp. 55–72.
8. Rossi A. G. *Predicting Stock Market Returns with Machine Learning*. 2022. Available at: <https://neptune.ai/blog/predicting-stock-prices-using-machine-learning> (accessed 20.11.2022).
9. Chen S., He H. Stock prediction using convolutional neural network. *IOP Conference series: materials science and engineering*. 2018, vol. 435, pp. 012026.
10. Amaury H-Á., García-Valdez M., Merelo-Guervós J. J., Castañón-Puga M., López O. C. Using Fuzzy Inference Systems for the Creation of Forex Market Predictive Models, *IEEE Access*. 2021, vol. 9, pp. 69391–69404.
11. Ding Y., Sun N., Xu J., Li pp., Wu J., Tang S. Research on Shanghai Stock Exchange 50 Index Forecast Based on Deep Learning. *Mathematical Problems in Engineering*. 2022, vol. 2022, article ID 1367920.
12. Narayana C., Naik P. J., Mythili G.Y., Vasu K., Rayalu M. G. Application of Neural Networks in Forecasting Methods. *International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology (IJRASET)*. 2017. vol. 5. pp. 1926 -1930.
13. Bui V., Le N.T, Nguyen V.H, Kim J, Jang Y.M. Multi-Behavior with Bottleneck Features LSTM for Load Forecasting in Building Energy Management System. *Electronics*. 2021, vol. 10(9).
14. Le X.H., Ho H. V., Lee G., Jung S. Application of Long Short-Term Memory (LSTM) Neural Network for Flood Forecasting. *Water*. 2019. vol. 11 (7) DOI: 10.3390/w11071387.
15. Yuan X., Li L., Wang Y. Nonlinear dynamic soft sensor modeling with supervised long short-term memory network. *IEEE transactions on industrial informatics*. 2019, vol. 16, pp. 3168–3176.
16. Chen S., He H. Stock prediction using convolutional neural network. *IOP Conference series: materials science and engineering*. IOP Publishing, 2018, vol. 435 (1), pp. 012–026.
17. Wu J. M. T. et al. A graph-based CNN-LSTM stock price prediction algorithm with leading indicators. *Multimedia Systems*. 2021. Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00530-021-00758-w> (accessed 20.11.2022).
18. Niu H., Xu K., Wang W. A hybrid stock price index forecasting model based on variational mode decomposition and LSTM network. *Applied Intelligence*. 2020, vol. 50 (12), pp. 4296–4309.
19. Zhang G., Ren T., Yang Y. A New Unified Deep Learning Approach with Decomposition-Reconstruction-Ensemble Framework for Time Series Forecasting. 2020. Available at: <https://arxiv.org/abs/2002.09695>. (accessed 20.11.2022)/
20. Moskalenko V., Fonta N. The method of constructing a development trajectory as the basis of an intelligent module for strategic planning of the EPM system. *CEUR Workshop Proceedings*. 2021, vol. 2870, pp. 1540–1550

Надійшла (received) 05.09.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Москаленко Валентина Володимирівна – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри інформаційних систем та технологій; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9994-5404>; e-mail: valentinamosk17@gmail.com

Санталова Анастасія Романівна – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», студентка; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9949-4500>; e-mail: nastia.santalova@gmail.com

Фонта Наталія Григорівна – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри програмної інженерії та інтелектуальних систем управління; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5593-1409>; e-mail natalia.fonta@dataart.com

Moskalenko Valentyna Volodymyrivna – Doctor of Technical Sciences, Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of Information Systems and Technologies; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9994-5404>; e-mail: valentinamosk17@gmail.com

Santalova Anastasiya Romanivna – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Student; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9949-4500>; e mail: nastia.santalova@gmail.com

Fonta Nataliia – Candidate of Technical Sciences (PhD), Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of Software Engineering and Management Intelligent Technologies; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5593-1409>; e mail natalia.fonta@dataart.com

L. G. RASKIN, L. V. SUHOMLIN, D. D. SOKOLOV, L. V. DOMOCHKA

ASSESSING THE INFORMATIVENESS OF THE CONTROLLED PARAMETERS IN THE TASK OF IDENTIFYING THE STATE OF THE SYSTEM

The effectiveness of solving the problem of identifying the system state significantly depends on the number of controlled parameters and the degree of their informativeness. The traditional method for assessing the informativeness of these parameters is based on the measure of distance between the probability distributions of the values of the controlled parameter for different states of the system proposed by Kullback. The shortcomings of Kullback measure have been revealed. Firstly, the value of this measure is not normalised and is not limited from above. Secondly, this measure is asymmetric, i.e. its numerical value depends on the way its components enter the calculation ratio. The method for calculating the informativeness criterion proposed in this paper takes into account the uncertainty that arises due to the fuzzy description of the boundaries of the areas of possible values of the controlled parameters for each of the possible states of the system. An important enhancement of the known methods for assessing the informativeness of the controlled parameters is to take into account the real existing inaccuracy in estimating the values of the results of measuring these parameters themselves. These circumstances determine the subject and purpose of the study that is the development of a method for calculating the distance between the distributions of fuzzy values of the controlled parameter, free from the shortcomings of the Kullback measure. To calculate the measure of the distance between the distributions of the values of the controlled parameter under conditions of uncertainty of the initial data, described in terms of fuzzy mathematics, a symmetric criterion is proposed, which is easily calculated. Examples of the criterion calculation are given. The possibilities of increasing the level of informativeness of the criterion using analytical descriptions of membership functions of fuzzy values of the controlled parameter for different states of the system are considered.

Keywords: identification of system states, Kullback information measure, assessment of informativeness of fuzzy controlled parameter.

Л. Г. РАСКІН, Л. В. СУХОМЛИН, Д. Д. СОКОЛОВ, Л. В. ДЬОМОЧКА

ОЦІНКА ІНФОРМАТИВНОСТІ КОНТРОЛЬОВАНИХ ПАРАМЕТРІВ У ЗАВДАННІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СТАНУ СИСТЕМИ

Ефективність розв'язання задачі ідентифікації стану системи суттєво залежить від кількості контрольованих параметрів і ступеня їхньої інформативності. Традиційна технологія оцінювання інформативності цих параметрів спирається на запропоновану Кульбаком міру відстані між ймовірнісними розподілами значень контрольованого параметра для різних станів системи. Виявлені недоліки міри Кульбака. По-перше, значення цієї міри не нормоване і не обмежене зверху. По-друге, ця міра асиметрична, тобто її чисельне значення залежить від способу входження її компонентів у розрахункове співвідношення. Запропонована в роботі технологія розрахунку критерію інформативності враховує невизначеність, що виникає внаслідок нечіткості опису меж областей можливих значень контрольованих параметрів для кожного з можливих станів системи. Важливе посилення відомих технологій оцінювання інформативності контрольованих параметрів полягає у врахуванні реальної існуючої неточності оцінювання значень самих результатів вимірювання цих параметрів. Зазначені обставини визначають предмет і мету дослідження – розроблення метода розрахунку відстані між розподілами нечітких значень контрольованого параметра, вільного від недоліків міри Кульбака. Для розрахунку міри відстані між розподілами значень контрольованого параметра в умовах невизначеності вихідних даних, описаних у термінах нечіткої математики, запропоновано симетричний критерій, який легко обчислюється. Наведено приклади розрахунку критерію. Розглянуто можливості збільшення рівня інформативності критерію з використанням аналітичних описів функцій належності нечітких значень контрольованого параметра для різних станів системи.

Ключові слова: ідентифікація станів системи, інформаційна міра Кульбака, оцінка інформативності нечіткого контрольованого параметра.

Introduction. Assessing the state of the system based on the results of processing a set of controlled parameters is a typical task of everyday practice. The elementary mathematical model of this problem is formulated as follows.

It is assumed that the system can be in one of the many (H_1, H_2, \dots, H_m) states, for the identification of which the parameters $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ are used.

Let from theoretical considerations (or based on the results of processing preliminary observations) a matrix of conditional distribution densities of random values of controlled parameters for possible states of the system be obtained: $f(x_j / H_i), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

It is clear that the task of analyzing the results of observations is the simpler, the smaller the number of controlled parameters.

The natural way to reduce this number is to estimate the informational value of the parameters and select the best ones.

Analysis of known results. One of the traditional approaches is the calculation and comparison of the “distance” between the distributions of random values of controlled parameters for various system states using the Kullback measure [1, 2].

This measure is introduced as follows. To assess the information value of a specific controlled parameter x used to identify system states, for example, H_1 and H_2 the Kullback numerical criterion is calculated by the formula (1):

$$\begin{aligned} \tau_{1,2} &= F(f(x / H_1), f(x / H_2)) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x / H_1) \log \frac{f(x / H_1)}{f(x / H_2)} dx. \end{aligned} \quad (1)$$

© L. G. Raskin, L. V. Suhomlin, D. D. Sokolov, L. V. Domochka, 2022



Research Article: This article was published by the publishing house of NTU "KhPI" in the collection "Bulletin of the National Technical University "KhPI" Series: System analysis, management and information technologies." This article is distributed under a Creative Common [Creative Common Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Conflict of Interest:** The author/s declared no conflict of interest.



In a particular case, for Gaussian distributions

$$f(x/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\};$$

$$f(x/H_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

We have

$$\begin{aligned} \tau_{1,2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \times \\ &\times \log \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \log \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \times \\ &\times \exp\left\{-\left[\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]\right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \left[\log \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]\right] dx = \\ &= \log \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} L(x) dx, \\ L(x) &= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} (x^2\sigma_2^2 - 2xm_1\sigma_2^2 + m_1^2\sigma_2^2 - \\ &\quad - x^2\sigma_1^2 + 2xm_2^2\sigma_1^2 - m_2^2\sigma_1^2) = \\ &= \frac{x^2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) - 2x(m_1\sigma_2^2 - m_2\sigma_1^2) + m_1^2\sigma_2^2 - m_2^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}, \\ \tau_{1,2} &= \log \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)x^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} dx - \right. \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \frac{(m_1\sigma_2^2 - m_2\sigma_1^2)x}{\sigma_1^2\sigma_2^2} dx + \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \frac{(m_1^2\sigma_2^2 - m_2^2\sigma_1^2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2} dx \right] = \\ &= \log \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{1}{2} (A_1 - 2A_2 + A_3); \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} (m_1^2 + \sigma_1^2);$$

$$A_2 = \frac{m_1\sigma_2^2 - m_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2};$$

$$A_3 = \frac{m_1^2\sigma_2^2 - m_2^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}.$$

Then

$$\tau_{1,2} = \log \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left[\sigma_1^2(m_1^2 - m_2^2) - \right. \tag{2}$$

$$\left. - \sigma_1^2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) - 2(m_1^2\sigma_2^2 - m_2^2\sigma_1^2) \right].$$

The approach proposed by Kullback to assessing the informativeness of indicators has obvious shortcomings. The most significant of them is the asymmetry of the introduced ratio, which leads to unpredictable differences in the results of calculating the measure τ when the nature of the occurrence of $f(x/H_1)$ and $f(x/H_2)$ in formula (1) changes. Secondly, the measure of informativeness of (1) is not normalized. Numerical value τ is equal to zero, if the distribution densities $f(x/H_1)$ and $f(x/H_2)$ coincide, and can take on an arbitrarily large, not limited from above, value otherwise [3–5]. Thirdly, the analytical complexity of the construction of criterion (1) leads in many practical cases to the need to use numerical integration [6, 7]. Finally, fourthly, the Kullback measure is designed to distinguish between distributions of random variables and cannot be used directly if the uncertainty of the initial data is described differently, for example, in terms of fuzzy set theory. This situation requires special consideration. The point is the following. The functioning of real systems, as a rule, occurs in changing conditions. At the same time, the mechanism of formation of the observed values of the controlled parameters of the environment and the system changes. As a result, the axiomatic requirements of probability theory are violated. Under these conditions, the level of adequacy of empirical distribution densities obtained by continuous approximation of histograms formed from the results of experiments may turn out to be unsatisfactory. The natural correct alternative is to use fuzzy mathematics formalisms.

In accordance with this, the purpose of the research is to develop a criterion for the distinguishability of distributions of fuzzy values, free from the shortcomings of the Kullback criterion, in the problem of choosing parameters for identifying the state of systems.

Development of a criterion for the distinguishability of distributions of fuzzy values. Let's consider the standard procedure for using some parameter of an object to diagnose its state. Let an object be in one of two states H_1 or H_2 . Let's introduce membership functions of $(L-R)$ type of fuzzy controlled parameter x for the states H_1 and H_2 :

$$\mu_{H_1}(x) = \langle m_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle, \mu_{H_2}(x) = \langle m_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle.$$

The simplest special case, when these functions are triangular, is shown in fig. 1.

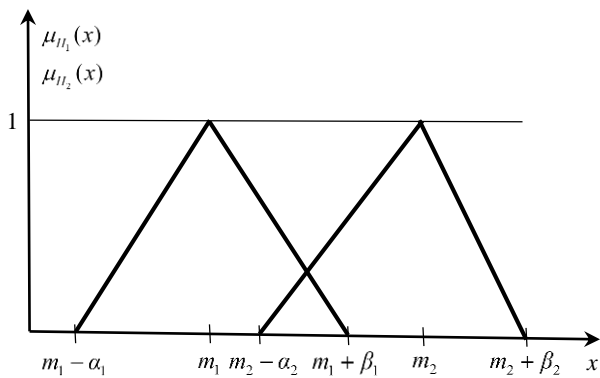


Fig.1. Membership functions $\mu_{H_1}(x), \mu_{H_2}(x)$

In this case, the area of possible observed values of the parameter x is divided into subareas:

$I_1 = [m_1 - \alpha_1, m_2 - \alpha_2]$ – is the subarea of values x , that can be observed only if the object is in state H_1 ;

$I_2 = [m_1 + \beta_1, m_2 + \beta_2]$ – is the subarea of values x , that can be observed only when the object is in state H_2 ;

$I_{1,2} = [m_2 - \alpha_2, m_1 + \beta_1]$ – is the subarea of values x that can be observed for both state H_1 and state H_2 (compatibility interval);

$I_0 = [m_1 - \alpha_1, m_1 + \beta_1] \cup [m_2 - \alpha_2, m_2 + \beta_2]$ – is the area of all possible observed values of the parameter x

Now let's introduce the criterion:

$$\tau = \frac{I_{1,2}}{I_0}. \tag{3}$$

It is easy to see that criterion (3) is free from the shortcomings of the Kullback criterion (1). Indeed, the calculation result of the criterion calculation does not depend on the order of calculation of its components. Further, this criterion is normalized.

The criterion τ is 0 ($\tau = 0$) if the length of the compatibility interval $I_{1,2}$ is equal to 0, that is, the areas of possible values of the parameter x for the states H_1 and H_2 do not intersect.

The criterion τ is 1 ($\tau = 1$) if the areas of possible values of the parameter x for the states H_1 and H_2 coincide. Thus, the length of the compatibility interval $I_{1,2}$ in a certain, easily interpreted way, characterizes the informativeness value of the parameter x .

At the same time, for describing the uncertainty of the initial data, it is proposed to use membership functions of $(L-R)$ type that are convenient for carrying out calculations. Thus, the task is solved.

It is clear that the level of informativeness of the criterion clearly depends on the length of the compatibility interval $I_{1,2}$. Wherein, if the observed value of the controlled parameter turns out to be within this interval,

then this fact, in itself, does not contain any information regarding the state of the object. However, this information can be extracted using analytical descriptions of the membership functions of controlled parameters for different states of the object H_1 and H_2 . The desired effect is achieved as follows.

For each of the membership functions of the values of the controlled parameter, we define its probabilistic counterpart. To this end, we determine the areas under the curves given by the functions $\mu_{H_1}(x)$ and $\mu_{H_2}(x)$.

Let's introduce

$$S_1 = \int_{m_1 - \alpha_1}^{m_1 + \beta_1} \mu_{H_1}(x) dx;$$

$$S_2 = \int_{m_2 - \alpha_2}^{m_2 + \beta_2} \mu_{H_2}(x) dx.$$

Then

$$\hat{\mu}_{H_2}(x) = \frac{\mu_{H_2}(x)}{S_2}; \tag{4}$$

$$\hat{\mu}_{H_1}(x) = \frac{\mu_{H_1}(x)}{S_1}.$$

The functions given by formulas (4) have all the properties of the distribution densities of random values [8, 9]: they are nonnegative and

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mu}_{H_1}(x) dx = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mu}_{H_2}(x) dx = 1.$$

As a result, they can be used to calculate the probabilities that the observed values of the controlled parameter x fall into the interval $I_{1,2}$ for the states H_1 and H_2 :

$$P_{H_1}(x \in I_{1,2}) = \int_{m_2 - \alpha_2}^{m_1 + \beta_1} \hat{\mu}_{H_1}(x) dx; \tag{5}$$

$$P_{H_2}(x \in I_{1,2}) = \int_{m_2 - \alpha_2}^{m_1 + \beta_1} \hat{\mu}_{H_2}(x) dx. \tag{6}$$

Possible differences in the numerical values of the obtained probabilities contain additional information about the state of the object, increasing the information value of the controlled parameter. Let's consider examples.

Example 1. Let's introduce triangular functions of $(L-R)$ type of a fuzzy controlled parameter x for the states H_1 and H_2 (fig.2):

$$\mu_{H_1}(x) = \begin{cases} 0, & x < 10; \\ \frac{x-10}{15}, & 10 \leq x < 25; \\ \frac{40-x}{15}, & 25 \leq x \leq 40; \\ 0, & x > 40; \end{cases}$$

$$\mu_{H_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 30; \\ \frac{x-30}{25}, & 30 \leq x < 55; \\ \frac{70-x}{15}, & 55 \leq x \leq 70; \\ 0, & x > 70. \end{cases}$$

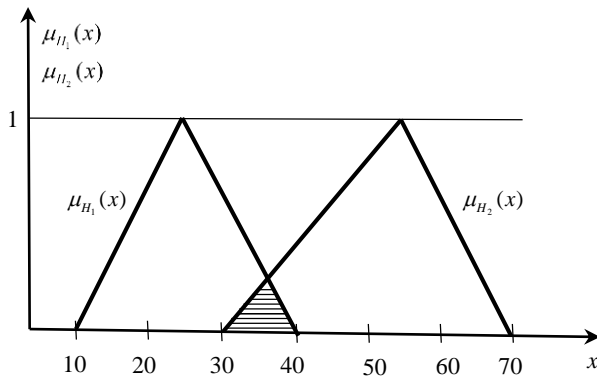


Fig. 2. Graphs $\mu_{H_1}(x)$, $\mu_{H_2}(x)$

The interval $I_{1,2}$ of compatibility of possible values x for H_1 and H_2 is $I_{1,2} = [30; 40]$. Now, using formulas (4)–(6), we calculate the probabilities that the parameter x will fall into $I_{1,2}$ for H_1 and H_2 .

We have

$$S_1 = \int_{m_1-\alpha_1}^{m_1+\beta_1} \mu_{H_1}(x) dx = \frac{1}{15} \int_{10}^{25} (x-10) dx + \frac{1}{15} \int_{25}^{40} (40-x) dx =$$

$$= \frac{1}{15} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_{10}^{25} - 10x \Big|_{10}^{25} \right] + \frac{1}{15} \left[40x \Big|_{25}^{40} - \frac{x^2}{2} \Big|_{25}^{40} \right] = 15;$$

$$S_2 = \int_{m_2-\alpha_2}^{m_2+\beta_2} \mu_{H_2}(x) dx = \int_{30}^{55} \frac{x-30}{25} dx + \int_{55}^{70} \frac{70-x}{15} dx = 20.$$

$$\hat{\mu}_{H_1}(x) = \frac{\mu_{H_1}(x)}{S_1} = \begin{cases} 0, & x < 10 \\ \frac{x-10}{15 \cdot 15}, & 10 \leq x < 25; \\ \frac{40-x}{15 \cdot 15}, & 25 \leq x < 40; \\ 0, & x > 40; \end{cases}$$

$$\hat{\mu}_{H_2}(x) = \frac{\mu_{H_2}(x)}{S_2} = \begin{cases} 0, & x < 30; \\ \frac{x-30}{25 \cdot 20}, & 30 \leq x < 55; \\ \frac{70-x}{15 \cdot 20}, & 55 \leq x \leq 70; \\ 0, & x > 70. \end{cases}$$

Then

$$P_{H_2}(x \in I) = \int_{m_2-\alpha_2}^{m_1+\beta_1} \hat{\mu}_{H_2}(x) dx = \int_{30}^{40} \frac{x-30}{25 \cdot 20} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2 \cdot 25 \cdot 20} \Big|_{30}^{40} - \frac{30x}{25 \cdot 20} \Big|_{30}^{40} = 0,1.$$

$$P_{H_1}(x \in I) = \int_{m_2-\alpha_2}^{m_1+\beta_1} \hat{\mu}_{H_1}(x) dx = \int_{30}^{40} \frac{40-x}{15 \cdot 15} dx =$$

$$= \frac{40x}{15 \cdot 15} \Big|_{30}^{40} - \frac{x^2}{2 \cdot 15 \cdot 15} \Big|_{30}^{40} = 0,222.$$

Example 2. Let's introduce the membership functions of the controlled parameter x for the states H_1 and H_2 (fig.3):

$$\mu_{H_1}(x) = \begin{cases} 0, & x < 10 \\ \frac{x-10}{25}, & 10 \leq x < 35; \\ \frac{40-x}{5}, & 35 \leq x \leq 40; \\ 0, & x > 40; \end{cases}$$

$$\mu_{H_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 30; \\ \frac{x-30}{35}, & 30 \leq x < 65; \\ \frac{70-x}{5}, & 65 \leq x \leq 70; \\ 0, & x > 70. \end{cases}$$

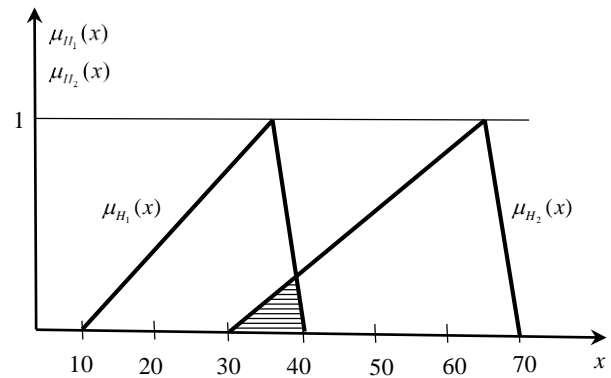


Fig. 3. Graphs $\mu_{H_1}(x)$, $\mu_{H_2}(x)$

The compatibility interval of possible values x for H_1 and H_2 is $I = [30; 40]$, that is, it coincides with this interval in example 1. Further we have:

$$S_1 = \int_{m_1-\alpha_1}^{m_1+\beta_1} \mu_{H_1}(x) dx = \frac{1}{25} \int_{10}^{35} \frac{x-10}{25} dx + \frac{1}{5} \int_{35}^{40} \frac{40-x}{5} dx =$$

$$= \frac{1}{25} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_{10}^{35} - 10x \Big|_{10}^{35} \right] + \frac{1}{5} \left[40x \Big|_{35}^{40} - \frac{x^2}{2} \Big|_{35}^{40} \right] = 15;$$

$$S_2 = \int_{m_2-\alpha_2}^{m_2+\beta_2} \mu_{H_2}(x) dx = \frac{1}{35} \int_{30}^{65} \frac{x-30}{35} dx + \frac{1}{5} \int_{65}^{70} \frac{70-x}{5} dx = 20.$$

$$\hat{\mu}_{H_1}(x) = \frac{\mu_{H_1}(x)}{S_1} = \begin{cases} 0, & x < 10 \\ \frac{x-10}{25 \cdot 15}, & 10 \leq x < 35; \\ \frac{40-x}{5 \cdot 15}, & 35 \leq x \leq 40; \\ 0, & x > 40; \end{cases}$$

Then

$$\hat{\mu}_{H_2}(x) = \frac{\mu_{H_2}(x)}{S_2} = \begin{cases} 0, & x < 30; \\ \frac{x-30}{35 \cdot 20}, & 30 \leq x < 65; \\ \frac{70-x}{5 \cdot 20}, & 65 \leq x \leq 70; \\ 0, & x > 70. \end{cases}$$

It follows that

$$P_{H_1}(x \in I) = \int_{m_2-\alpha_2}^{m_1+\beta_1} \hat{\mu}_{H_1}(x) dx = \int_{30}^{40} \frac{40-x}{5 \cdot 15} dx =$$

$$= \frac{40x}{5 \cdot 15} \Big|_{30}^{40} - \frac{x^2}{2 \cdot 5 \cdot 15} \Big|_{30}^{40} = 0,67.$$

$$P_{H_2}(x \in I) = \int_{m_2-\alpha_2}^{m_1+\beta_1} \hat{\mu}_{H_2}(x) dx = \int_{30}^{40} \frac{x-30}{35 \cdot 20} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2 \cdot 35 \cdot 20} \Big|_{30}^{40} - \frac{30x}{35 \cdot 20} \Big|_{30}^{40} = 0,071.$$

Example 3. Let's introduce the membership functions of the controlled parameter x for the states H_1 and H_2 (fig.4):

$$\mu_{H_1}(x) = \begin{cases} 0, & x < 10 \\ \frac{x-10}{5}, & 10 \leq x < 15; \\ \frac{40-x}{25}, & 15 \leq x \leq 40; \\ 0, & x > 40. \end{cases}$$

$$\mu_{H_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 30; \\ \frac{x-30}{5}, & 30 \leq x < 35; \\ \frac{70-x}{35}, & 35 \leq x \leq 70; \\ 0, & x > 70. \end{cases}$$

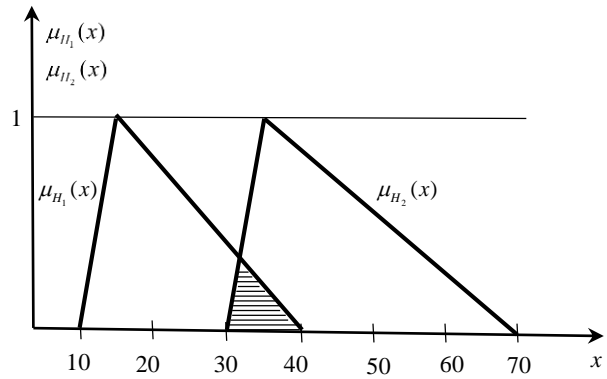


Fig. 4. Graphs $\mu_{H_1}(x)$, $\mu_{H_2}(x)$

The compatibility interval of possible values x for H_1 and H_2 is still $I = [30; 40]$. Further, similarly to considered above, we have:

$$S_2 = \int_{m_2-\alpha_2}^{m_2+\beta_2} \mu_{H_1}(x) dx = 20;$$

$$S_2 = \int_{m_2-\alpha_2}^{m_2+\beta_2} \mu_{H_2}(x) dx = 20.$$

Then

$$\hat{\mu}_{H_1}(x) = \frac{\mu_{H_1}(x)}{S_1} = \begin{cases} 0, & x < 10 \\ \frac{x-10}{5 \cdot 15}, & 10 \leq x < 15; \\ \frac{40-x}{25 \cdot 15}, & 15 \leq x \leq 40; \\ 0, & x > 40; \end{cases}$$

$$\hat{\mu}_{H_2}(x) = \frac{\mu_{H_2}(x)}{S_2} = \begin{cases} 0, & x < 30; \\ \frac{x-30}{5 \cdot 20}, & 30 \leq x < 35; \\ \frac{70-x}{35 \cdot 20}, & 35 \leq x \leq 70; \\ 0, & x > 70. \end{cases}$$

It follows that

$$P_{H_2}(x \in I) = \int_{m_2-\alpha_2}^{m_1+\beta_1} \hat{\mu}_{H_2}(x) dx = \int_{30}^{35} \frac{x-30}{5 \cdot 20} dx + \int_{35}^{40} \frac{70-x}{35 \cdot 20} dx = \frac{x^2}{2 \cdot 5 \cdot 20} \Big|_{30}^{35} - \frac{30x}{5 \cdot 20} \Big|_{30}^{35} + \frac{70x}{35 \cdot 20} \Big|_{35}^{40} - \frac{x^2}{2 \cdot 5 \cdot 20} \Big|_{35}^{40} = 0,125 = 0,457;$$

$$P_{H_1}(x \in I) = \int_{m_2-\alpha_2}^{m_1+\beta_1} \hat{\mu}_{H_1}(x) dx = \int_{30}^{40} \frac{40-x}{25 \cdot 15} dx = \frac{40x}{25 \cdot 15} \Big|_{30}^{40} - \frac{x^2}{2 \cdot 25 \cdot 15} \Big|_{30}^{40} = 0,133.$$

Let's analyze the results obtained in the examples.

The calculated values of the probabilities of falling the controlled parameter x into the compatibility interval $I_{1,2}$ for different states of the object H_1 and H_2 obviously depend on the analytical description of the membership functions $\hat{\mu}_{H_1}(x)$, $\hat{\mu}_{H_2}(x)$.

In the given examples, the membership functions of the fuzzy parameter x are deliberately chosen so that their carriers for the states H_1 and H_2 coincide, but their modal values are different. Comparison of the calculated values of the probabilities of the controlled parameter x falling into the compatibility interval $I_{1,2}$ for H_1 and H_2 shows the existence of their significant differences.

Thus, a possible suggestive idea that the level of informativeness of the controlled parameter depends only on the length of the interval of compatibility of membership functions for different states H_1 and H_2 is not quite accurate. The use of analytical descriptions of these membership functions and the associated possibility of calculating the probabilities of a controlled parameter falling into the compatibility interval can significantly increase its informativeness. This circumstance is especially important in cases where the length of the compatibility interval is large.

Now it can be noted that the results of the carried out research for the case when the set of possible states of the object contains only two states can easily be extended to the general case.

Let, for example, in the task of assessing the quality of an object, the following states be possible: H_1 (low), H_2 (satisfactory), H_3 (good), H_4 (excellent).

At the same time, for some controlled parameter x , the membership functions $\mu_{H_k}(x)$, $k=1,2,3,4$, of values of this parameter for each of the states are introduced (fig. 5).

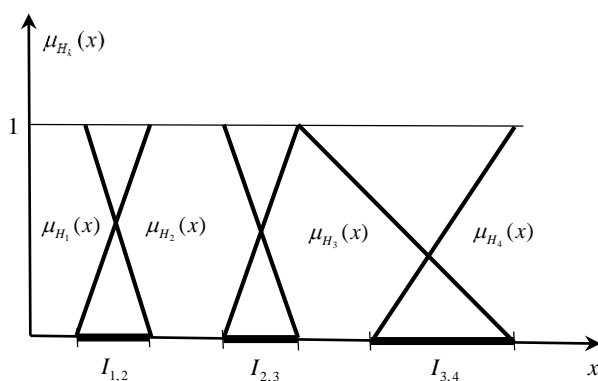


Fig. 5. Graphs of membership functions of a controlled parameter x in intervals of possible values

It is naturally that the compatibility intervals $I_{1,2}$, $I_{2,3}$, $I_{3,4}$ appear.

For each interval $I_{k,k+1}$ let's calculate the probabilities of the controlled parameter falling into this interval for the states of the object H_k and H_{k+1} , $k=1,2,3$,

$$\begin{aligned}
 P_{H_k}(x) &= \int_{m_{k+1}-\alpha_{k+1}}^{m_k+\beta_k} \hat{\mu}_{H_k}(x) dx; \\
 P_{H_{k+1}}(x) &= \int_{m_{k+1}-\alpha_{k+1}}^{m_k+\beta_k} \hat{\mu}_{H_{k+1}}(x) dx; \\
 \hat{\mu}_{H_k}(x) &= \frac{\mu_{H_k}(x)}{S_k}; \\
 S_k &= \int_{m_k-\alpha_k}^{m_k+\beta_k} \mu_{H_k}(x) dx, k=1,2.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Possible differences in the values of these probabilities improve the accuracy of identifying the state of the object.

One more step can be taken in this direction. Let for the measured value x_ζ of the controlled parameter x , an interval $[x_\zeta - \frac{\Delta}{2}, x_\zeta + \frac{\Delta}{2}]$ be introduced that covers the true value of this parameter with a given probability P . Let's calculate the probability of the parameter value falling into this interval for each of the possible states H_k :

$$\hat{P}_{H_k}(x) = \int_{x_\zeta - \frac{\Delta}{2}}^{x_\zeta + \frac{\Delta}{2}} \mu_{H_k}(x) dx = \mu_{H_k}(x_\zeta) \cdot \Delta, k=1,2. \tag{8}$$

The results of calculating these probabilities for different H_k contain important information about the state of the object. Let's consider the corresponding method.

Let's introduce:

an event A – is a fall of the value of the controlled parameter into the compatibility interval;

$P_{H_k}(x)$ – is the probability that the parameter value will fall into the compatibility interval, provided that the object is in state $H_k, k=1,2$.

Since

$$P(A_1 H_k) = P(A_1 / H_k) \cdot P(H_k) = P(H_k / A) \cdot P(A),$$

then

$$P(H_k / A) = \frac{P(A / H_k) \cdot P(H_k)}{P(A)}. \tag{9}$$

At the same time, since

$$P(A) = P(A / H_1) \cdot P(H_1) + P(A / H_2) \cdot P(H_2) \tag{10}$$

then, substituting (10) into (9), we obtain:

$$P(H_k / A) = \frac{P(A / H_k) \cdot P(H_k)}{\sum_{k=1}^2 P(A / H_k) \cdot P(H_k)}, \tag{11}$$

which corresponds to the Bayesian theorem [10, 11].

Thus, relations (8)–(11) provide the possibility of constructive use of analytical descriptions of membership functions of fuzzy values of the controlled parameter from the compatibility interval to identify the probability

distributions of the states of the monitored object. At the same time, it is clear that any refinement of the description of these membership functions creates the prerequisites for increasing the informativeness of the corresponding controlled parameters. Let's show that.

Let's return to the considered above problem of assessing the informativeness of the controlled parameter x , which is used to identify the states of the object H_1 and H_2 .

Let, as before, the corresponding membership functions of $(L-R)$ type have the form $\mu_{H_1}(x) = \langle \mu_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle$, $\mu_{H_2}(x) = \langle \mu_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle$.

Let's now assume that, based on the results of processing the initial data, the fuzziness of the parameter m_1 of the odd value x for the state H_1 is established and the corresponding membership function is determined as follows $\mu_{H_1}(m_1) = \langle m_{m_1}, \alpha_{m_1}, \beta_{m_1} \rangle$.

Let's analyze the situation. To this end, we recalculate the probability that the value x falls into the compatibility interval for the state H_1 . We have

$$S_1 = \int_{m_{m_1} - \alpha_{m_1}}^{m_{m_1} + \beta_{m_1}} \left[\int_{m_1 - \alpha_1}^{m_1 + \beta_1} \mu_{H_1}(x) dx \right] \mu_{H_1}(m_1) dm_1 =$$

$$= \int_{m_{m_1} - \alpha_{m_1}}^{m_{m_1}} \left[\int_{m_1 - \alpha_1}^{m_1} \mu_{H_1}(x) dx + \int_{m_1}^{m_1 + \beta_1} \mu_{H_1}(x) dx \right] \mu_{H_1}(m_1) dm_1 +$$

$$+ \int_{m_{m_1}}^{m_{m_1} + \beta_{m_1}} \left[\int_{m_1 - \alpha_1}^{m_1} \mu_{H_1}(x) dx + \int_{m_1}^{m_1 + \beta_1} \mu_{H_1}(x) dx \right] \mu_{H_1}(m_1) dm_1;$$

$$\hat{\mu}_{H_1}(x) = \frac{1}{S_1} \mu_{H_1}(x); \quad (13)$$

$$P_{H_1}(x \in I_{1,2}) = \int_{m_{m_1} - \alpha_{m_1}}^{m_{m_1}} \left[\int_{m_2 - \alpha_2}^{m_1 + \beta_1} \hat{\mu}_{H_1}(x) dx \right] \hat{\mu}_{H_1}(m_1) dm_1 +$$

$$+ \int_{m_{m_1}}^{m_{m_1} + \beta_{m_1}} \left[\int_{m_2 - \alpha_2}^{m_1 + \beta_1} \hat{\mu}_{H_1}(x) dx \right] \hat{\mu}_{H_1}(m_1) dm_1. \quad (14)$$

Let's perform calculations using formulas (12)–(14), choosing the initial data for $\mu_H(x)$ from Example 1, that is, $\mu_{H_1}(x) = \langle 25; 15; 15 \rangle$, and adding $\mu_{H_1}(m) = \langle 25; 2; 10 \rangle$. As a result, we get $P_{H_1}(x \in I_{1,2}) = 0,61$ (instead of the previous 0.222). Thus, the shift to the right of the value of m_1 expectedly has led to a noticeable increase in the numerical value of the probability $P_{H_1}(x \in I_{1,2})$, while increasing the informativeness of parameter x .

Finally, it should be noted that some additional contribution to the assessment of the informativeness of a controlled parameter can be made by differences in the level of membership functions of the observed value of this parameter for different states of the system.

The direction of further research is the assessment of the informativeness of the controlled parameters in a

situation where they are used to evaluate the effectiveness of the system in a multicriteria problem. A possible approach is proposed in [12].

Conclusions. A method for identifying the state of systems under conditions of fuzzy initial data has been developed.

A symmetrical criterion for evaluating the informativeness of the controlled parameters of the system, the values of which are not clearly specified, is proposed. The situation is considered when the parameters of membership functions of a fuzzy controlled parameter are themselves fuzzy. A method for solving the binetch problem that arises in this case is proposed.

References

1. Kullback S., Leibler R.A. On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1951. Vol. 22. P. 79–86.
2. Kullback S. *Information theory and statistics*. New York, Wiley, 1959. 182 p.
3. Леонов В. П. *Современные проблемы информатики*. Томск: НТЛ, 2011. 248 с.
4. Стратонович Р. П. *Теория информации*. Москва: Сов. радио, 1975. 219 с.
5. Шеннон К. *Работы по теории информации и кибернетике*. Москва: Изд-во иностр. литературы, 1963. 832 с.
6. Анфилатов В. С., Емельянов А. А., Кукушкин А. А. *Системный анализ в управлении*. Москва: Финансы и статистика, 2005. 368 с.
7. Thomas M., Thomas J. *Elements of information theory*. New York: John Wiley & Sons, 2012. 784 p.
8. *Quantum Logic and Probability. The Stafford Encyclopedia*. 2021. 672 p.
9. *Theorie of Probability. Berkeley Statistics*. 2019. 286 p.
10. Chaloner K., Verdinelli I. Bayesian experimental design. *Statistical Science*. 1995. Vol. 10. P. 273–304.
11. Гмурман В. Е. *Теория вероятностей и математическая статистика*. Москва: Высшая школа, 2003. 479 с.
12. Раскин Л. Г., Пустовойтов П. Е. Решение многономенклатурной задачи управления запасами по вероятностному критерию. *Вестник Национального технического университета «ХПИ»*. Темат. вып.: Системный анализ, управление и информационные технологии. Харьков: НТУ «ХПИ», 2002. № 13. С. 49–53.

References (transliterated)

1. Kullback S., Leibler R.A. On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1951, vol. 22, pp.79–86.
2. Kullback S. *Information theory and statistics*. New York, Wiley, 1959. 182 p.
3. Leonov V. P. *Sovremennye problemy informatiki* [Current issues in computer science]. Tomsk, NTL Publ., 2011. 248 p.
4. Stratonovich R. P. *Teoriya informacii* [Current issues in computer science]. Moscow: Sov. radio Publ., 1975. 219 p.
5. Shannon K. *Raboty po teorii informacii i kibernetike* [Works on information theory and cybernetics]. Moscow, Izd-vo inostr. literaturi Publ., 1963. 832 p.
6. Anfilatov V. S., Yemelyanov A. A., Kukushkin A. A. *Sistemnyj analiz v upravlenii* [Systems analysis in management]. Moscow, Finansi i statistika Publ., 2005. 368 p.
7. Thomas M., Thomas J. *Elements of information theory*. New York, John Wiley & Sons, 2012. 784 p.
8. *Quantum Logic and Probability. The Stafford Encyclopedia*. 2021. 672 p.
9. *Theorie of Probability. Berkeley Statistics*. 2019. 286 p.
10. Chaloner, K., Verdinelli, I. Bayesian experimental design. *Statistical Science*. 1995, vol. 10, pp. 273–304.
11. Gmurman V. E. *Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika* [Probability theory and mathematical statistics]. Moscow, Visshaya shkola Publ., 2003. 479 p.
12. Raskin L. G., Pustovojtov P. E. Reshenie mnogonomenklaturnoj zadachi upravleniya zapasami po veroyatnostnomu kriteriyu. [Solving a multi-nomenclature inventory management problem using a probabilistic criterion]. *Vestnik Natsionalnogo tekhnicheskogo*

Відомості про авторів / About the Authors

Раскін Лев Григорович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри мультимедійних інформаційних технологій і систем, Національний технічний університет «ХПІ», Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9015-4016>; e-mail: topology@ukr.net.

Сухомлин Лариса Вадимівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри менеджменту, Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Кременчук, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9511-5932>; e-mail: lar.sukhomlyn@gmail.com.

Соколов Дмитро Дмитрович – аспірант кафедри мультимедійних інформаційних технологій і систем, Національний технічний університет «ХПІ», Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4558-9598>; e-mail: sokolovddd@gmail.com.

Дьомочка Лідія Владиславівна – доцент кафедри іноземних мов, Національний технічний університет «ХПІ», Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1081-8354>; e-mail: lidadyomochka10@gmail.com.

Raskin Lev Hryhorovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor in the Department of Multimedia Information Technology and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9015-4016>; e-mail: topology@ukr.net.

Sukhomlyn Larisa Vadymivna – Candidate of Technical Sciences (PhD), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Management, Kremenchuk Mikhail Ostrogradskiy National University, Kremenchuk, Ukraine; e-mail: <https://orcid.org/0000-0001-9511-5932>; e-mail: lar.sukhomlyn@gmail.com.

Sokolov Dmytro Dmytrovych – Postgraduate student Postgraduate student in the Department of Multimedia Information Technology and Systems, National Technical University "KhPI", Kharkiv, Ukraine; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4558-9598>; e-mail: sokolovddd@gmail.com.

Domochka Lidia Vladyslavivna – Associate Professor of the Department of Foreign Languages, National Technical University "KhPI", Kharkiv, Ukraine; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1081-8354>; e-mail: lidadyomochka10@gmail.com.

К. В. ЯГУП

ЗАСТОСУВАННЯ КЛАСТЕРНОГО АНАЛІЗУ В МЕРЕЖАХ SMART GRID

Розглянуто задачу розробки та вдосконалення інтелектуальних мультиагентних систем керування, які надають можливості інтелектуального онлайн аналізу електричної системи електропостачання забезпеченою смарт грід системою. Метою статті є формування кластерів ділянок електричної мережі, вихідними параметрами якої є основні показники якості електричної енергії у відповідності із прийнятими стандартами. В якості таких параметрів обрані коефіцієнт несинусоїдальності напруг, коефіцієнт несиметрії живильних напруг, реактивна потужність навантажень. Результати проведеної ієрархічної кластеризації ділянок мережі електропостачання зведені у відповідній дендограмі. Для формування дендограми ділянок системи електропостачання використовується метод повного зв'язку. Такий метод визначає відстань між кластерами як найбільшу відстань між будь-якими об'єктами у різних кластерах чи найбільш віддаленими сусідами. Міра близькості визначалася Евклідовою відстанню. Отримана деревоподібна діаграма демонструє розподіл ділянок розглянутої системи електропостачання на чотири природні кластери, що наочно розділяє ділянки системи електропостачання на окремі групи за визначеними ознаками, а саме основними параметрами якості електричної системи. Показано, що математичний апарат кластерного аналізу дозволяє вирішити задачу класифікації ділянок системи електропостачання при відхиленні основних параметрів якості електричної енергії від нормально допустимих значень. Доведено, що класифікація може проводитися не лише за одним параметром, а і з використання комбінації декількох параметрів. Результати проведеного аналізу надають можливість в подальшому сформулювати продукційні правила вибору заходів щодо покращення якості електричної енергії, що застосовуються до тієї чи іншої ділянки системи електропостачання.

Ключові слова: мережа Smart Grid, кластерний аналіз, якість електричної енергії, експертна система, задача класифікації, вихідні ознаки.

К. V. YAHUP

APPLICATION OF CLUSTER ANALYSIS IN SMART GRID NETWORKS

The task of developing and improving intelligent multi-agent control systems, which provide opportunities for intelligent online analysis of the electrical power supply system provided by the smart grid system, is considered. The purpose of the article is the formation of clusters of sections of the electrical network, the initial parameters of which are the main indicators of the quality of electrical energy in accordance with the accepted standards. Total harmonic distortion coefficient of voltages, coefficient of unsymmetry of supply voltages, reactive power of loads are chosen as such parameters. The results of the hierarchical clustering of power supply network sections are summarized in the corresponding dendrogram. The method of full connection is used to form a dendrogram of sections of the power supply system. This method defines the distance between clusters as the largest distance between any objects in different clusters or the most distant neighbors. The measure of closeness was determined by the Euclidean distance. The obtained tree-shaped diagram demonstrates the distribution of the sections of the power supply system into four natural clusters, which visually divides the sections of the power supply system into separate groups according to certain characteristics, namely the main parameters of the quality of the power system. It is shown that the mathematical apparatus of cluster analysis allows solving the problem of classification of sections of the power supply system when the main parameters of the quality of electric energy deviate from the normally permissible values. It is proved that the classification can be carried out not only by one parameter, but also by using a combination of several parameters. The results of the conducted analysis provide an opportunity to further form production rules for the selection of measures to improve the quality of electric energy, which are applied to one or another section of the power supply system.)

Keywords: Smart Grid network, cluster analysis, quality of electric energy, expert system, classification problem, initial features.

Вступ. Обмеженість енергоресурсів, подорожчання різноманітних видів органічного палива, проблеми старіння і зносу мережевого господарства, аварії та руйнування, що трапляються в лініях електропередачі, збільшення використання електроенергії в побутових умовах ставлять нові виклики енергосистемі України і вимагають пошуку нових засобів ефективної економії електричної енергії і підвищення її якості.

Нові можливості в цих напрямках відкриває розвиток інтелектуальних електроенергетичних систем (Smart grid) – модернізованих мереж електропостачання, що дозволяють автоматично підвищувати енергоефективність, надійність, збільшувати економічний ефект тощо, на основі проведеного збору і аналізу інформації, завдяки вимірюванням показників електричної енергії по всім ділянкам електричної мережі [1].

Одним з пріоритетних напрямків реалізації технології смарт грід є використання інтелектуальних

мультиагентних систем керування, які надають можливості інтелектуального онлайн аналізу електричної системи електропостачання, на підставі архівних даних і даних, які надходять в реальному часі [2–5]. Важливим в цьому аспекті є дослідження використання тих чи інших методів збору та аналізу інформації і вибору подальших алгоритмів дій, наприклад, інтелектуальному моделюванню спрацьовування різноманітних пристроїв автоматики, визначенні потенційних проблем в експлуатації, прогнозування відгуку системи на дії оператора; реалізація сценаріїв «що – якщо».

Важливу роль в організації таких технологій відіграє оптимізація процесу заходів за допомогою експертної системи, основою якої є база знань.

У такій сфері облік отриманої інформації може бути використаний з метою формування продукційних правил вибору заходів щодо поліпшення якості електричної енергії, що застосовуються до тієї чи іншої ділянки системи електропостачання за короткий проміжок часу.

© К. В. Ягуп, 2022



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом НТУ «ХПИ» у збірнику «Вісник Національного технічного університету "ХПИ" Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). Конфлікт інтересів: Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



Суть таких правил полягає у вживанні відповідних організаційних заходів щодо підвищення якісних показників електричної енергії, розподіл яких здійснюється інтелектуальними системами виходячи з аналізу отриманих даних.

Першочерговим у такому підході є автоматичне визначення класу заходів, які необхідно застосувати до ділянки електричної мережі, наприклад, вмиканням корегувального пристрою, що підвищує енергетичні показники системи електропостачання (фільтри, інвертори тощо) або способом регулювання вже наявним пристроєм (налаштуванням параметрів компенсуювальних пристроїв, випрямлячів і т. п.). При такому підході ключовим етапом є застосування кластерного аналізу, який надає можливість класифікувати ділянки системи електропостачання за окремими ознаками [6–11].

Мета дослідження. Метою статті є дослідження можливостей застосування кластерного аналізу, щодо виокремлення ділянок системи смарт грид за основними показниками якості електричної енергії, що застосовуються в енергетиці.

Основний текст. Математичний апарат кластерного аналізу надає можливість розбиття множини об'єктів, що досліджуються, і ознак, на однорідні у відповідному розумінні групи або кластери. Тобто кластерний аналіз дозволяє вирішити задачу класифікації даних та визначення відповідної структури. Для підвищення якості електроенергії важливо розрізнити ділянки системи електропостачання, за окремими ознаками, до яких можна буде застосувати відповідні заходи, щодо покращення електроенергетичних показників. Вибір ділянок електричної мережі із показниками якості електричної енергії, замірними протягом деякого часу в даному випадку представляє собою базу проведення кластерного аналізу. Вибір вхідних параметрів для проведення кластерного аналізу виконаємо згідно із основними стандартами [12], що використовуються на даний час.

Такими параметрами мають бути наступні суттєві показники якості електричної енергії: коефіцієнт несинусоїдальності напруг системи електропостачання (що відображає викривлення синусоїдальної форми

напруги в мережі та наявність вищих гармонічних складових у мережі), коефіцієнт несиметрії струмів (що демонструє нерівномірність навантаження фаз системи електропостачання) та реактивна потужність навантаження (що обумовлює втрати в лінії електропередачі).

В дослідженні розглядаються величини вихідних параметрів ділянок системи електропостачання низького класу напруг 0,4 кВ, відображені в табл. 1. Дослідження проводиться для дванадцяти ділянок системи електропостачання. Кожні три ділянки мають один (чи два) параметр, який суттєво відхиляється від норми, а саме – перші три мають значне відхилення від норми коефіцієнту несиметрії, друга група – великі значення реактивної потужності, третя – значні відхилення від норми коефіцієнту несиметрії, четверта група має відхилення одночасно за коефіцієнтом несиметрії і реактивною потужністю.

Для отримання правил виокремлення ділянок електричної мережі з метою призначення рекомендацій для покращення енергетичних показників дослідимо можливості використання кластерного аналізу статистичних даних із загальними ознаками. Метою даного аналізу є розбиття ділянок системи електропостачання на класи, кожен із яких відповідає певній групі, до якої надалі можна буде застосувати певний комплекс заходів. Таким чином, до одного класу повинні потрапляти ділянки системи електропостачання з максимально схожими відхиленнями від норми показниками електричної енергії.

Виходячи з отриманих результатів класифікації ділянок, можна застосувати комплекс заходів для поліпшення якості електричної енергії для виокремленого класу ділянки електричної мережі, а саме сформувані продукційні правила вибору заходів щодо покращення якості електричної енергії.

Для проведення кластерного аналізу обрано спеціалізований статистичний пакет Statistica, що дозволяє застосувати найсучасніші методи математичної статистики для обробки даних. Крім того, важливою перевагою цього пакету є зручність його використання, швидкість виконання обчислень та широкі графічні можливості.

Таблиця 1 – Показники вимірів основних параметрів на дванадцяти ділянках електричної мережі SmartGrid

Номер ділянки	Активна потужність	Напруга	Струм навантаження	Коефіцієнт несиметрії	Реактивна потужність	Коефіцієнт несинусоїдальності
1	1080	400	2,7	2,7	127	0,3
2	1800	400	4,5	0,7	210	4,8
3	3120	400	7,8	3,25	405	0,8
4	2840	400	7,1	4,45	115	0,4
5	920	400	2,3	0,7	418	0,3
6	1520	400	3,8	0,6	450	0,4
7	2520	400	6,3	3,67	390	0,8
8	1600	400	4	0,6	168	3,96
9	2400	400	6	0,5	470	0,5
10	2240	400	5,6	3,05	167	0,5
11	3240	400	8,1	2,95	350	0,8
12	1040	400	2,6	0,5	123	4,16

Таблиця 2 – Вихідні данні інтелектуальної системи після виконання операції стандартизації над основними показниками якості електричної енергії

Номер ділянки	Активна потужність	Напруга	Струм навантаження	Коефіцієнт несиметрії	Реактивна потужність	Коефіцієнт несинусоїдальності
1	1080	400	2,7	0,486083	-1,09616	-0,68162
2	1800	400	4,5	-0,85023	-0,51201	1,925136
3	3120	400	7,8	0,853569	0,860391	-0,39198
4	2840	400	7,1	1,655355	-1,18062	-0,62369
5	920	400	2,3	-0,85023	0,951885	-0,68162
6	1520	400	3,8	-0,91704	1,1771	-0,62369
7	2520	400	6,3	1,134194	0,754822	-0,39198
8	1600	400	4	-0,91704	-0,80761	1,438542
9	2400	400	6	-0,98386	1,317859	-0,56576
10	2240	400	5,6	0,719938	-0,81464	-0,56576
11	3240	400	8,1	0,653122	0,473303	-0,39198
12	1040	400	2,6	-0,98386	-1,12432	1,554397

Наочною демонстрацією розбиття ділянок систем електропостачання на кластери за окремими ознаками має бути побудова дендограми.

Наведені в табл. 1 параметри, використовують різноманітні одиниці вимірювання, що зумовлює необхідність їхньої нормалізація – що приведе до безрозмірних одиниць і надасть в подальшому можливість вимірювання близькості об'єктів [13, 14].

Результати виконання нормалізації зведені в табл. 2.

Техніка нормування зводить данні до єдиного масштабу, що надає можливість відображати данні в різних одиницях вимірювання відобразити в єдиній системі координат. В розглянутому дослідженні данні були нормалізовані відніманням середнього і діленням на стандартне відхилення, таким чином, що дисперсія стала рівною одиниці.

Для побудови дендограми ділянок системи електропостачання використовувався метод повного зв'язку. Такий метод визначає відстань між кластерами як найбільшу відстань між будь-якими об'єктами у різних кластерах чи найбільш віддаленими сусідами.

Міра близькості визначалася Евклідовою відстанню (відстанню за прямою) за формулою

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (1)$$

При виконанні кластерного аналізу в якості об'єктів використовувалися спостереження, а саме, дванадцять ділянок системи електропостачання, а в якості змінних використовувалися показники якості електричної енергії – коефіцієнт несиметрії, реактивна потужність та коефіцієнт несинусоїдальності.

Отримана деревоподібна діаграма (рис. 1) дозволяє зробити висновок, що ділянки системи електропостачання утворюють чотири природні кластери.

До першої групи увійшли ділянки C_2, C_8, C_12, в яких загальна ознака – відхилення коефіцієнту несинусоїдальності від нормально допустимих значень. Другий кластер утворює множину ділянок C_5, C_6, C_9 з високим показником реактивної потужності. До третього кластеру відносяться ділянки C_3, C_7, C_11 що мають відхилення відразу по двом параметрам – коефіцієнту несиметрії та реактивною потужністю. До четвертого окремого кластеру увійшли ділянки C_1, C_4 і C_10 із коефіцієнтом несиметрії, значення якого бажано знизити. Згідно з дендограмою друга, третя і четверта групи кластерів об'єднані в одну групу, яку можна трактувати, що ці групи мають загальні ознаки – відхилення від нормально допустимих значень двох параметрів, а саме реактивної потужності і коефіцієнту несиметрії.

Таким чином в результаті виконаного дослідження показано, що застосування кластерного аналізу надає можливість ефективно виокремлювати ділянки системи електропостачання за основними показниками якості електричної енергії.

Висновки. 1. Визначені основні ознаки, по яким можна проводити кластерізацію ділянок електричної мережі. Такими ознаками мають бути основні показники якості електричної енергії – коефіцієнт несиметрії, реактивна потужність та коефіцієнт несинусоїдальності.

2. Показано, що математичний апарат кластерного аналізу дозволяє вирішити задачу класифікації ділянок системи електропостачання при відхиленні основних параметрів якості електричної енергії від нормально допустимих значень.

3. Доведено, що класифікація може проводитися не лише за одним параметром, а і з використання комбінації декількох параметрів. У такому випадку ділянки системи із двома показниками були виділені в окремий кластер.

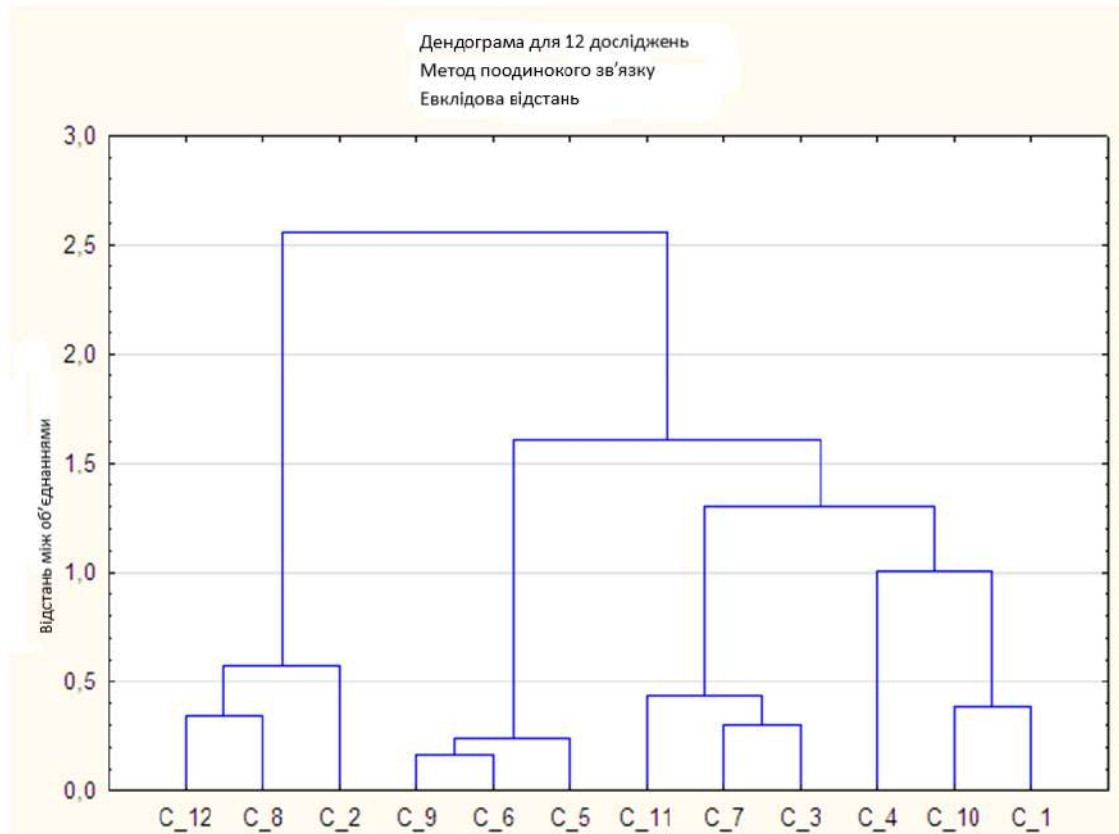


Рис. 1. Ієрархічна кластеризація ділянок мережі електропостачання

4. Результати проведеного аналізу дозволять в подальшому сформулювати продукційні правила вибору заходів щодо покращення якості електричної енергії, що застосовуються до виокремлених класів ділянок системи електропостачання.

Список літератури

1. Bagdadee A. H. Smart Grid: A Brief Assessment of the Smart Grid Technologies for Modern Power System. *Journal of Engineering Technolog.* 2019. Vol. 8. P. 122–142.
2. Melike E. K., Mouftah H. T. Energy-efficient information and communication infrastructures in the smart grid: a survey on interactions and open issues. *IEEE Commun Surv Tutor.* 2015. No. 17 (1). P. 179–196.
3. Spanò E., Niccolini L., Pascoli S., Iannaccone G. Last meter smart grid embedded in an internet-of-things platform. *IEEE Trans Smart Grid.* 2015. Vol. 6 (1). P. 468–75.
4. Benysek G., Kazmierkowski M. P., Popczyk J., Strzelecki R. Power electronic systems as a crucial part of Smart Grid infrastructure – a survey. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 2011. Vol. 59, no. 4. P. 455–473.
5. Денисюк С. П., Стшелєцькі Р. Формування складових інтелектуальної платформи керування енергетичними системами та мережами. *Енергетика: економіка, технології, екологія: науковий журнал.* 2019. № 3 (57). С. 7–22.
6. Гаврилова Т. А., Хорошевский В. Ф. *Базы знаний интеллектуальных систем.* Санкт-Петербург: Питер, 2000. 384 с.
7. Григорьев А. А. Кластерный анализ как инструмент обработки данных при анализе информационных систем. *Известия российского экономического университета им. Г. В. Плеханова.* 2013. № 1 (11). С. 36–48.
8. Барсегян А. А., Куприянов М. С., Степаненко В. В., Холод И. И. *Методы и модели анализа данных: OLAP и DataMining* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004. 336 с.

9. Волосюк Ю. В. Аналіз алгоритмів кластеризації для задач інтелектуального аналізу даних. *Збірник наукових праць Військового інституту Київського національного університету ім. Тараса Шевченка.* 2014. Вип. 47. С. 112–119.
10. Gulak D. Using cluster analysis for research of Ukrainian electricity market. *TheScientificHeritage.* Budapest, 2017. No. 10 (10). P. 23–26.
11. Мандель И. Д. *Кластерный анализ.* Финансы и статистика, Москва, 1988. 176 с.
12. ГОСТ 13109-97. *Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения.* Москва: ИПК Издательство стандартов, 1998. 35 с.
13. Стукач О. В. *Программный комплекс STATISTICA в решении задач управления качеством: учебное пособие.* Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2011. 16 с.
14. Буреева Н. Н. *Многомерный статистический анализ с использованием ППП "STATISTICA". Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Применение программных средств в научных исследованиях и преподавании математики и механики».* Нижний Новгород, 2007. 112 с.

References (transliterated)

1. Bagdadee A. H. Smart Grid: A Brief Assessment of the Smart Grid Technologies for Modern Power System. *Journal of Engineering Technolog.* 2019, vol. 8, pp. 122–142.
2. Melike E. K., Mouftah H. T. Energy-efficient information and communication infrastructures in the smart grid: a survey on interactions and open issues. *IEEE Commun Surv Tutor.* 2015, no. 17 (1), pp. 179–196.
3. Spanò E., Niccolini L., Pascoli S., Iannaccone G. Last meter smart grid embedded in an internet-of-things platform. *IEEE Trans Smart Grid.* 2015, no. 6 (1), pp. 468–75.
4. Benysek G., Kazmierkowski M. P., Popczyk J., Strzelecki R. Power electronic systems as a crucial part of Smart Grid infrastructure – a

- survey. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*. 2011, vol. 59, no. 4, pp. 455–473.
5. Denisjuk S. P., Stsheletski R. Formuvannya skladovikh intelektualnoi platformi keruvannya energetichnimi sistemami ta merezhami [Formation of components of an intelligent platform for managing energy systems and networks]. *Energetika: ekonomika, tekhnologii, ekologiya: naukoviy zhurnal* [Energy: economy, technology, ecology: scientific journal]. 2019, no. 3 (57), pp. 7–22.
 6. Gavrilova T. A., Khoroshevskiy V. F. *Bazy znaniy intelektualnykh system* [Knowledge bases of intelligent systems]. Saint Petersburg, Piter Publ., 2000. 384 p.
 7. Gpigopev A. A. Klasternyy analiz kak instrument obrabotki dannykh pri analize informatsionnykh system [Cluster analysis as a data processing tool in the analysis of information systems]. *Izvestiya rossiyskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova* [Proceedings of the Russian University of Economics after G. V. Plekhanov]. 2013, no. 1 (11), pp. 36–48.
 8. Barsegyan A. A., Kupriyanov M. S., Stepanenko V. V., Kholod I. I. *Metody i modeli analiza dannykh: OLAP i Data Mining*. [Methods and models of data analysis: OLAP and DataMining]. Saint Petersburg, BHV-Peterburg Publ., 2004. 336 p.
 9. Volosyuk Yu. V. Analiz algoritmv klasterizatsii dlya zadach ntektualnogo analizu danikh [Analysis of clustering algorithms for data mining tasks]. *Zbirnik naukovikh prats Viyskovogo institutu Kiivskogo natsionalnogo universitetu im. Tarasa Shevchenka*. [Collection of scientific works of the Military Institute of Kyiv National University named after Taras Shevchenko]. 2014, no. 47, pp. 112–119.
 10. Gulak D. *Using cluster analysis for research of Ukrainian electricity market*. The scientific heritage (Budapest). 2017, no. 10 (10), pp. 23–26.
 11. Mandel I. D. *Klasternyy analiz* [Cluster analysis]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1988. 176 p.
 12. GOST 13109-97. *Elektricheskaya energiya. Sovmestimost tehnicheskikh sredstv elektromagnitnaya. Normy kachestva elektricheskoy energii v sistemah elektrosnabzheniya obshogo naznacheniya* [Electric Energy. Compatibility of technical means is electromagnetic. Standards for the quality of electrical energy in general-purpose power supply systems]. Moscow, IPK Izdatelstvo standartov Publ., 1998. 35p.
 13. Stukach O. V. *Programmnyy kompleks STATISTICA v reshenii zadach upravleniya kachestvom: uchebnoye posobiye* [Program complex STATISTICA in solving problems of quality management: a tutorial.]. Tomsk, Izdatelstvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta Publ., 2011. 16 p.
 14. Bureyeva N. N. *Mnogomernyy statisticheskiy analiz s ispolzovaniyem PPP "STATISTICA". Uchebno-metodicheskiy material po programme povysheniya kvalifikatsii «Primeneniye programnykh sredstv v nauchnykh issledovaniyakh i prepodavanii matematiki i mekhaniki»* [Multivariate statistical analysis using STATISTICA AP. Educational and methodological material for the advanced training program "Application of software in scientific research and teaching of mathematics and mechanics"]. Nizhny Novgorod, 2007. 112 p.

Надійшла (received) 15.10.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Ягуп Катерина Валеріївна – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри ПІІТУ; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/orcid.org/0000-0002-9305-8169>; e-mail: kata3140@gmail.com

Yagup Kateryna Valeriivna – Doctor of Technical Sciences, professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", professor of the department of PIITC; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/orcid.org/0000-0002-9305-8169>; e-mail: kata3140@gmail.com

С. В. ШЕВЧЕНКО

КОНСТРУЮВАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ РІШЕНЬ ЗАДАЧ ВИБОРУ

Розглядається підхід до вирішення задач багатокритеріального вибору з визначенням доцільних претендентів на підставі значень ряду критеріїв. Відомі підходи до вирішення цих задач не завжди дозволяють визначати обґрунтовані рішення з повноцінним врахуванням особливостей обраних критеріїв та умов їх оцінювання. Порівняння оцінок по критеріям часто відбувається з суб'єктивних позицій без належних обґрунтувань, що позначається як на результатах вибору, так і на можливостях їх практичного застосування. Відомі процедури багатокритеріального вибору використовують фіксовані шкали вимірювання для порівняння значень, які в практичних ситуаціях можуть не відповідати реальним співвідношенням показників. Іншим суттєвим недоліком цих процедур є ігнорування наявності нелінійних залежностей між оцінками за критеріями та атрибутами рішень, що приймаються, у різних діапазонах їх значень. Перелічене свідчить про можливість отримання неадекватних оцінок рішень з відповідними негативними наслідками. В роботі пропонується підхід до конструювання рішень багатокритеріальних задач вибору на основі визначення претендентів шляхом упорядкування їх за ступенем наближення до варіанту з кращими співвідношеннями оцінок по обраним критеріям ефективності на основі ітеративних поступок за зазначеними критеріями. Порівняння претендентів відбувається на підставі співвідношень оцінок за узгодженими критеріями, визначення яких забезпечується сукупністю математичних моделей, що відтворюють залежності значень окремих критеріїв від атрибутів претендентів рішень. Формування послідовності претендентів рішень відбувається на основі результатів порівнянь за окремими критеріями, що дозволяє визначати альтернативні варіанти рішень та їх оцінки ефективності з побудовою підмножини Парето. Розглянуто приклад зазначеного процесу вибору альтернативних варіантів побудови віртуальної системи обробки даних на основі характеристик віртуальних машин від провайдерів технологій хмарної обробки. Отримані результати досліджень свідчать про можливість використання підходу, що пропонується, у складі підсистем підтримки прийняття рішень для вирішення задач оперативного управління динамічними процесами обслуговування та виробництва.

Ключові слова: задачі вибору, критерії, багатокритеріальний вибір, конструювання рішень, метод уступок, підсистеми прийняття рішень.

S. V. SHEVCHENKO

CONSTRUCTION OF MULTI-CRITERIA SOLUTIONS TO SELECTION PROBLEMS

An approach to solving the problems of multi-criteria selection with the determination of suitable applicants based on the values of a number of criteria is considered. Known approaches to the solution of these problems do not always allow determining reasonable solutions with full consideration of the features of the selected criteria and their evaluation conditions. Comparison of evaluations by criteria often takes place from subjective positions without proper justification, which affects both the results of the selection and the possibilities of their practical application. Known multi-criteria selection procedures use fixed measurement scales to compare values, which in practical situations may not correspond to real ratios of indicators. Another significant shortcoming of these procedures is ignoring the presence of non-linear dependencies between evaluations by criteria and attributes of decisions made in different ranges of their values. The above indicates the possibility of obtaining inadequate evaluations of decisions with corresponding negative consequences. The paper proposes an approach to the construction of solutions to multi-criteria selection problems based on the definition of applicants by ordering them according to the degree of approximation to the option with the best ratios of evaluations according to the selected performance criteria based on iterative concessions according to the specified criteria. Applicants are compared on the basis of the ratios of assessments according to the agreed criteria, the definition of which is provided by a set of mathematical models that reproduce the dependence of the values of individual criteria on the attributes of the applicant decisions. The formation of a sequence of candidates for solutions is based on the results of comparisons according to individual criteria, which allows to determine alternative solutions and evaluate their effectiveness with the construction of a Pareto subset. An example is considered that reproduces the processes of choosing alternative options for building a virtual data processing system based on the characteristics of virtual machines from providers of cloud processing technologies. The obtained research results indicate the possibility of using the proposed approach as part of decision-making support subsystems to solve the problems of operational management of dynamic service and production processes.

Keywords: selection problems, criteria, multi-criteria selection, construction of decisions, method of concessions, decision-making subsystems.

Вступ. Задачі вибору – це задачі, вирішення яких призначене для багатокритеріального обґрунтування рішень, серед яких має бути обраним один або декілька доцільних варіантів. Для багаторазового вирішення таких задач можуть бути розроблені відповідні інформаційні технології в підсистемах підтримки прийняття рішень у різних предметних областях. При формуванні рішень використовується деяка ієрархія критеріїв якості претендентів вибору, притаманна предметній області претендентів, їх особливостям, використанню та обставинам, що склалися.

Вибір критеріїв покладається на особу, що приймає рішення, і, як правило, є суб'єктивним, враховуючи зовнішні та внутрішні чинники, що впливають на процес вибору.

Врахування ієрархії критеріїв дозволяє формалізувати процес оцінки претендентів.

Для обґрунтування рішень задачі багатокритеріального вибору, окремих аспектів підготовки та прийняття рішень запропоновано багато підходів, які базуються на інформації, що доступна на момент прийняття рішень. В основі зазначених підходів здебільшого використовується порівняння претендентів по рівню відповідності висунутим критеріям якості, які в свою чергу можуть бути формалізовані з різними ступенями визначеності, що відповідають прийнятному рівню достовірності, і дозволяють отримати дані для реалізації процесу вибору претендентів рішення в умовах обмежених ресурсів з урахуванням оцінок по обраним критеріям.

© С. В. Шевченко 2022



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом *НТУ «ХПІ»* у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХПІ» Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



Але при цьому передбачається наявність низки умов, які не завжди виконуються на практиці. Це, наприклад, сама можливість порівнянь оцінок, що відповідають якісно різним та несумісним предметним областям, припущення про існування лінійних співвідношень між діапазонами значень оцінок порівнянь та ін.

Постановка задачі. Умови отримання результатів вирішення задачі, що розглядається, містять наступне. Окремі варіанти вирішення задачі багатокритеріального вибору оцінюються з позицій ряду обраних локальних критеріїв ефективності і по отриманих результатах порівнянь повинні бути найкращими. Поняття найкращого рішення та процес його визначення мають бути повністю формалізованими. Використання зазначеного процесу повинне забезпечувати отримання обґрунтованих результатів. Наявність сукупності критеріїв, особливості їх визначення, а також, як правило, суперечливість потребують пошуку механізмів узгодження рішень та визначення компромісних варіантів підмножини Парето-оптимальних рішень.

В процесі порівняння претендентів вибору за окремими критеріями при визначенні рівня переваг за одними критеріями перед іншими та формуванні підсумкових оцінок ефективності, що покладені в основу існуючих підходів багатокритеріальних оцінок, виникає ряд об'єктивних перешкод, пов'язаних з неоднорідністю критеріїв, наявністю серед них нелінійних взаємозалежностей у різних діапазонах порівнянь, неузгодженістю значень, відсутністю обґрунтованих шкал вимірювання та оцінювання для порівняння значень оцінок за критеріями.

Гетерогенність та суперечливість сукупності критеріїв, що можуть застосовуватися для оцінки ефективності рішень в окремих предметних областях, вимагає побудови обґрунтованих, прозорих та достовірних процедур їх порівняння з урахуванням чинників рівня важливості та прийнятної трудомісткості отримання результатів, особливо в умовах обчислень у реальному часі.

Перелічені умови та вимоги до вирішення задачі багатокритеріального вибору потребують розробки та застосування адекватних підходів до формування правил порівняння значень різномірних локальних критеріїв оцінки ефективності рішень з різними рівнями важливості, до формування інтегральних підсумкових оцінок ефективності претендентів вибору на підставі отриманих результатів порівнянь значень локальних критеріїв, до механізмів узгодження та пошуку збалансованих рішень, яким відповідають визначені претенденти вирішення задачі багатокритеріального вибору.

Відмічені процедури повинні бути реалізовані у складі інформаційних технологій, які дозволяють виконувати необхідні обчислення та досліджувати отримані результати.

Більшість процесів управління, особливо, в ринкових умовах, процесів проектування складних систем та технологій пов'язана з необхідністю вирішення задачі багатокритеріального вибору доцільних варіан-

тів серед доступної множини альтернативних претендентів. Саме тому вирішенню цих задач присвячено досить багато публікацій.

Серед них одним з відомих є метод аналізу ієрархій (MAI), запропонований Т. Сааті [1]–[3]. Метод дозволяє визначити пріоритети окремих альтернативних рішень, що розглядаються, спираючись на отримані експертні оцінки по сукупності обраних критеріїв ефективності. Для порівнянь використовується лінгвістична шкала, якій відповідають фіксовані вагові коефіцієнти. Маючи досить багато припущень, метод може доцільно використовуватися в обмежених умовах, не забезпечуючи повноцінне врахування всіх обставин та особливостей умов прийняття рішень. Незважаючи на це, простота застосування методу привела до досить поширеного його застосування [4]–[9].

Існує багато прикладів модифікації MAI, які направлені на усунення окремих недоліків методу або на врахування умов його застосування [7]–[9].

Ряд інших підходів ґрунтуються на використанні переваг вирішення задачі з одним критерієм змінюю представлення вихідної задачі внаслідок поєднання всіх критеріїв в один або визначенні серед них основного та переміщенні останніх у склад обмежень [10]–[11]. Такі підходи є доцільними, як правило, для окремих класів практичних задач з сумісними критеріями.

Для задач з суперечливими критеріями вирішення мають бути отримані на основі пошуку компромісних рішень, що досягаються шляхом прийняття деякої згоди на співвідношення між значеннями критеріїв, що порівнюються. Це найбільш поширений клас практичних задач і їх вирішенню присвячені роботи з побудовою підмножини Парето-оптимальних рішень та результатами додаткових досліджень особливостей умов прийняття рішень [12]–[13].

Одним з поширених підходів до формування Парето-оптимальної підмножини є використання методу поступок. Метод передбачає у ході пошуку компромісного рішення виконання поступок по оцінкам значень за окремими критеріями для послідовності рішень, що визначаються. Відомі застосування методу обмежені реалізаціями в заданих умовах.

Широке коло публікацій за даним напрямком досліджень свідчить про їх актуальність та про наявність не повністю вирішених питань.

Дана робота присвячена формуванню підходу, який дозволяє конструювати вирішення задачі багатокритеріального вибору в розглянутому колі питань.

В роботі пропонується підхід до вирішення задачі багатокритеріального вибору як послідовності визначень окремих локальних рішень у складі загального рішення, які підлягають подальшому ітераційному узгодженню з позицій вимог до використання ресурсів. Такий підхід дозволяє формувати рішення як композицію рішень, що побудовані на підставі порівнянь якості претендентів згідно оцінок значень обраних критеріїв ефективності, враховуючи їх важливість та обсяги ресурсів, необхідних для досягнення визначеного рівня оцінки ефективності.

Будемо вважати, що претенденти вибору можуть бути порівняні між собою за значеннями введених критеріїв ефективності, що складають множину F

$$F = \{f_i\}, i \in I = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Множину критеріїв F , що визначають доцільність обрання тих чи інших претендентів, та серед яких має бути обраний найкращий варіант, можна розділити на дві підмножини критеріїв $F = F_1 \cup F_2$ з відповідним розподілом множини $I = I_1 \cup I_2$.

До підмножини F_1 віднесемо критерії, які використовуються у ситуаціях відсутності повноцінної достовірної інформації відносно оцінок якості претендентів вибору, виявлення ряду чинників, що мають невизначений характер впливу на рівень оцінок, а також таких, що відображають суб'єктивні уподобання особи, яка приймає рішення. Прикладом критеріїв цієї групи можна вважати рейтинги претендентів вибору у різних умовах обрання, рейтинги представників та посередників, пов'язаних з походженням альтернативних варіантів, експертні оцінки зовнішніх умов, що впливають на вибір і використання претендентів.

Оцінки та обґрунтування претендентів вибору для цієї групи критеріїв можуть бути отримані аналогічно підходів, наведених у роботах [7]-[8]. Застосування критеріїв даної групи може суттєво обмежити сукупність варіантів вибору по більшості якісних характеристик претендентів, але не дозволяє повноцінно зіставити у порівняннях сукупності об'єктивних показників та можливостей претендентів. Тому для проведення повноцінного обґрунтування вибору доцільних варіантів склад критеріїв доповнюється критеріями підмножини F_2 , використання яких розглядається у даній роботі.

Підмножина критеріїв F_2 може бути визначена такими, що відображають суттєві атрибути, притаманні сукупності альтернативних варіантів, системні та синергетичні характеристики претендентів, особливості їх використання, фінансові та економічні характеристики.

Множина допустимих рішень задачі задається множиною D , яка містить сукупність претендентів вибору у вигляді векторів X_j , $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$, кожен з яких повністю відповідає умовам вибору.

Компоненти векторів претендентів вирішення задачі $X_j = \{x_{ij}\}$, $j \in J$, обмежені відповідними підмножинами G_i , $i \in I$, елементи яких визначають допустимі значення атрибутів та характеристик.

Тоді множина допустимих рішень задачі може бути представлена наступним чином

$$D = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} : X_j = \{x_{ij}\}, x_{ij} \in G_i, i \in I, j \in J.$$

Використання сукупності критеріїв ефективності для оцінки претендентів вибору дозволяє розробити процедуру побудови підмножини Парето-оптимальних рішень, серед елементів якої може бути обраний

претендент, і який на погляд ОПР найбільше відповідає вимогам обставин та ситуацій на момент прийняття рішення.

Застосування першої групи критеріїв дозволяє виділити підмножину D_0 , $D_0 \subseteq D$, яка обмежує сукупність варіантів вибору претендентів, що підлягають аналізу.

Підмножина D_0 може бути визначена наступним чином

$$D_0 = \{X_j \in D : q_{ij} = f_i(X_j) \geq p_i, i \in I_1, j \in J\},$$

де $P = \{p_i\}$ – вектор експертних оцінок допустимих значень обраних критеріїв ефективності претендентів вибору.

Використання другої групи критеріїв дозволяє побудувати процедуру визначення підмножини ефективних рішень D_f , $D_f \subset D_0 \subseteq D$, елементи якої відповідають умовам Парето-оптимальних рішень для претендентів вибору.

Будемо вважати, що критерії ефективності мають оцінки рівня важливості $\{r_i\}$, $i \in I$. Якщо провести упорядкування критеріїв у складі підмножини $I_2 = \{1, 2, \dots, k\}$ по спаданню значень їх оцінок рівня важливості, то отримаємо підмножину I_2

$$I_2 = \{i_1, i_2, \dots, i_k \in I_2 : r_{i_1} \geq r_{i_2} \geq \dots \geq r_{i_k}\}.$$

Використання підмножини I_2 дозволяє виконувати обчислення, починаючи з оцінок для найбільш важливих критеріїв, що сприяє підвищенню адекватності результатів обчислень.

Пропонується обирати претендентів вирішення задачі багатокритеріального вибору у складі послідовності підмножин D_1, D_2, \dots, D_f , визначення яких забезпечує наступна процедура формування підмножини ефективних рішень претендентами з послідовним врахуванням значень оцінок локальних критеріїв зі спаданням важливості у наступній послідовності обчислень:

1. Нехай номер ітерації $l = 1$.
2. Визначимо

$$D = \left\{ X_i^* \in D_{l-1} : X_i^* = \arg \min_{X \in D_{l-1}} (\max) f_i(X), i \in I_2 \right\}.$$

3. Якщо $|D| = 1$, то $X_l^* \in D$ є рішенням задачі.

4. Якщо $|D| > 1$, то визначимо $D_l = D_{l-1} \setminus D$.

5. Якщо $|D_l| > 1$, то вважаємо $l = l + 1$ і повторюємо обчислення з пункту 2.

6. Якщо $|D_l| = \emptyset$, то маємо $D_f = D_{l-1}$.

В результаті проведення даних обчислень буде отримано або рішення, що відповідає компромісним значенням всіх критеріїв, або підмножина D_f , елементи якої не можуть бути поліпшені за значеннями обраних критеріїв ефективності.

Запропонована процедура є кінцевою в силу використання підмножин, визначених на підставі кінцевих множин D та I_2 , елементи яких послідовно залучаються при виконанні обчислень, а також в наслідок послідовного обмеження підмножини рішень за рахунок вилучення претендентів з екстремальними значеннями локальних критеріїв ефективності.

Очевидно, що при відсутності даних щодо важливості критеріїв, зміст обчислень не змінюється.

Ітеративне застосування механізму поступок за рахунок вилучення чергових претендентів згідно отриманих їх визначень за поточними значеннями локальних критеріїв з підмножини I_2 , призводить до вибору наступних претендентів, забезпечуючи пошук рішень серед таких їх представників, що мають краще поєднання значень обраних критеріїв.

При виборі нових претендентів буде спостерігатися погіршення оцінок, що були визначені для попередніх претендентів без змін загальних обсягів ресурсів або необхідність їх збільшення та можливого наступного перерозподілу. Такі співвідношення будуть свідчити про наближення чергових претендентів до тих, що відповідають умовам Парето-оптимальності [12].

Побудова та подальше застосування будь-яких систем потребує використання ресурсів, що визначаються обсягами та ринковою оцінкою вартості. Тому серед основних чинників, що впливають на рівень оцінок претендентів згідно значень критеріїв підмножини I_2 , слід віднести частки обсягів спільних ресурсів, розподіл та перерозподіл яких створює можливість формування підмножини ефективних рішень D_f . Для врахування впливу цих чинників на процеси вибору необхідно побудувати математичні моделі, що відображують функціональні залежності оцінок значень локальних критеріїв ефективності від параметрів претендентів та виділених обсягів ресурсів.

Будемо вважати, що ці залежності відомі і мають наступний вигляд

$$q_{ij} = f_i(X_j), X_j \in D_j, i \in I, j \in J.$$

Проведення обчислень при визначенні рішень задач багатокритеріального вибору розглянемо на прикладі формування архітектури віртуальної системи обробки даних у середовищі хмарних обчислень.

Розглянемо особливості цих задач.

Актуальність застосування технологій хмарних обчислень обумовлена зростаючим переліком послуг та можливістю у поєднанні з привабливими економічними умовами процесів використання ресурсів віртуальних обчислювальних систем.

Ефективність таких рішень обумовлена визначенням вартості інформаційних послуг, технологій та ресурсів сучасних високопродуктивних комп'ютерних систем з встановленим програмним забезпеченням та обробки даних тільки за безпосередній час проведення обчислень або користування. Спостерігається наявність загальної тенденції збільшення частки безкоштовних тарифів.

Враховуючи потреби замовників виконання процедур обробки даних, можна обрати архітектуру віртуальної системи, яка найбільше відповідає вимогам обробки та обраним критеріям.

Серед критеріїв ефективності, що сприяють обґрунтуванню рішень при виборі архітектури віртуальних машин, слід розглянути вартість послуг обробки даних, вартість обсягів використання обчислювальних ресурсів віртуальної комп'ютерної системи, час обробки даних, готовність системи обробки до реалізації обчислень у момент звертання, надійність виконання обчислень, вартість обсягів і часу зберігання даних замовника та ін.

Враховуючи динамічність змін потреб у використанні технологій віртуальної обробки даних, високі показники готовності віртуальних обчислювальних засобів, їх ефективність та можливість оперативної варіації обсягами ресурсів, що використовуються під час обробки, перелік критеріїв до систем віртуальної обробки може бути обмежений врахуванням її вартості, продуктивності та часу виконання обчислень.

Попередній вибір бажаних варіантів архітектури від провайдерів може бути виконано з використанням нечіткої логіки. Детальний аналіз претендентів має бути проведений відповідно до вищенаведених положень.

Багатокритеріальний аналіз альтернатив вирішення задачі, що розглядається, складається в упорядкуванні елементів множини варіантів побудови архітектури системи обробки даних за обраними критеріями.

В цілому задача вибору провайдера хмарних обчислень з розподілом обсягів робіт обробки даних може бути представлена математичною моделлю дискретного програмування з векторним критерієм у наступній постановці.

Для відомих на момент часу t множини можливих станів Ω , поточного стану системи $S_i \in \Omega$, вектору вхідних даних X_t , що потребують обробки, необхідно знайти значення вектору управління $Y_t \in D$, який забезпечує на момент часу $\tau \geq t$ потрібну зміну стану системи $S_i(t) \rightarrow S_k(\tau) \in \Omega$ з екстремальним значенням векторного критерію ефективності:

$$F(X_t, Y_t, S_k(t), S_k(\tau)) \rightarrow \text{extr}, \quad (1)$$

$$S_i(t) \rightarrow S_k(\tau), \tau \geq t, \quad (2)$$

$$S_i, S_k \in \Omega, Y_t \in D. \quad (3)$$

Врахування важливості окремих критеріїв надає можливість виконати пошук рішень задачі з формуванням послідовності претендентів, отримуючи оцінки для чергового варіанту архітектури за поточним критерієм та зменшуючи кількість альтернатив для наступного аналізу, видаляючи знайдене рішення з подальших розрахунків. Такий процес розрахунків набуває форму конструювання рішень у відповідності з обраними критеріями.

Формалізація співвідношень (1)–(3) для задачі вибору архітектури віртуальної системи обробки даних у хмарному середовищі дозволяє отримати математичні моделі, на основі яких можуть бути визначені рішення, що відповідають поставленим цілям і дозволяють отримати оцінки за обраними критеріям.

Для прикладу проведення розрахунків будемо користуватися умовними даними, що відображують співвідношення реальних об'єктів, значення яких розміщені на сайтах провайдерів хмарних послуг.

В табл. 1 представлені числові характеристики завдань, що потребують обробки з використанням обчислювальних ресурсів хмарних провайдерів.

В табл. 2 наведені дані, які стосуються вартості використання часу процесора, пристроїв оперативної пам'яті (ОП), підсистем введення/виведення (ПВВ) даних, ініціалізації виконання обробки, що пропонуються провайдерами.

З метою спрощення демонстрації змісту підходу до конструювання багатокритеріальних рішень при визначенні складу та характеристик сукупності віртуальних машин на підставі обчислення оцінок ефективності виконання процесів обробки даних завдань користувача була обрана математична модель у вигляді лінійної задачі оптимізації з мінімізацією вартості виконання завдань та урахуванням обмежень, що відзначають залежності між характеристиками завдань, параметрами віртуальних машин на підставі значень логічних змінних, введених для визначення розподілу завдань між віртуальним машинам згідно параметрів процесів обробки відповідно до моделей типу (1)–(3). Дані завдань характеризуються відомостями про умови їх виконання та містять загальні характеристики програмних модулів і обсягів даних, що використовуються при виконанні завдань на етапах введення даних, обробки та виведення результатів.

Динамічне забезпечення процесів необхідними обчислювальними ресурсами та управління їх виконанням покладається на модулі операційної системи (ОС), які також потребують цих ресурсів. Для оцінок процесів виконання завдань за критеріями необхідні відомості про технічні характеристики віртуальних машин від провайдерів.

Зміст інформації наведених таблиць залежить від обраних концепцій обчислень, типів математичних моделей задач визначення оцінок за критеріями ефективності при конструюванні рішень багатокритеріальних задач вибору.

Початкове формування сукупності віртуальних машин, серед яких можуть бути знайдені кращі альтернативи для виконання завдань, передбачає наявність інформації про технічні характеристики претендентів, що пропонуються провайдерами на підставі використання критеріїв першої групи.

Ці відомості дозволяють цілеспрямовано виконувати розрахунки потрібних обсягів використання обчислювальних ресурсів доступних підсистем та пристроїв у складі окремих віртуальних машин для виконання завдань з визначенням техніко-економічних показників обчислень, що можуть бути враховані при визначенні оцінок за поточними критеріями та сприяти вибору доцільних варіантів серед наданої сукупності.

Приклад відомостей про значення технічних параметрів та характеристик віртуальних машин, що розглядаються в роботі, наведені в табл. 3. В табл. 4 розміщена інформація про продуктивність віртуальних машин, час приведення до готовності, умови використання прикладного програмного забезпечення (ПЗ), ОС та підсистем введення-виведення даних (ПВВ). Для вирішення задачі розподілу завдань був застосований пакет What'sBest [14].

Таблиця 1 – Характеристики завдань

Характеристики	Програмні модулі						
	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
Кількість операцій, *E+06	30	300	250	522	40	110	1000
Обсяг потрібної оперативної пам'яті, МБ	250	2000	1000	450	330	250	1200
Час ініціалізації, с	5,0	2,5	3	1,2	2,5	2,0	2,5
Пріоритет	1	2	3	4	5	6	7
Інтенсивність введення/виведення, оп./с	20	300	300	510	2	3	12000
Обсяг даних введення/виведення, МБ	5	11	30	25	15	28	30
Час вирішення, с	10	5	28	12	30	40	25

Таблиця 2 – Вартість користування ресурсами віртуальних комп'ютерів хмарних провайдерів

Віртуальні машини	Вартість користування процесором, \$/с	Вартість користування пристроями ОП, \$(МБ*с)	Вартість користування ПВВ, \$(МБ*с)	Вартість ініціалізації, \$	Початковий стан
VM1	40,00	0,12	200	1200	0
VM2	28,80	0,20	300	1500	0
VM3	24,00	0,14	300	1300	0
VM4	40,00	0,16	500	2000	0

Таблиця 3 – Обрані характеристики віртуальних машин

Віртуальні машини	Тип процесора	Кількість процесорів	Кількість ядер процесора	Обсяг оперативної пам'яті, GB	Частота синхронізації, GHz
VM1	Type 1	1	10	10	7,00
VM2	Type 2	2	1	20	4,00
VM3	Type 3	1	20	40	5,40
VM4	Type 4	2	40	40	6,00

Таблиця 4 – Характеристики віртуальних машин від хмарних провайдерів

Віртуальні машини	Середня продуктивність, оп./с	Час до готовності, с	Пропускна здатність ПБВ, МВ/с*Е+03	Частка оперативної пам'яті ПЗ	Частка продуктивності процесора для ОС
VM1	22857143	10	200	0,2	0,2
VM2	80000000	12	170	0,4	0,4
VM3	25925926	15	220	0,3	0,3
VM4	53333333	20	250	0,4	0,4

Результати вирішення задачі наведені в табл. 5. Згідно даних табл. 5 всі завдання розподілені для виконання між віртуальними машинами, для яких визначена їх ініціалізація.

На основі отриманих результатів були визначені оцінки за зазначеними критеріями: загальна продуктивність системи обробки даних при виконанні завдань, рівень завантаженості ресурсів та час виконання завдань. Обчислювальні ресурси другої машини не використовуються, що пояснюється вартістю її ініціалізації та вартістю процесорного часу, які у порівнянні вихідних значень вищі, ніж у інших машини.

Результати вирішення задачі управління розподілом та обробкою даних завдань можуть бути використані для наступного аналізу залежностей оцінок за критеріями від характеристик процесів виконання та параметрів складових підсистем.

При визначенні доцільних варіантів віртуальних машин, що мають виконувати процеси обробки завдань, можна виділити наявність спільних чинників для сукупності альтернатив, рівень значень яких суттєво впливає на оцінки обраних критеріїв. Насамперед, це стосується часток спільних ресурсів, які виділяються для забезпечення значень оцінок окремих критеріїв.

При цьому для визначення збалансованих рішень за обраними критеріями необхідно проводити розрахунки розподілу часток спільних ресурсів з метою пошуку доцільного рівня поступок за критеріями, який

є прийнятним для замовника і відповідає умовам придбання необхідних ресурсів у визначених обсягах та термінах постачання або виконувати вибір таких їх значень, що забезпечують і розподіл ресурсів, і визначають безпосередньо значення оцінок окремих критеріїв.

Для задачі вибору віртуальних машин, що розглядається як приклад конструювання багатокритеріальних рішень, ключовим параметром разом з рівнем управління виконанням програмних кодів слід вважати таку характеристику центрального процесора як кількість вбудованих ядер, що разом з частотою синхронізації визначають і загальну продуктивність виконання, і час виконання, і вартості розрахунків та системи обчислень в цілому.

Оцінки за вказаними критеріями дозволили побудувати залежності їх значень від кількості ядер у складі процесора, які можуть виконувати незалежну обробку програмного коду. Ці залежності можуть застосовуватися для визначення ступеню впливу параметрів системи на оцінки критеріїв ефективності, що дозволяє визначати доцільний рівень поступок у ході конструювання багатокритеріальних рішень задачі вибору.

Аналіз співвідношень на рис.1 свідчать про суттєву залежність часу обчислень від продуктивності обраних віртуальних машин з різною кількістю ядер з відповідною їх вартістю, а також значно меншу залежність вартості обчислень від вищевказаних чинників, враховуючи використання на різних етапах

Таблиця 5 – Розподіл програмних модулів та ініціалізація

Віртуальні машини	Програмні модулі							Ініціалізація
	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	
VM1	0	0	0	1	1	0	0	1
VM2	0	0	0	0	0	0	0	0
VM3	1	1	0	0	0	0	0	1
VM4	0	0	1	0	0	1	1	1

обробки даних завдань інших пристроїв та обчислювальних ресурсів, підсистем комунікацій з фіксованими тарифами, прийнятими провайдерами хмарних послуг.

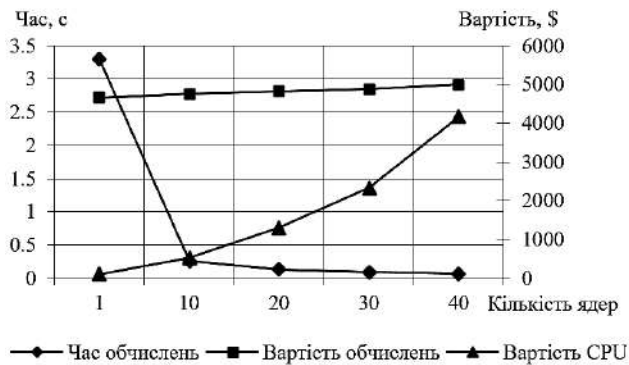


Рис. 1. Залежності часу і вартості обчислень від характеристик процесора

Це пояснюється також співвідношеннями між загальною продуктивністю та рівнем утилізації ресурсів центрального процесора (CPU) віртуальних машин в результаті виконання обчислень з різною кількістю ядер у складі процесора, що показані на рис. 2.

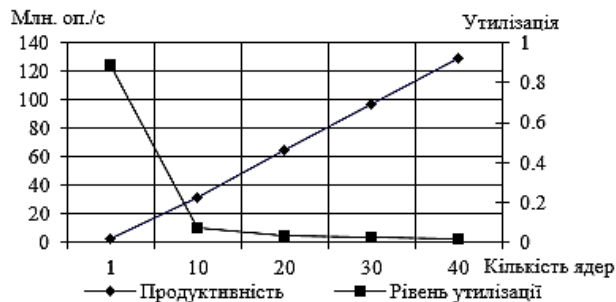


Рис. 2. Продуктивність та рівень утилізації

Ці залежності свідчать, що висока продуктивність віртуальних машин при виконанні поточних завдань супроводжується невисоким рівнем утилізації продуктивності віртуальних машин відносно номінальних значень.

З іншого боку такі співвідношення створюють умови для підтримки високого рівня готовності машин до початку виконання обчислень

Висновки. Задачі багатокритеріального вибору з визначенням доцільних варіантів претендентів складають поширений клас задач, вирішенню яких присвячено досить багато досліджень. Існуючі підходи до вирішення цих задач не завжди дозволяють визначити обґрунтовані збалансовані рішення з повноцінним урахуванням особливостей предметної області, обраних критеріїв та умов їх оцінювання. Порівняння оцінок по критеріям часто відбувається з суб'єктивних позицій без належних обґрунтувань, що позначається як на результатах вибору, так і на можливостях їх практичного застосування. Відомі процедури багатокритеріального вибору, такі, як метод аналізу ієрархій, використовують фіксовані шкали вимірювання для

порівняння значень, що в практичних ситуаціях можуть не відповідати реальним співвідношенням показників. Іншим суттєвим недоліком таких процедур є відсутність врахування наявності нелінійних залежностей у складі співвідношень між оцінками за критеріями та атрибутами рішень у різних діапазонах їх значень. Це може приводити до отримання неадекватних оцінок рішень з відповідними негативними наслідками.

Пропонується виконувати конструювання рішень багатокритеріальних задач вибору на основі упорядкування претендентів шляхом ітеративних поступок за обраними критеріями ефективності. В результаті упорядкування претендентів рішень відбувається формування Парето-оптимальної підмножини на підставі визначення кращих співвідношень оцінок за узгодженими критеріями.

Для визначення окремих оцінок рішень, що приймаються, використовується сукупність математичних моделей, які дозволяють побудувати залежності значень критеріїв від атрибутів претендентів рішень. Формування послідовності претендентів рішень відбувається на основі результатів порівнянь за окремими критеріями з визначенням альтернативних варіантів рішень та їх оцінок ефективності.

Розглянутий приклад багатокритеріального вибору доцільних варіантів побудови віртуальної системи обробки даних на основі характеристик віртуальних машин від провайдерів технологій хмарної обробки даних свідчить про можливість застосування підходу, що пропонується, у складі підсистем підтримки прийняття рішень для вирішення задач оперативного управління динамічними процесами обслуговування та виробництва.

Список літератури

1. Saaty T. L. A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*. 1977. Vol. 15, № 3. P. 234–281.
2. Saaty T. L. Decision making with the analytic hierarchy process. *International Journal of Services Sciences*. Vol. 1. № 1. 2008. P. 83–98.
3. Saaty T. L., Shang J. An innovative orders-of-magnitude approach to AHP-based multi-criteria decision making: Prioritizing divergent intangible humane acts. *European Journal of Operational Research*. 2011. Vol. 214, № 3. P. 703–715.
4. Варталян В. М., Штейнбрехер Д. О. Застосування методу аналізу ієрархій для побудови стратегії управління знаннями високотехнологічних проектів. *Радіоелектроніка і комп'ютерні системи*. 2019. № 2 (90). С. 118–126.
5. Данілова І. С., Букреев В. Ю. Застосування методу аналізу ієрархій для прийняття управлінських рішень в зовнішньоекономічній діяльності. *Східна Європа: економіка, бізнес та управління*. 2018. Вип. 6 (17). С. 167–172.
6. Іпполітова І. Я., Сорокотяченко К. С. Використання методу аналізу ієрархій під час реалізації стратегії енергозбереження. *Глобальні та національні проблеми економіки*. 2016. Вип. 14. С. 370–376.
7. Ayhana M. B. Fuzzy AHP Approach for supplier selection problem: a case study in a gearmotor company. *International Journal of Managing Value and Supply Chains (IJMVSC)*. 2013. Vol. 4, № 3. P. 11–23.
8. Solangi Y. A. Assessing and overcoming the renewable energy barriers for sustainable development in Pakistan: An integrated AHP and fuzzy TOPSIS approach. *Renewable Energy*. 2021. Vol. 173. P. 209–222.

9. Zhang H. The Analysis of the Reasonable Structure of Water Conservancy Investment of Capital Construction in China by AHP Method. *Water Resources Management*. 2009. Vol. 23. P. 1–18.
10. Кандиба І. О. Багатокритеріальний вибір кращого сценарію вступної кампанії закладу вищої освіти. *Інформатика, обчислювальна техніка та автоматизація*. 2021. Том 32 (71), № 4. С. 71–77.
11. Івченко Р. А., Купін А. І. Дослідження методів багатокритеріальної оптимізації для вибору обладнання або деталей на виробництві. *Інформатика, обчислювальна техніка та автоматизація*. 2021. Том 32 (71), ч. 1, № 1. С. 67–72.
12. Podinovski V. V. Potential optimality in multicriterial optimization. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2014. Vol. 54. P. 429–438.
13. Nelyubin A. P., Podinovski V. V. Multicriteria choice based on criteria importance methods with uncertain preference information. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017. Vol. 57. P. 1475–1483.
14. *LINDO® Software for Integer Programming, Linear Programming, Nonlinear Programming, Stochastic Programming, Global Optimization*. URL: <https://www.lindo.com/> (дата звернення: 15.05.2022).
5. Saaty T. L. A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*. 1977, vol. 15, no 3, pp. 234–281.
2. Saaty T. L. Decision making with the analytic hierarchy process. *International Journal of Services Sciences*. 2008, vol. 1, no 1, pp. 83–98.
3. Saaty T. L., Shang J. An innovative orders-of-magnitude approach to AHP-based multi-criteria decision making: Prioritizing divergent intangible humane acts. *European Journal of Operational Research*. 2011, vol. 214, no. 3, pp. 703–715.
4. Vartanian V. M., Shteinbrekher D. O. Zastosuvannya metodu analizu iierarkhii dlia pobudovy stratehii upravlinnia znaniamy vysokotekhnolohichnykh proektiv [Application of the hierarchy analysis method for building a knowledge management strategy for high-tech projects]. *Radioelektronni i kompiuterni systemy* [Radioelectronic and computer systems]. 2019, no. 2(90), pp. 118–126.
5. Danilova I. S., Bukrieiev V. Iu. Zastosuvannya metodu analizu iierarkhii dlia pryiniattia upravlinskykh rishen v zovnishnoekonomichnii diialnosti [Application of the method of analysis of hierarchies for making management decisions in foreign economic activities]. *Skhidna Yevropa: ekonomika, biznes ta upravlinnia* [Eastern Europe: Economy, Business and Management]. 2018, is. 6 (17), pp. 167–172.
6. Ippolitova I. Ia., Sorokotiazhenko K. S. Vykorystannia metodu analizu iierarkhii pid chas realizatsii stratehii enerhozberezhennia [Using the method of analyzing hierarchies during the implementation of the energy saving strategy]. *Hlobalni ta natsionalni problemy ekonomiky* [Hlobalni ta natsionalni problemy ekonomiky]. 2016, is. 14, pp. 370–376.
7. Ayhana M. B. Fuzzy AHP Approach for supplier selection problem: a case study in a gearmotor company. *International Journal of Managing Value and Supply Chains (IJMVSC)*. 2013, vol. 4, no. 3, pp. 11–23.
8. Solangi Y. A. Assessing and overcoming the renewable energy barriers for sustainable development in Pakistan: An integrated AHP and fuzzy TOPSIS approach. *Renewable Energy*. 2021, vol. 173, pp. 209–222.
9. Zhang H. The Analysis of the Reasonable Structure of Water Conservancy Investment of Capital Construction in China by AHP Method. *Water Resources Management*. 2009, vol. 23, pp. 1–18.
10. Kandyba I. O. Bahatokryterialnyi vybir krashchoho stsenariiu vstupnoi kampanii zakladu vyshchoi osvity [Multi-criteria selection of the best scenario for the entrance campaign of a higher education institution]. *Informatyka, obchysliuvanna tekhnika ta avtomatyzatsiia* [Informatics, computing and automation]. 2021, vol. 32(71), no. 4, pp. 71–77.
11. Ivchenko R. A., Kupin A. I. Doslidzhennia metodiv bahatokryterialnoi optymizatsii dlia vyboru obladdannia abo detalei na vyrobnytstvi [Study of multi-criteria optimization methods for selecting equipment or parts in production.]. *Informatyka, obchysliuvanna tekhnika ta avtomatyzatsiia* [Informatics, computing and automation]. 2021, vol. 32 (71), part. 1, no. 1, pp. 67–72.
12. Podinovski V. V. Potential optimality in multicriterial optimization. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, pp. 429–438.
13. Nelyubin A. P., Podinovski V. V. Multicriteria choice based on criteria importance methods with uncertain preference information. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, pp. 1475–1483.
14. *LINDO® Software for Integer Programming, Linear Programming, Nonlinear Programming, Stochastic Programming, Global Optimization*. Available at: <https://www.lindo.com/> (accessed: 15.05.2022).

References (transliterated)

Надійшла (received) 21.10.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Шевченко Сергій Васильович – кандидат технічних наук, професор НТУ «ХПІ», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3831-5425>; e-mail: serhii.shevchenko@khi.edu.ua

Shevchenko Sergiy Vasyliovych – Candidate of Technical Sciences (PhD), Professor of NTU "KhPI", National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Professor of the Department of Software Engineering and Intelligent Technology Management; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3831-5425>; e-mail: serhii.shevchenko@khi.edu.ua

УПРАВЛІННЯ В ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS

УДК 62-52

DOI: 10.20998/2079-0023.2022.02.07

О. С. КУЦЕНКО, С. В. КОВАЛЕНКО

КВАЗИАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ОБЕРНЕННЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Задача обернення динамічних систем набула широкого поширення при розв'язанні задач управління, ідентифікації, вимірювання, що виникають при проектуванні та дослідженні електричних і механічних динамічних систем. Інвертування є ефективним способом реалізації процесів управління по обуренню, а також у комбінованих системах управління з прогнозуючою моделлю. Аналіз джерел інформації показав, що при практичному розв'язанні більшості задач обернення виникає низка труднощів, що пов'язані з високою чутливістю результатів стосовно точності завдання параметрів математичної моделі об'єкта управління, нестійкістю зворотної моделі немінімально-фазових об'єктів, порушенням умов фізичної реалізованості. В роботі пропонується ефективний метод обернення лінійних стаціонарних динамічних систем багато в чому вільний від зазначених недоліків. В основу методу покладено подання вхідних та вихідних сигналів у вигляді нескінченних лінійних комбінацій їх похідних. Запропоновано метод визначення послідовності матричних коефіцієнтів лінійних уявлень вхідних та вихідних сигналів. Основним теоретичним результатом є отримання взаємозв'язків між матричними коефіцієнтами вхідних та вихідних сигналів. В роботі розглядаються математичні моделі лінійних динамічних систем у формі диференціальних рівнянь у просторі станів та в еквівалентній формі «вхід-вихід». Розглянуті системи повинні відповідати умовам асимптотичної стійкості, а також умові рівності розмірностей векторів входу і виходу. Наведено вимоги до математичних моделей вхідних та вихідних сигналів, виконання яких дозволяє замість нескінченних сум, що представляють сигнали, обмежитися кінцевим числом доданків.

Ключові слова: динамічні системи, лінійні диференціальні рівняння, трикутні блокові матриці, задача обернення, простір станів, матричні рівняння.

O. S. KUTSENKO, S. V. KOVALENKO

QUASI-ANALYTIC METHOD OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS INVERSION

The problem of inversion of dynamic systems has become widespread while solving the problems of control, identification, and measurement problems arising during the design and research of electrical and mechanical dynamic systems. Inverting is an effective way of implementing disturbance control processes, as well as in combined control systems with a predictive model. The analysis of information sources showed that in the practical solution of most inversion problems, a number of difficulties arise, which are associated with the high sensitivity of the results in relation to the accuracy of the parameters of the mathematical model of the control object, the instability of the inverse model of non-minimum-phase objects, and the violation of the conditions of physical feasibility. The work offers an effective method of inverting linear stationary dynamic systems, free from the mentioned shortcomings in many respects. The basis of the method is the presentation of input and output signals in the form of infinite linear combinations of their derivatives. A method of determining the sequence of matrix coefficients of linear representations of input and output signals is proposed. The main theoretical result is obtaining relationships between matrix coefficients of input and output signals. The work considers mathematical models of linear dynamic systems in the form of differential equations in the state space and in the equivalent "input-output" form. The considered systems must meet the conditions of asymptotic stability, as well as the condition of equal dimensions of the input and output vectors. Requirements for mathematical models of input and output signals are given, the fulfillment of which allows, instead of infinite sums representing signals, to be limited to a finite number of terms.

Keywords: dynamical systems, linear differential equations, triangular block matrices, inversion problem, state space, matrix equations.

Вступ. Обернення динамічних систем є одним із основних напрямів сучасної теорії управління. Розв'язання задачі обернення – відновлення вхідного впливу по відомому виходу, насправді вважається одним із шляхів розв'язання задачі управління. Крім розв'язання задачі управління, задача обернення знаходить застосування при вирішенні широкого спектра практичних задач, пов'язаних з теорією управління. До останніх відносяться задачі ідентифікації динамічних параметрів систем та

обурень, фільтрації сигналів, керування за наявності обурень, що не вимірюються, тощо.

Огляд і аналіз джерел інформації. Першими публікаціями у цьому напрямі вважатимуться роботи [1, 2], у яких було обґрунтовано критерії існування зворотних операторів та методи їх побудови для лінійних систем. Значний внесок у розвиток теорії та практики інверсії динамічних систем зроблено у роботах [3–5]. У них запропоновано оригінальні критерії оборотності динамічних систем та надано конкретні шляхи розв'язання задачі обернення. Низка

© О. С. Куценко, С. В. Коваленко, 2022



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом *НТУ «ХПІ»* у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Common Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



практичних результатів розв'язання задач інвертування стосовно електричних і механічних систем наведена у роботах [6, 7].

Різні алгоритми обернення динамічних систем можна знайти у роботах [8, 9]. У цих роботах досліджуються питання, пов'язані із оборотністю та однозначністю відновлення входу. Основною проблемою при розв'язанні задач обернення динамічних систем є проблема стійкості методів рішень по відношенню до різноманітних невизначеностей: похибок при заданні параметрів системи, збурень, похибок вимірів виходу тощо. Алгоритми обернення будувалися у межах методів гарантованого оцінювання [10, 11], методів теорії некоректних задач [12–14] та теорії автоматичного управління. Задачі обернення динамічних систем тісно пов'язані із задачами динамічних вимірів [15, 16]. Оригінальні методи розв'язання задачі динамічного виміру запропоновані в [17, 18].

З аналізу джерел інформації можна дійти до висновку у тому, що при практичній реалізації більшості методів обернення виникає безліч проблем, пов'язаних з забезпеченням стійкості, фізичної реалізованості, робастності і коректності зворотних операторів.

Перераховані складнощі в ряді випадків можна обійти, ґрунтуючись на спрощених математичних моделях динамічних систем, а також на аналітичному уявленні сигналів на входах та виходах.

Обернення системи у формі «вхід–вихід».

Розглянемо математичну модель керованого процесу у формі «вхід–вихід»:

$$A_0 y^{(p)} + A_1 y^{(p-1)} + \dots + A_p y = B_0 u^{(q)} + B_1 u^{(q-1)} + \dots + B_q u, \quad (1)$$

де $A_0, A_1, \dots, A_p - n \times n$, а $B_0, B_1, \dots, B_q - n \times m$ матриці параметрів об'єкта управління;

$y \in R^n$ та $u \in R^m$ – вектори виходу та входу відповідно.

Передбачається також, що система (1) стійка та задовольняє умові фізичної реалізуємості $p \geq q$. З іншого боку, передбачається, що система (1) невинроджена, тобто $|A_p| \neq 0$ та $|B_q| \neq 0$, а розмірності векторів входу та виходу збігаються ($n = m$).

З теорії систем лінійних диференціальних рівнянь відомо, що розв'язок (1) складається з двох компонент: власної та вимушеної. Власна складова залежить тільки від параметрів системи (1) і для стійких систем прагне нуля зі швидкістю, що визначається розподілом коренів характеристичного рівняння. Вимушена складова визначається як параметрами системи, так і видом керуючого впливу $u(t)$, а тому й представляє основний інтерес з точки зору розв'язання задач управління.

Будемо шукати вимушений розв'язок (1) у вигляді

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k u^{(k)}, \quad (2)$$

де $C_0, C_1, \dots - n \times n$ матриці, що підлягають визначенню.

Для їх знаходження підставимо (2) у вихідне рівняння (1) і прирівняємо матричні коефіцієнти при однакових похідних у лівій та правій частинах отриманого співвідношення. В результаті отримаємо нескінченну систему матричних лінійних рівнянь для визначення C_0, C_1, \dots :

$$\begin{aligned} A_p C_0 &= B_q, \\ A_p C_1 + A_{p-1} C_0 &= B_{q-1}, \\ \dots & \dots \\ A_p C_p + A_{p-1} C_{p-1} + \dots + A_0 C_0 &= 0, \\ A_p C_{p+1} + A_{p-1} C_p + \dots + A_0 C_1 &= 0, \\ \dots & \dots \\ A_p C_k + A_{p-1} C_{k-1} + \dots + A_0 C_{k-n} &= 0, \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Відповідний блочно-матричний запис системи рівнянь (3) набуде вигляду:

$$\begin{pmatrix} A_p & 0 & 0 & \dots & \dots \\ A_{p-1} & A_p & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_0 & A_1 & \dots & A_p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_0 & \dots & A_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_q \\ B_{q-1} \\ \dots \\ B_0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Оскільки система (3, 4) має блочно-трикутну структуру, її розв'язок легко отримати послідовним розв'язанням найпростіших матричних лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} A_p C_0 &= B_q, \quad C_0 = A_p^{-1} B_q, \quad A_{p-1} C_0 + A_p C_1 = B_{q-1}, \\ C_1 &= A_p^{-1} (B_{q-1} - A_{p-1} C_0), \\ A_{p-2} C_0 + A_{p-1} C_1 + A_p C_2 &= B_{q-2}, \\ C_2 &= A_p^{-1} (B_{q-2} - A_{p-2} C_0 - A_{p-1} C_1), \end{aligned}$$

і так далі.

Неважко побачити, що розв'язання (4) вимагає лише одного обернення матриці A_p . Це можна врахувати у вихідному поданні математичної моделі об'єкта управління, розглядаючи наведену модель, яка отримана з вихідної множенням всіх матриць (1) на матрицю A_p^{-1} . Таким чином, без обмеження спільності можна вважати матрицю A_p в (1), (3), (4) одиничною.

Для розв'язання задачі обернення поміняємо місцями вхід і вихід системи (1) і замість (2) шукатимемо функцію $u(t)$ за заданою $y(t)$ у вигляді аналогічному (2):

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k y^{(k)}, \quad (5)$$

попередньо знайдемо розв'язок (15) відносно вектора стану у вигляді

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}_k \mathbf{u}^{(k)}(t). \quad (17)$$

Із (17) слідує

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}_k \mathbf{u}^{(k+1)}(t). \quad (18)$$

Підставимо (16), (17) і (18) в (15). В результаті отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}_k \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{A} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}_k \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{B} \mathbf{u}. \quad (19)$$

Приврівнюючи матричні коефіцієнти при похідних $\mathbf{u}^{(k)}$ одного порядку в лівій та правій частинах (19), отримуємо систему рекурентних співвідношень для обчислення матриць \mathbf{C}_k

$$\mathbf{A} \mathbf{C}_0 + \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{A} \mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k, \quad k = \overline{0, \infty},$$

з яких безпосередньо випливає

$$\mathbf{C}_0 = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_1 = -\mathbf{A}^{-2} \mathbf{B}, \quad \dots, \mathbf{C}_k = -\mathbf{A}^{-(k+1)} \mathbf{B}. \quad (20)$$

Таким чином, вимушена складова розв'язку системи (15), (16) набуде вигляду

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{u}^{(k)}(t), \quad (21)$$

де $\bar{\mathbf{C}}_k = -\mathbf{C} \mathbf{A}^{-(k+1)} \mathbf{B}$.

Для знаходження зворотного оператора скористаємося результатами, отриманими раніше у разі представлення системи у формі «вхід–вихід». Шукатимемо розв'язок задачі інверсії у вигляді (5). Тоді матриці $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \dots$ можуть бути обчислені на підставі співвідношень (13) або (14).

Відповідна система лінійних матричних рівнянь набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{C}}_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{C}}_0 & 0 & 0 & \dots \\ \bar{\mathbf{C}}_2 & \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{C}}_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Розв'язок останньої системи рівнянь знаходиться в результаті наступної рекурентної процедури

$$\mathbf{D}_0 = \bar{\mathbf{C}}_0^{-1}, \quad \mathbf{D}_k = -\mathbf{D}_0 \sum_{i+j=k} \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{D}_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, i, k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

У результаті зворотний оператор матиме вигляд (5), де матриці $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots$ обчислюються згідно (22).

Приклад. Задана динамічна SISO система другого порядку у просторі станів

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + u, \\ y &= x_1 + x_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Треба знайти керуючий сигнал $\mathbf{u}(t)$, якому відповідає вимушена складова сигналу на виході

$$y(t) = 1 + t + t^2. \quad (24)$$

У векторно-матричній формі (23) має вигляд

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{b} u, \quad \mathbf{y} = \mathbf{c}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}^T = (1, 1)$.

Знайдемо розв'язок (23) у вигляді (21). Згідно (20) та (21) послідовність матричних коефіцієнтів $\bar{\mathbf{C}}_k$ буде мати вигляд

$$\bar{\mathbf{C}}_0 = 1, \quad \bar{\mathbf{C}}_1 = -1, \quad \bar{\mathbf{C}}_2 = 0, \quad \bar{\mathbf{C}}_3 = 1, \quad \bar{\mathbf{C}}_4 = 1 \dots \quad (25)$$

Коефіцієнти зворотнього оператора знаходимо за формулами (22)

$$\mathbf{D}_0 = 1, \quad \mathbf{D}_1 = 1, \quad \mathbf{D}_2 = 1, \quad \mathbf{D}_3 = 0, \quad \mathbf{D}_4 = -2 \dots$$

а зворотний оператор буде мати вигляд

$$\mathbf{u}(t) = y(t) + \dot{y}(t) + \ddot{y}(t) - 2y^{(IV)}(t) + \dots \quad (26)$$

Після підстановки (24) в (26) отримаємо вираз для сигналу на вході, якому відповідає вихід (24)

$$\mathbf{u}(t) = -4 + 3t + t^2. \quad (27)$$

Для перевірки підставимо (27) у вираз (21) з коефіцієнтами $\bar{\mathbf{C}}_k$ (25). Отримаємо

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{u}(t) - \dot{\mathbf{u}}(t) + \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{u}^{(IV)}(t) + \dots, \\ y(t) &= 1 + t + t^2, \end{aligned}$$

що співпадає з вихідними даними.

Обговорення результатів. Запропонований метод обернення лінійних динамічних систем, заданих або у формі «вхід – вихід», або у просторі станів зводиться до послідовності матричних операцій з мінімальною кількістю обернень матриць. Усі матричні операції здійснюються у просторі з розмірністю, що відповідає розмірності вихідної системи диференціальних рівнянь.

Основним обмеженням методу є теоретична нескінченність кількості членів суми складових рішення задачі обернення. У зв'язку з цим природно накласти обмеження на клас функцій часу $\mathbf{u}(t)$ і $\mathbf{y}(t)$, що моделюють сигнали на вході та на виході системи.

Наприклад, клас Z_l , який являє собою множину безперервних обмежених функцій, що диференціюються та мають обмежені похідні до l -го порядку

включно, а похідні більш високих порядків дорівнюють нулю

$$Z_l = \left\{ z(\cdot) \mid \|z^{(k)}(t)\| \leq \mu_k, \forall t \in [0, \tau], \forall k \in \{0, 1, \dots, l\}, \mu_k = 0, \forall k > l \right\}. \quad (28)$$

У разі належності функцій $u(t)$ і $y(t)$ класу Z_l нескінченні суми (2), (5), (21) перетворюються на кінцеві. Найцікавішим представником класу функцій Z_l є поліноми ступеня не вище l . Методи інтерполяції та апроксимації функцій поліномами добре вивчені та знайшли широке застосування на практиці. Слід зазначити, що відповідно до теореми Вейєрштраса про апроксимацію, будь-яку безперервну функцію можна апроксимувати поліномом з наперед заданою точністю. Кінцевими сумами приблизно можна обмежитися так само у випадку, якщо послідовності $u^{(k)}(t)$ і $y^{(k)}(t)$ $k = 0, 1, 2, \dots$ в кожний момент часу являють собою ряди, що сходяться. Прикладами цих функцій є $f(t) = e^{ot}$ та $g(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$. Дійсно:

$$f^{(k)}(t) = \omega^k e^{ot}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ступеневий ряд: $1, \omega, \omega^2, \dots$ являє собою геометричну прогресію, що збігається при $\omega < 1$. Аналогічний результат має місце і для гармонійної функції $g(t)$.

При практичному застосуванні запропонованого методу необхідно врахувати затримку результату інвертування, пов'язану з обробкою вихідного сигналу у разі довільного виду $y(t)$. У цьому випадку слід рекомендувати інтерполяцію множини вимірюваних значень різними аналітичними функціями: поліномами, експонентами, гармонійними функціями, а також сплайнами. Детально з таким підходом можна ознайомитись у роботах [18, 19].

Список літератури

1. Sain M. K., Massey J. L. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969. Vol. AS-14, № 2. P. 141–149.
2. Silverman L. M. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969. Vol. AS-14, № 3. P. 270–276.
3. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. *Методы робастного обращения динамических систем*. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 219 с.
4. Костенко Ю. Т., Любчик Л. М. *Системы управления с динамическими моделями*. Харьков: Основа, 1996. 212 с.
5. Борухов В. Т. Критерии обратимости линейных стационарных многомерных систем. *Автоматика и телемеханика*. Киев, 1978. Вып. 11. С. 5–11.
6. Пухов Г. Е., Жук К. Д. *Синтез многосвязных систем управления по методу обратных операторов*. Киев: Наукова думка, 1966. 218 с.
7. Крутько П. Д. *Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели*. Москва: Наука, 1987. 304 с.
8. Willsky A. S. On the invertibility of linear systems. *IEEE Tr. Aut. Control*. 1974. Vol. 19. P. 272–274.
9. Никольский М. С. Об идеально наблюдаемых системах. *Дифференциальные уравнения*. 1971. Т. 7, № 4. С. 631–638.
10. Красовский Н. Н. *Теория управления движением*. Москва: Наука, 1968. 476 с.

11. Куржанский А. Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности*. Москва: Наука, 1977. 392 с.
12. Гусев М. И., Куржанский А. Б. Обратные задачи динамики управляемых систем. *Механика и научно-технический прогресс. Том 1: Общая и прикладная механика*. Москва: Наука, 1987. С. 187–195.
13. Аникин С. А., Гусев М. И. Оценка возмущающих сил по измерениям параметров движения. *Гарантированное оценивание и задачи управления*. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 19–30.
14. Аникин С. А. Об оценке погрешности метода регуляризации А. Н. Тихонова в задачах восстановления входов динамических систем. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1997. № 9. С. 1056–1067.
15. Грановский В. А. *Динамические измерения*. Ленинград: Энергоиздат, 1984. 224 с.
16. Шестаков А. Л., Иосифов Д. Ю. Решение обратной задачи динамики на основе теории модального управления с использованием измеряемого вектора параметров состояния первичного измерительного преобразователя. *Изв. Челяб. науч. центра*. 2005. № 4(30). С. 144–149.
17. Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А., Захарова Е. В. Динамические измерения как задача оптимального управления. *Обозрение прикл. и пром. математики*. 2009. Т. 16, № 4. С. 732–733.
18. Куценко О. С., Коваленко С. В. Динамічні вимірювання як задача обернення керування систем. *Метрологія та вимірювальна техніка (Метрологія–2020)*. XII Міжнародна науково-технічна конференція (6–8 жовтня 2020 р.). *Збірник доповідей*. Харків: ННЦ «Інститут метрології», 2020. С. 87–91.
19. Kutsenko A., Kovalenko S., Tovazhnyansky V. Inversion of dynamic systems for certain classes of signals. *CEUR Workshop Proceedings*. 2019. Vol. 2353. P. 391–401.

References (transliterated)

1. Sain M. K., Massey J. L. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969, vol. AS-14, № 2, pp. 141–149.
2. Silverman L. M. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969, vol. AS-14, № 3, pp. 270–276.
3. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. *Metody robustnogo obrashcheniya dinamicheskikh sistem* [Methods for Robust Inversion of Dynamical Systems]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2009. 219 p.
4. Kostenko Yu. T., Lyubchik L. M. *Sistemy upravleniya s dinamicheskimi modelyami* [Control systems with dynamic models]. Kharkov, Osнова Publ., 1996. 212 p.
5. Borukhov V. T. Kriterii obratimosti lineynykh statsionarnykh mnogomernykh sistem [Criteria for the reversibility of linear stationary multidimensional systems]. *Avtomatika i telemekhanika*. Kiev, 1978, is. 11, pp. 5–11.
6. Pukhov G. E., Zhuk K. D. *Sintez mnogosvyaznykh sistem upravleniya po metodu obratnykh operatorov* [Synthesis of multiply connected control systems by the method of inverse operators]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1966. 218 p.
7. Krut'ko P. D. *Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem. Lineynye modeli* [Inverse problems of the dynamics of controlled systems. Linear Models]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 304 p.
8. Willsky A. S. On the invertibility of linear systems. *IEEE Tr. Aut. Control*. 1974, vol. 19, pp. 272–274.
9. Nikolsky M. S. Ob ideal'no nablyudaemykh sistemakh [On ideally observable systems]. *Differentsial'nye uravneniya*. 1971, vol. 7, no 4, pp. 631–638.
10. Krasovskiy N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion Control Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 476 p.
11. Kurzhansky A. B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Management and supervision in conditions of uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 392 p.
12. Gusev M. I., Kurzhansky A. B. *Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem* [Inverse problems of dynamics of controlled systems]. *Mekhanika i nauchno-tekhnicheskiiy progress, vol. 1: Obshchaya i prikladnaya mekhanika*. Moscow, Nauka Publ., 1987, pp. 187–195.
13. Anikin S. A., Gusev M. I. Otsenivanie vozmushchayushchikh sil po izmereniyam parametrov dvizheniya [Estimation of Disturbing Forces from Measurements of Motion Parameters]. *Garantirovannoe*

- otsenivanie i zadachi upravleniya*. Sverdlovsk, UNTs AN SSSR Publ., 1986. pp. 19–30.
14. Anikin S. A. Ob otsenke pogreshnosti metoda regularizatsii A. N. Tikhonova v zadachakh vosstanovleniya vkhodov dinamicheskikh sistem [On the estimation of the error of A. N. Tikhonov's regularization method in problems of restoring the inputs of dynamical systems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i mat. fiziki*. 1997, no 9, pp. 1056–1067.
 15. Granovsky V. A. *Dinamicheskie izmereniya* [Dynamic measurements]. Leningrad, Energoizdat Publ., 1984. 224 p.
 16. Shestakov A. L., Iosifov D. Yu. Reshenie obratnoy zadachi dinamiki na osnove teorii modal'nogo upravleniya s ispol'zovaniem izmeryaemogo vektora parametrov sostoyaniya pervichnogo izmeritel'nogo preobrazovatelya [Solution of the inverse problem of dynamics based on the theory of modal control using the measured vector of state parameters of the primary measuring transducer]. *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra*. 2005, no 4(30), pp. 144–149.
 17. Shestakov A. L., Sviridyuk G. A., Zakharova E. V. Dinamicheskie izmereniya kak zadacha optimal'nogo upravleniya [Dynamic Measurements as an Optimal Control Problem]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*. 2009, vol. 16, no 4, pp. 732–733.
 18. Kutsenko O. S., Kovalenko S. V. [Dynamic measurements as a problem of inversion of controlled systems]. *Metrologiya ta vymiryuval'na texnika (Metrologiya–2020). XII Mizhnarodna naukovo–texnichna konferenciya (6–8 zhovtnya 2020 r.). Zbirnyk dopovidej* [Metrology and measuring technology (Metrology-2020). XII International Scientific and Technical Conference (October 6–8, 2020). A collection of reports]. Kharkiv, NNTs "Institut metrologii" Publ., 2020, pp. 87–91.
 19. Kutsenko A., Kovalenko S., Tovazhnyansky V. Inversion of dynamic systems for certain classes of signals. *CEUR Workshop Proceedings*. 2019, vol. 2353, pp. 391–401.

Надійшла (received) 20.11.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Кущенко Олександр Сергійович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій; м. Харків, Україна; ORCID: 0000-0001-6059-3694; e-mail: Oleksandr.Kutsenko@khp.edu.ua

Коваленко Сергій Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій; ORCID: 0000-0001-8763-0862; e-mail: Serhii.Kovalenko@khp.edu.ua

Kutsenko Oleksandr Serhiyovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", professor of the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies; Kharkiv, Ukraine; ORCID: 0000-0001-6059-3694; e-mail: Oleksandr.Kutsenko@khp.edu.ua

Kovalenko Serhii Volodymyrovych – Candidate of Technical Sciences (PhD), Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies; Kharkiv, Ukraine; ORCID: 0000-0001-8763-0862; e-mail: Serhii.Kovalenko@khp.edu.ua

O. B. AKHIEZER, G. L. GRINBERG, L. M. LYUBCHYK, K. S. YAMKOVYI

FAILURE RATE REGRESSION MODEL BUILDING FROM AGGREGATED DATA USING KERNEL-BASED MACHINE LEARNING METHODS

The problem of regression model building of equipment failure rate using datasets containing information on number of failures of recoverable systems and measurements of technological and operational factors affecting the reliability of production system is considered. This problem is important for choosing optimal strategy for preventive maintenance and restoration of elements of process equipment, which, in turn, significantly affects the efficiency of production management system. From a practical point of view, of greatest interest is the development of methods for regression models building to assess the impact of various technological and operational factors controlled during system operation on failure rate. The usual approach to regression models construction involves preselecting the model structure in the form of a parameterized functional relationship between failure rate and affecting technological variables followed by statistical estimation of unknown model parameters or training the model on datasets of measured covariates and failures. The main problem lies precisely in the choice of model structure, the complexity of which should correspond to amount of data available for training model, which in the problem of failure rate modeling is greatly complicated by lack of a priori information about its dependence on affecting variables. In this work, such a problem is solved using machine learning methods, namely, kernel ridge regression, which makes it possible to effectively approximate complex nonlinear dependences of equipment failure rate on technological factors, while there is no need to pre-select the model structure. Preliminary aggregation of data by combination of factor and cluster analysis can significantly simplify model structure. The proposed technique is illustrated by solving a practical problem of failure rate building for semiconductor production equipment based on real data.

Keywords: dependability, factor analysis, failure rate, kernel methods, machine learning, production processes, preventive maintenance, ridge regression, regression model.

О. Б. АХІЄЗЕР, Г. Л. ГРІНБЕРГ, Л. М. ЛЮБЧИК, К. С. ЯМКОВИЙ

ПОБУДОВА РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ ІНТЕНСИВНОСТІ ВІДМОВ ЗА АГРЕГОВАНИМИ ДАНИМИ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ ЯДЕРНОГО МАШИННОГО НАВЧАННЯ

Розглянуто задачу побудови регресійної моделі інтенсивності відмов обладнання з використанням наборів даних, що містять інформацію про кількість відмов відновлюваних систем та вимірювання технологічних і експлуатаційних факторів, що впливають на надійність виробничої системи. Ця проблема є важливою для вибору оптимальної стратегії профілактичного ремонту та відновлення елементів технологічного обладнання, що, у свою чергу, суттєво впливає на ефективність системи управління виробництвом. З практичної точки зору найбільший інтерес представляє розробка методів побудови регресійних моделей для оцінки впливу на інтенсивність відмов різноманітних технологічних та експлуатаційних факторів, контрольованих під час роботи системи. Звичайний підхід до побудови регресійних моделей передбачає попередній вибір структури моделі у формі параметризованого функціонального зв'язку між інтенсивністю відмов і технологічними змінними з наступною статистичною оцінкою невідомих параметрів моделі або навчанням моделі на наборах даних вимірних коваріат і відмов. Основна проблема полягає саме у виборі структури моделі, складність якої повинна відповідати кількості даних, доступних для навчання моделі, що в задачі моделювання інтенсивності відмов значно ускладнюється відсутністю апріорної інформації про її залежність від впливаючих змінних. У даній роботі така задача вирішується за допомогою методів машинного навчання, а саме ядерної гребневої регресії, що дає змогу ефективно апроксимувати складні нелінійні залежності інтенсивності відмов обладнання від технологічних факторів, при цьому немає необхідності попереднього вибору структури моделі. Попереднє агрегування даних шляхом поєднання факторного та кластерного аналізу може значно спростити структуру моделі. Пропонована методика проілюстрована розв'язанням практичної задачі побудови моделі інтенсивності відмов обладнання для виробництва напівпровідників на основі реальних даних.

Ключові слова: надійність, факторний аналіз, рівень відмов, ядерні методи, машинне навчання, виробничі процеси, прогнозне технічне обслуговування, хребтова регресія, регресійна модель.

Introduction. Among the problems of production management, an important place is occupied by preventive maintenance, which is an effective tool for reducing costs associated with failures and interruptions in production, its repair and restoration, as well as maintenance costs [1]. Preventive maintenance ensures to determine when maintenance should be carried out by estimations and predictions of degradation state of production items and expected time for occurrence of failures. Preventive maintenance is also play in important role for production and information and control system dependability ensuring.

In preventive maintenance implementation, failure rate is widely used as important metric for evaluating equipment reliability, wherein failure rate prediction is an effective way to maintain decision making [2].

The problem of estimating and predicting failure rate using statistical data of failure streams has been studied in detail in the literature. From a practical point of view, of greatest interest is the development of methods for predicting failure rate using their models, which take into account the influence of technological and operational factors controlled during the operation of the system. This approach is implemented by building multivariate regression models to estimate the relationship between affecting factors (predictors or covariates) and failure rate. A common approach to building regression models involves preselecting of model structure as a parameterized functional relationship between the output variable and the affecting variables, followed by statistical estimation of unknown model parameters or model training model on

© O. B. Akhiezer, G. L. Grinberg, L. M. Lyubchik, K. S. Yamkovyi, 2022



Research Article: This article was published by the publishing house of *NTU "KhPI"* in the collection "Bulletin of the National Technical University "KhPI" Series: System analysis, management and information technologies." This article is distributed under a Creative Commons [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Conflict of Interest:** The author/s declared no conflict of interest. This article was initially presented in part at 12th International IEEE Conference "Dependable Systems, Services and Technologies" (DESSERT'2022), Greece, Athens, December 9-11, 2022.



datasets of measured covariates and outputs. The main problem lies precisely in the choice of model structure, the complexity of which should correspond to the amount of data available for training model, which in the problem under consideration is greatly complicated by the lack of a priori information about the dependence of failure rate from affecting factors.

In this paper, the problem of failure rate regression model building is solved in machine learning framework using kernel regression method, which makes it possible to effectively approximate nonlinear dependences of equipment failure rate from technological factors. The advantage of proposed approach is the possibility of effective approximation of complex failure rate multivariable dependence from affecting factors, while there is no need to pre-select model structure, complexity of which under such an approach is determined only by amount of training data available.

Preliminary data aggregation using factor and cluster analysis can significantly simplify regression model structure. At the same time, the use of learning on clusters method made it possible to significantly reduce the complexity of resulting model and ensure its smoothing to prevent the effect of "spatial oscillation".

The proposed technique is illustrated by solving a practical problem of failure rate model building for semiconductor production process based on real data.

State of the art. The problems of failure rate model building have been considered in detail in literature; the main attention was paid to the development of methods for constant or slowly changing over time failure rate estimating using only data on failure statistics, building models of the change in the failure rate over time and its trend prediction using time series models [3].

A further development of such an approach was development of methods for failure rate predicting using their models, which take into account various affecting technological and operational factors controlled during production system operation. This approach is implemented by building regression models of failure rate, the foundations of which were laid in fundamental work [4]. Subsequently, methods for failure rate regression models building were studied in works [5–6]. Regression analysis provides a set of statistical methods to estimate the relationship between affecting (explanatory) variables and failure rate as a model outcome. Explanatory variables (predictors or covariates) are variables which might affect a response variable, in reliability context, failure rate.

The usual approach to building regression models includes a preliminary selection of model structure in the form of a parameterized functional dependence between output variable and explanatory variables (covariates), followed by unknown models' parameters statistical evaluation or model training using datasets of measured covariates and failures. The main problem lies precisely in the choice of model structure, the complexity of which must be consistent with amount of data available for model training, which in the problem under consideration is greatly complicated by the lack of a priori information about the dependence of failure rate on affecting variables. Recently, to building regression models, methods of

machine learning and neural networks have begun to be used [7]. In this paper, to solve this problem, we use kernel-based machine learning method [8] developed to build high-dimensional multivariate nonlinear regression models.

Problem statement. Consider the problem of building a regression model of failure rate using dataset, containing information on the number of failures of recoverable systems in certain time intervals and the results of measurements of technological and operational factors affecting system reliability. A set of restored items are considered, moreover, on each time interval n with length τ the number of failures $\{f_n(\tau), n = 0, 1, 2, \dots\}$ is observed. At the same time, a set of technological and/or operational factors (covariates in terminology of reliability regression analysis) $\mathbf{x}^T = [x^1 \ x^2 \ \dots \ x^N]$, that affect the failure rate $\lambda(\mathbf{x})$ is measured; measurements are made at successive times instances $\mathbf{x}(t_k)$ during a certain observation time interval.

It is assumed, that at each observation interval affected factors relative variations are insignificant and they can be replaced with a sufficient degree of accuracy by their average value over the interval, thus $\mathbf{x}_n^T = [x_n^1 \ x_n^2 \ \dots \ x_n^N]$ will be considered as feature vector.

We will interpret the number of failures at current observation interval as the results of "measurements" the failure rate for corresponding value of feature vector at this interval. In this way, the problem of failure rate model building is reduced to restoring unknown dependence $\lambda(\mathbf{x})$, using measurements dataset $\{f_n, \mathbf{x}_n\}_{n=1}^M$, where M is a number of observations intervals. In what follows, we will denote $\mathbf{X}_M^T = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_M]$ the matrix of feature measurements (training dataset) over entire observation.

Let's take failure rate multivariable regression model in parametrized quasi-linear form

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{w}, \mathbf{x}) &= \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x})\mathbf{w}, \\ \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}) &= [\varphi^1(\mathbf{x}), \varphi^2(\mathbf{x}), \dots, \varphi^N(\mathbf{x})], \end{aligned} \quad (1)$$

where $\mathbf{w}^T = [w^1 \ w^2 \ \dots \ w^N]$ – model' parameters vector;

$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ – vector of coordinate functions,

\mathbf{T} – sign of transposition.

Then measurement model taking into account (1) in turn can be represented as

$$y_n = \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}_n)\mathbf{w} + \varepsilon_n, \quad n = \overline{1, M}, \quad (2)$$

where $y_n = f_n / \tau$ – number of failures per time unit in n -th observation interval,

ε_n – failure rate measurement error, which is, in fact, the deviation of recorded number of failures on time interval from their predicted by model (1) value.

In matrix-vector form measurement equation (2) may be represented as

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_M &= \Phi_M \mathbf{w} + \varepsilon_M, \\ \Phi_M^T &= [\varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \dots \varphi(\mathbf{x}_M)], \end{aligned} \quad (3)$$

where $\mathbf{y}_M^T = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_M]$ and $\varepsilon_M^T = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_M]$ are vectors of measurements and errors respectively.

Using the ordinary least squares (OLS) method, model (1) parameters estimate can be obtained as a solution of following optimization problem:

$$(\mathbf{y}_M - \Phi_M \cdot \mathbf{w})^T (\mathbf{y}_M - \Phi_M \cdot \mathbf{w}) \rightarrow \min_{\mathbf{w}}, \quad (4)$$

which is well known $\hat{\mathbf{w}}_M = (\Phi_M^T \Phi_M)^{-1} \Phi_M^T \mathbf{y}_M$.

Meanwhile, the use of such traditional approach in the case under consideration encounters significant difficulties connected with the necessity of rational choice of coordinate functions $\varphi(\mathbf{x})$ and their number, which, in the absence of a priori information about unknown restored dependence, is a difficult problem. In addition, the possible ill-conditionality of measurement's matrix $\Phi_M^T \Phi_M$, which occurs with a relatively slow change in affected factors, leads to a significant increase in estimation error.

Materials and methods. In this regard, to solve the problem of failure rate model building, it is advisable to use kernel-based machine learning method [8], which removes the problem of choosing of a system of coordinate functions. Let us choose coordinate function such that their scalar products $\varphi^T(\mathbf{x}_i) \cdot \varphi(\mathbf{x}_j) = \kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, $i, j = \overline{1, M}$ are kernel functions; for definiteness, choose a system of kernels in the form of radial basis functions (RBF) $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \exp(-\sigma \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))$, $\sigma > 0$.

In accordance with kernel-based learning technique, introduce kernel matrix $\mathbf{K}_n = \Phi_M \Phi_M^T$, which may be found directly without reference to coordinate vector functions, because $\mathbf{K}_n = [k_{ij}]$, $k_{ij} = \kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, $i, j = \overline{1, M}$.

We find model (1) parameters, in according to OLS kernel approach [8] by regularized functional minimization with linear constraints

$$\varepsilon_M^T \varepsilon_M + \gamma \mathbf{w}^T \mathbf{w} \rightarrow \min_{\mathbf{w}, \varepsilon}, \quad \varepsilon_M = \mathbf{y}_M - \Phi_M \mathbf{w}, \quad (5)$$

where $\gamma > 0$ – regularization parameter.

Introduce Lagrange function

$$\begin{aligned} \Lambda(\varepsilon_M, \mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}) &= \\ &= \varepsilon_M^T \varepsilon_M + \gamma \mathbf{w}^T \mathbf{w} + \boldsymbol{\mu}^T (\varepsilon_M - \mathbf{y}_M + \Phi_M \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (6)$$

we obtain optimization problem (5) solution in the form

$$\hat{\mathbf{w}}_M = \Phi_M^T (\gamma \mathbf{I}_M + \Phi_M \Phi_M^T)^{-1} \mathbf{y}_M. \quad (7)$$

Taking into account that

$$\begin{aligned} \Phi_M \Phi_M^T &= \mathbf{K}_n = [\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)], \\ \varphi^T(\mathbf{x}) \cdot \Phi_M^T &= [\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \ \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) \ \dots \ \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}_M)] = \boldsymbol{\kappa}_M^T(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (8)$$

we get final expression for failure rate model $\hat{\lambda}_M(\mathbf{x})$ obtained by training data $\{f_n, \mathbf{x}_n\}$, $n = \overline{1, M}$

$$\hat{\lambda}_M(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\kappa}_M^T(\mathbf{x}) (\gamma \mathbf{I}_M + \mathbf{K}_M)^{-1} \mathbf{y}_M. \quad (9)$$

Note that regression model (9) depends only from elements of kernel matrix \mathbf{K}_M and vector $\boldsymbol{\kappa}_M(\mathbf{x})$, calculated at the points of training sample and does not require a preliminary choice of coordinate functions. Regularization ensures stability of computational procedure even for ill-conditioned kernel matrix \mathbf{K}_M .

Using kernel approach allows approximating complex multidimensional dependencies, however, since the number of kernels used is determined by number of points in training dataset, the resulting restored dependency may have the property of “spatial oscillation”. To prevent this undesirable effect, it is advisable to carry out additional smoothing of restored dependence on data cloud.

To do this, we use an additional regularization of optimization problem (5), using *data graph model* [9], described by adjacent graph, consists of nodes, that are all observed data points, and matrix $\mathbf{V} = [v_{ij}]$, $i, j = \overline{1, M}$ determines edge weights v_{ij} in adjacency graph, wherein the edge, connecting two data graph nodes $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, is weighted by kernel function

$$v_{ij} = \kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\{-\omega \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2\}, \quad \omega > 0, \quad (10)$$

defined over graph nodes [10] and reflect data cloud geometric structure.

In this way, additional regularization term, smoothing the evaluated function $\lambda(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ on training dataset with edge weights v_{ij} is the following:

$$\Omega(\mathbf{w}, \mathbf{X}_M) = \sum_{i, j=1}^n v_{ij} (\lambda(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) - \lambda(\mathbf{w}, \mathbf{x}_j))^2. \quad (11)$$

Thus, graph regulariser (10) ensures to find restored function $\lambda(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ which has similar values for close data points from training dataset.

In accordance with [11] approach, let's take manifold regularization term as data depended semi-norm

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{w}, \mathbf{X}_M) &= \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{w}, \mathbf{X}_M) \mathbf{L} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{w}, \mathbf{X}_M), \\ \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{w}, \mathbf{X}_M) &= [\lambda(\mathbf{w}, \mathbf{x}_1), \lambda(\mathbf{w}, \mathbf{x}_2), \dots, \lambda(\mathbf{w}, \mathbf{x}_M)]^T, \end{aligned} \quad (12)$$

where \mathbf{L} – graph Laplacian matrix,

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{V},$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}[d_{11} \ d_{22} \ \dots \ d_{MM}], \quad d_{jj} = \sum_{i=1}^M v_{ij}. \quad (13)$$

At that, to construct a smoothing regulariser, we will use data-dependent kernels, corresponding to semi-norm $\Omega(\mathbf{w}, \mathbf{X}_M)$; explicit form of transformed reproducing kernel $\tilde{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, derived in [11], are given by:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \\ &+ \boldsymbol{\kappa}_M^T(\mathbf{x}) (\mathbf{I}_M + \mathbf{L} \mathbf{K}_M)^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\kappa}_M(\mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (14)$$

where $\mathbf{K}_M, \mathbf{k}_M(\mathbf{x})$ defined by (8).

Such a choice of kernel functions implements the smoothness assumption with respect to training dataset geometric structure.

Obtained transformed kernels can be used to modify failure rate kernel-based regression model:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}_M &= \Phi_M^T (\gamma \mathbf{I}_M + \tilde{\mathbf{K}}_M)^{-1} \mathbf{y}_M, \\ \tilde{\lambda}_M(\mathbf{x}) &= \tilde{\mathbf{k}}_M^T(\mathbf{x}) (\gamma \mathbf{I}_M + \tilde{\mathbf{K}}_M)^{-1} \mathbf{y}_M, \\ \tilde{\mathbf{k}}_M^T(\mathbf{x}) &= [\tilde{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \tilde{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) \dots \tilde{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_M)], \end{aligned} \quad (15)$$

where $\tilde{\mathbf{K}}_M = [\tilde{\kappa}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)]$ is transformed kernel matrix.

Thus, dependence (15) describes obtained smoothed kernel-based regression model, that determines relationship between failure rate and affecting factors.

Case study. The proposed technique was investigated using real data from semiconductor manufacturing industry, which was provided by Michael McCann and Adrian Johnston [12]. The study uses Semiconductor Manufacturing (SECOM) dataset available from University of California, Irvine Machine Learning Repository UCI Machine Learning Repository: SECOM Data Set. The SECOM dataset contains data collected during semiconductor manufacturing process and represents a series of monitoring signals from sensors at process measurement points. Each example of SECOM dataset represents a single production entity with associated measured features (affected technological factors), the labels represent a simple pass/fail Yield in production quality control (Yield = -1, pass, no failure, and Yield = +1, fail), and associated date time stamp.

Training dataset contains 1567 examples, each with 590 measured features, and only 104 themes represent yield failures.

Two datasets are provided [12]:

- secom_data.csv, contains time series of features measurements from sensors;
- secom_labels.csv, contains time units and for each time unit output result (yield pass/fail).
- Calculations for numerical experiments were carried out using free software machine-learning library Scikit <https://scikit-learn.org/stable/>.

The presence of a large number of observations and their heterogeneous structure and statistical properties predetermine the need of preliminary data cleaning and preprocessing.

Some results of preliminary analysis of SECOM data are illustrated in fig. 1. Proportion of failures in total set of observations (fig. 1, a) indicates, that dataset is unbalanced, there are only 7% “failed” items. Analysis of statistics of failures distribution at fixed time intervals (fig. 1, b) confirms the hypothesis of its Poisson distribution, and finds the assumption of failure rate constancy at certain time intervals.

Analysis of empirical distributions of affecting technological factors showed that in the most cases features are distributed approximately normally, for example, histograms visualization of measurements from first 9 sensors are presented at fig. 2.

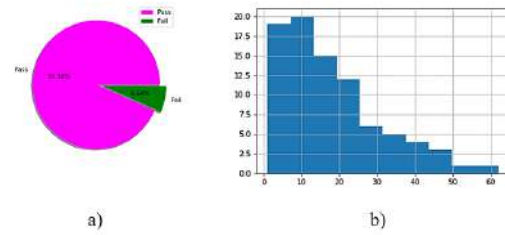


Fig. 1. Training dataset properties:
a – diagram of proportion of failures in total observations;
b – histogram of the daily distribution of failures

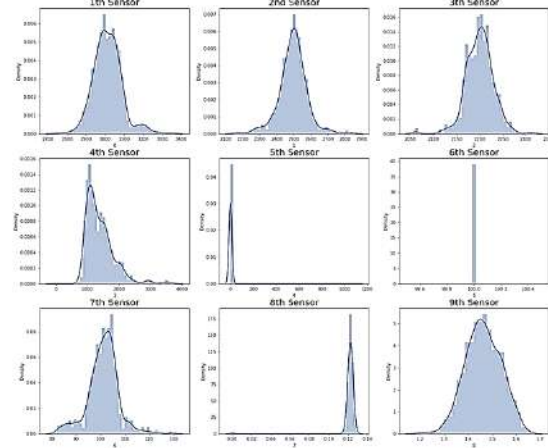


Fig. 2. Measured signals from first 9 sensors histograms

Features covariance matrix heatmap is presented at fig. 3, the number of factors having positive or negative covariance values of more than 70% is equal to 262. At the stage of data cleaning, pairs of features with a covariance of more than 70% were removed; after this manipulation, we get a total of 212 features.

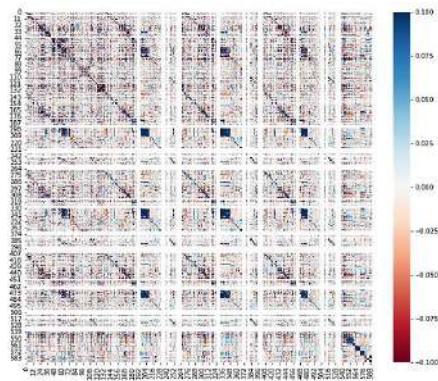


Fig. 3. Features covariance matrix heatmap

Preliminary analysis showed that training dataset has significant redundancy and contains many collinear feature vectors. Thus, there is a need to aggregate data, which is a prerequisite to reduce model complexity and training time and increase model performance.

Data aggregation was carried out in three stages. At the first stage, the entire set of observations was divided into successive intervals, for each of which the observed number of failures was fixed, and the feature vectors were replaced by their current average value over the intervals.

At the *second stage*, the reduction in the number of features was performed by method of factor analysis, which performs a linear transformation of original feature vectors into the space of hidden factors of a smaller dimension. Experimentally, the number of hidden factors, which aggregate original features, was chosen as 5, the structure of correlations between the initial features and found hidden factors is illustrated by corresponding covariance matrix, which is shown in fig. 4.

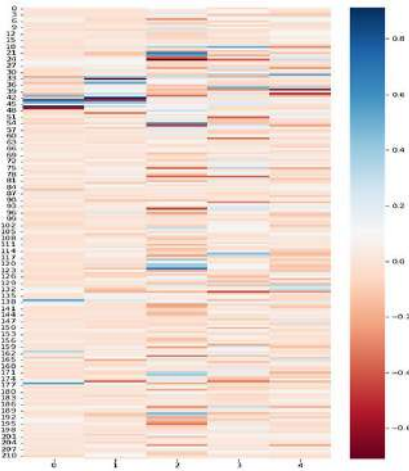


Fig. 4. Features-factors covariance matrix heatmap

Fig. 4 clearly shows, that each of hidden factors correlates well with a certain group of initial features, while obtained factors themselves do not correlate (fig. 5).

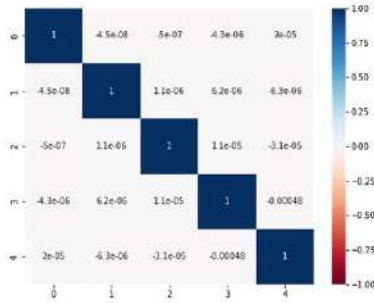


Fig. 5. Hidden factors covariance matrix

At the *third stage* of preprocessing, the clustering of reduced dataset in factor space was carried out in order to reduce the number of kernel functions in resulting failure rate model, while centers of clusters were chosen as centers of the kernel components of regression model, and average values of number of failures for each cluster were used as measured response function. At that, the construction of a regression model on clusters in hidden factors space provides its additional smoothing as a result of number reduction of kernel functions used.

On fig 6, 7 the results of model training are presented, regression model surface is given in projections on axes corresponding to hidden factors (a – X1-X2 projection, b – X1-23 projection, c – X1-X4 projection, d – X1-X5 projection). Fig 6 shows visualization of base regression model, trained on dataset constructed from original

features, averaged over the intervals, fig. 7 shows cluster-based regularized smoothed model.

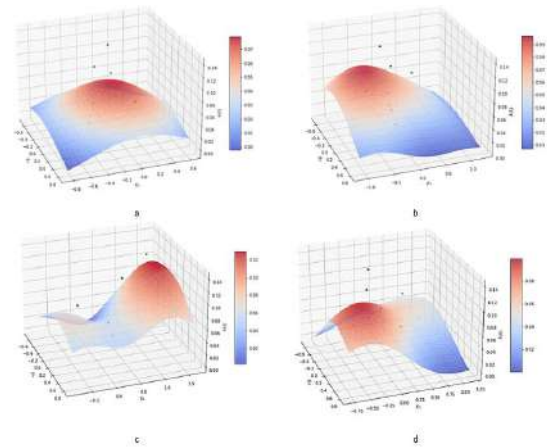


Fig. 6. Failure rate base regression model visualization

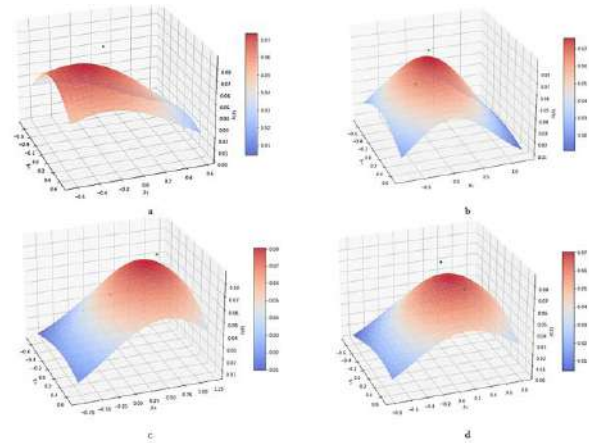


Fig. 7. Failure rate smoothed regression model visualization

As a performance metric for built regression models mean absolute error (MAE) was chosen. The results of computational experiments show that cluster-based smoothed model demonstrates slight decrease in accuracy (MAE=0.0211 compared to MAE=0.0199 for base model), but avoids “spatial oscillation” as well as overfitting, and is more stable to outliers and noise.

Conclusions. The results obtained indicate, that proposed method for failure rate kernel-based regression model building using machine learning technique provides an opportunity to analyze the influence of a large number of technological and operational affecting factors and to successful approximate complex dependences of reliability indicators with high accuracy. Further development of proposed approach is expedient in terms of developing methods and algorithms for failure rate and failures themselves forecasting based on time series of affecting factors measurements in real time. To build a predictive time-series model, it is also advisable to use kernel machine learning methods.

References

1. Boardman N., Hu W., Mishra R. Optimal Maintenance Design for a Simple Repairable System. *Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control*. 2019. P. 3098–3103.

2. Wang J., Yin H. Failure Rate Prediction Model of Substation Equipment Based on Weibull Distribution and Time Series Analysis. *IEEE Access*. 2019. Vol. 7. P. 298–309.
3. Jones H. A Method and Model to Predict Initial Failure Rates. *Annual Reliability and Maintainability Symposium*. 2020. P. 1–6.
4. Ястребенецкий М. А., Соляник Б.А. *Определение надежности аппаратуры промышленной автоматики в условиях эксплуатации*. Москва: Энергия, 1968. 128 с.
5. Jürgensen J. *Individual Failure Rate Modelling and Exploratory Failure Data Analysis for Power System Components. Doctoral Thesis*. Stockholm, KTH, 2018. 79 p.
6. Jürgensen J., Nordström L., Hilber P. Estimation of Individual Failure Rates for Power System Components Based on Risk Functions. *IEEE Trans. on Power Delivery*. 2019. Vol. 34, no. 4. P. 1599–1607.
7. Susto G., Schirru A., Pampuri S., McLoone S., Beghi A. Machine Learning for Predictive Maintenance. *IEEE Transactions Industrial Information*. 2015. Vol. 11. P. 812–820.
8. Scholkopf B., Smola A. *Learning with Kernels*. Cambridge: MA, MIT Press. 2002. 640 p.
9. Guo X., Uehara K. Graph-based Semi-Supervised Regression and Its Extensions. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2015. Vol. 6, no. 6. P. 260–269.
10. Pozdnoukhov A., Bengio S. Semi-supervised kernel methods for regression estimation. *Proc. of IEEE Intern. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. 2006. P. 577–580.
11. Sindhwani V., Niyogi P., Belkin M. Beyond the Point Cloud: from Transductive to Semi-supervised Learning. *Proc. of the 22nd international conference on Machine learning*. 2005. P. 824–831.
12. McCann M., Johnston A. *SECOM Data Set 2008*. URL: <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/secom> (accessed 20.08.2021).

References (transliterated)

1. Boardman N., Hu W., Mishra R. Optimal Maintenance Design for a Simple Repairable System. *Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control*. 2019, pp. 3098–3103.

Received 15.11.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Ахієзер Олена Борисівна – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувачка кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7087-9749>; e-mail: olena.akhiezer@khp.edu.ua

Грінберг Галина Леонідівна – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри маркетингу; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0774-5414>; e-mail: galyna.grinberg@khp.edu.ua

Любчик Леонід Михайлович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0237-8915>; e-mail: leonid.liubchuk@khp.edu.ua

Ямковий Клим Сергійович – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», асистент кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9512-4150> e-mail: klym.yamkovyi@cs.khp.edu.ua

Akhiezer Olena Borisivna – Candidate of Technical Sciences, Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Head of Computer Mathematics and Data Analysis Department; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7087-9749>; e-mail: olena.akhiezer@khp.edu.ua

Grinberg Galyna Leonidivna – Candidate of Technical Sciences, Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at Department of Marketing; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0774-5414>; e-mail: galyna.grinberg@khp.edu.ua

Lyubchuk Leonid Mykhailovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Professor of Computer Mathematics and Data Analysis Department; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0237-8915>; e-mail: leonid.liubchuk@khp.edu.ua

Yamkovyi Klym Serhiyovych – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Assistant Professor of Computer Mathematics and Data Analysis Department; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9512-4150>; e-mail: klym.yamkovyi@cs.khp.edu.ua

О. М. НИКУЛІНА, В. П. СЕВЕРИН, В. О. ШАРОВ

РОЗРОБКА МОДЕЛІ ЗАВАДОСТІЙКОЇ ПЕРЕДАЧІ ДАНИХ ДЛЯ ІНФОРМАЦІЙНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ ОПТИМІЗАЦІЇ УПРАВЛІННЯ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Для каналів передачі даних, що використовуються у локальних системах управління різними процесами, необхідні прості й не затратні методи, які дозволяють передавати необхідну інформацію без помилок. Помилки, які трапляються у безперервних каналах зв'язку – одна з основних перепон для достовірної передачі інформації. В результаті аналізу статистики помилок у дискретних каналах зроблено висновок, що найчастіше виникають однократні та двократні помилки. Мета даної статті полягає в розробці моделі завадостійкої передачі даних для інформаційної технології оптимізації управління динамічними системами. Проаналізовані причини виникнення помилок – загасання сигналу, шум та різні перешкоди. Результуючий переданий сигнал визначається поєднанням корисного сигналу і сигналу перешкод. При розгляді дискретних сигналів виділено декілька причин помилок – крайові спотворення, дроблення імпульсів та інші. Розглянуті методи боротьби з завадами: засоби експлуатаційного і профілактичного характеру; засоби підвищення перешкодостійкості при передачі одиничних елементів; використання зворотного зв'язку; додавання надлишковості до коду; завадостійке кодування. Запропоновано боротись із помилками використанням завадостійкого кодування. Серед завадостійких кодів виділені надлишкові блочні розділими систематичні коди, які поділяють на циклічні коди та код Хеммінга. В основу моделі завадостійкого кодування запропоновано покласти використання систематичного коду – циклічного коду або коду Хеммінга з наступним каскадним кодуванням. Оскільки модель кодування має адаптивно використовуватись в різних системах, необхідним критерієм моделі є її універсальність. Модель повинна працювати в різних системах без зміни алгоритмів кодування та декодування. Серед багатьох видів завадостійких кодів обрано для використання каскадні коди. Розповсюджені каскадні коди є універсальними, легко масштабуються, працюють стабільно, добре себе зарекомендували у світовій практиці, тому їх рекомендовано для використання у різних інформаційних управляючих системах. Наведена реалізація моделі завадостійкої передачі даних.

Ключові слова: передача даних, завадостійкість, кодування, коригуючі коди, модель, динамічні системи, інформаційна технологія.

O. M. NIKULINA, V. P. SEVERYN, V. O. SHAROV

DEVELOPMENT OF A MODEL OF INTERFERENCE-RESISTANT DATA TRANSMISSION FOR INFORMATION TECHNOLOGY OF CONTROL OPTIMIZATION OF DYNAMIC SYSTEMS

For data transmission channels used in local control systems for various processes, simple and inexpensive methods are needed that will allow the necessary information to be transmitted without errors. Errors that occur in continuous communication channels are one of the main obstacles to the reliable transmission of information. As a result of the analysis of error statistics in discrete channels, it was concluded that single and double errors occur most often. The purpose of this article is to develop a model of interference-resistant data transmission for information technology optimization of control of dynamic systems. The analyzed causes of errors are signal attenuation, noise and various interferences. The resulting transmitted signal is determined by the combination of the useful signal and the interference signal. When considering discrete signals, several causes of errors are highlighted – edge distortions, pulse splitting, and others. Considered methods of combating obstacles: means of operational and preventive nature; means of increasing interference resistance during the transmission of single elements; use of feedback; adding redundancy to the code; tamper-proof coding. It is proposed to combat errors using tamper-resistant coding. Among the interference-resistant codes, redundant block separable systematic codes are selected, which are divided into cyclic codes and Hamming code. The basis of the interference-resistant coding model is the use of a systematic code – a cyclic code or a Hamming code followed by cascade coding. Since the coding model must be adaptively used in different systems, a necessary criterion of the model is its universality. The model should work in different systems without changing the encoding and decoding algorithms. Among the many types of interference-resistant codes, cascade codes are chosen for use. Widespread cascade codes are universal, easily scalable, work stably, have proven themselves well in world practice, therefore they are recommended for use in various information management systems. The implementation of the interference-resistant data transmission model is presented.

Keywords: data transmission, immunity, coding, correcting codes, model, dynamic systems, information technology.

Вступ. Майже кожний персональний комп'ютер під'єднаний до єдиної світової глобальної мережі, кожне підприємство має свою локальну обчислювальну мережу. Все це складає мільярди з'єднаних пристроїв. Для забезпечення зв'язку між усіма пристроями прокладені канали, які їх зв'язують. З цього випливає велика кількість проблем зв'язку: як передати інформацію так, щоб отримувач повідомлення отримав ту ж саму інформацію, яку йому відправляли; як мінімізувати витрати на утримання каналів зв'язку та інші.

На сьогодні проблема завадостійкої передачі даних по каналам зв'язку є концептуально однією з найважливіших у теорії передачі даних. За реальних умов при передачі великих масивів даних на покращення якості інформації, що передається, і забезпечення завадостійкості інформації компанії витрачають

не менше, а іноді й більше ресурсів, ніж на генерацію та обробку цієї інформації. Тому проблема завадостійкості передачі даних є актуальною.

Завадостійкість динамічних систем. В теперішній час існує багато складних динамічних систем, управління якими вимагає використання інформаційних технологій для створення або удосконалення спеціалізованих інформаційних управляючих систем. Типовим прикладом такої складної динамічної системи є інформаційна управляюча система енергоблоку АЕС, що складається з багатьох локальних систем та потребує модернізації шляхом оптимізації різних показників якості [1, 2].

Одним із показників є якість каналів зв'язку, які використовуються для передачі інформації. Неякісні канали передачі даних, або неякісні технології, які

© О. М. Нікуліна, В. П. Северин, В. О. Шаров 2022



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом *НТУ «ХПІ»* у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХПІ» Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



використовуються у каналах передачі даних енергоблоку АЕС, можуть призводити до позаштатних ситуацій при експлуатації різних систем на АЕС, або навіть аварій.

Проблеми можуть виникати з причини помилок, які трапляються у каналах передачі даних, що може призводити до неправильної інтерпретації даних. Наприклад, замість коду «0100110110111010», що буде означати «Температура реактора у нормі» прийде код із фазовим зсувом «0010011011011101», що буде означати «Температура реактора нижче норми», що може привести, як наслідок, до техногенної катастрофи масштабів Чорнобилю або Фукусіми.

Статистика помилок передачі даних. У табл. 1 наведені приблизні значення ймовірностей p_0 переключувань елементарних двійкових символів для різних типів каналів зв'язку. Для аналізу використовується ймовірнісний критерій, оскільки його доцільно використовувати для оцінки завадостійкості дискретних каналів зв'язку при відомих ймовірнісних характеристиках сигналу і перешкод [3].

Таблиця 1 – Ймовірності переключувань елементарних двійкових символів

Тип каналу зв'язку	Ймовірність p_0
Повітряні провідні канали	$10^{-2} - 10^{-3}$
Кабельні і хвильові канали	$10^{-4} - 10^{-6}$
Радіорелейні канали	$10^{-3} - 10^{-4}$
УКХ канали прямої видимості	$10^{-3} - 10^{-4}$
Короткохвильові канали	$10^{-1} - 10^{-2}$

Для кабельних, хвильових та більшості інших типів каналів притаманне значення ймовірності переключувань $p_0 = 10^{-4}$, тому саме для такої ймовірності розглянуто кратність помилок [3, 4].

У каналах без пам'яті, тобто у каналах, у яких ймовірність появи символу на виході з каналу залежить тільки від символу на вході до каналу, ймовірність отримання будь-якої послідовності символів на виході визначається заданою послідовністю на вході. Так ймовірність переключування n розрядів знаходиться за формулою [5]

$$P_t = C_n^t \cdot p_0^t \cdot (1 - p_0)^{n-t}, \quad (1)$$

де P_t – ймовірність помилки кратності t в кодовій комбінації;

C_n^t – число поєднань з n по t .

Наведена ймовірність переключувань (1) дає можливість проаналізувати у яких розрядах найчастіше трапляються помилки та кратність яких помилок є найбільш небезпечною через втрату достовірності інформації. Статистика помилок залежно від довжини блоку даних наведена в табл. 2, де n – загальна кількість розрядів у повідомленні, $p_{\text{мн}}$ – ймовірність помилкового прийому блоку даних розміром n , μ_n^t –

помилка кратності t при блоці розміром n [3]. Ймовірність $p_{\text{мн}}$ – це сума всіх ймовірностей помилок для всіх розрядів у комбінації за формулою (1).

Таблиця 2 – Статистика помилок

n	Кратність помилки μ_n^t у відсотках						$p_{\text{мн}}$
	1	2	3	4	5	6	
4	78	21	1	–	–	–	0.01600
9	56	32	9	3	–	–	0.00274
16	42	37	12	6	1	–	0.00400
30	40	29	13	8	5	2	0.00630

З даних табл. 2 видно, що абсолютна більшість помилок припадає на помилки кратності 1 і 2, таких помилок більше 80 %.

На рис. 1 показані графіки залежності ймовірності помилки кратності t

$$p(\mu) = p_{\text{мн}} \cdot \mu_n^t \quad (2)$$

від n та $p_{\text{мн}}$, що визначають ймовірність переключувань.

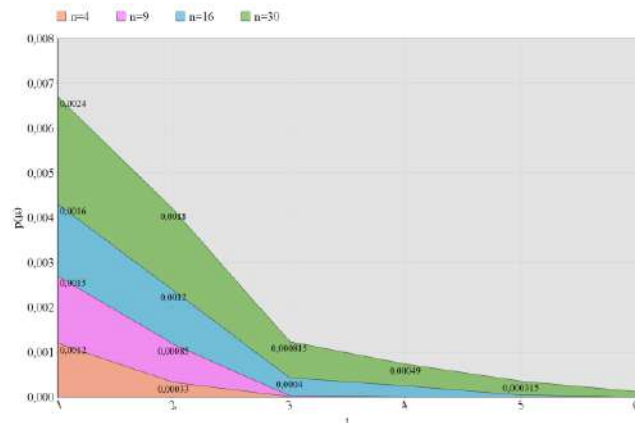


Рис. 1. Ймовірність переключувань залежно від кратності помилки та ймовірності помилкового прийому

За даним графіком помилки кратності більше 2 настільки малоймовірні, що їх можна не враховувати. Оскільки для більшості каналів зв'язку притаманне значення ймовірності переключувань $p_0 = 10^{-4}$, а сучасні канали зв'язку навіть можуть гарантувати значення $p_0 = 10^{-6}$. Оптиковолоконні канали передачі забезпечують значення p_0 від 10^{-8} до 10^{-10} [4]. Таким чином ймовірність (2) помилки кратності більше 2 настільки малоймовірні ($\approx 0,0000004$), що такі помилки на практиці можна не враховувати [4].

Мета та задачі дослідження. Мета статті полягає в розробці моделі завадостійкої передачі даних для інформаційної технології оптимізації управління динамічними системами. Для досягнення мети поставлено задачі.

1. Проаналізувати причини виникнення помилок.
2. Розглянути методи боротьби з завадами.
3. Побудувати завадостійку модель передачі даних.

Аналіз причин виникнення помилок. Будь-який технічний засіб може викликати помилки – ситуації, коли двійкова одиниця під впливом ряду факторів перетвориться на нуль і навпаки. Причинами виникнення помилок є загасання сигналу, шум та різні перешкоди [3].

Загасання сигналу – це зменшення значення струму, напруги або потужності сигналу, коли частина енергії сигналу розсіюється у вигляді втрат під час поширення сигналу в лінії зв'язку, що знижує чіткість прийому. Шум – це шкідливі сигнали, які поєднуються з корисним сигналом, призначеним для передачі та прийому, і спотворюють його. Білий шум (тепловий шум) – статистичний однорідний шум, що є результатом руху заряджених частинок у фізичному середовищі передачі. Перешкода – небажана енергія, що призводить до спотворення сигналу під час обробки, зберігання та передачі інформації. Перешкоди можуть виникати поза апаратними засобами, що приймають сигнал (зовнішні перешкоди), так і всередині них (внутрішні перешкоди) [5].

Розрізняють корисний сигнал $S_c(t)$, тобто. Сигнал, що несе інформацію, яку слід передати, та сигнали перешкод $S_n(t)$, що генеруються джерелами перешкод. Результуючий сигнал $\alpha(t)$ визначається поєднанням корисного сигналу і сигналу перешкод.

Якщо результуючий сигнал $\alpha(t)$ представлено у вигляді $\alpha(t) = S_c(t) + S_n(t)$, то перешкода називається адитивною. Якщо ж $\alpha(t)$ представляється у вигляді $\alpha(t) = S_c(t) \cdot S_n(t)$, то перешкода називається мультиплікативною. Якщо сигнал $S_n(t)$ є цілком визначеною функціональною залежністю, за якою можна абсолютно точно відновити корисний сигнал на основі результуючого сигналу, то відповідні перешкоди називаються регулярними [5, 6].

Якщо ж відновити вихідний сигнал неможливо, то говорять про нерегулярні перешкоди. За виглядом сигналу завад $S_n(t)$ виділяють два типи завад – шумові та імпульсні завади [3]. Шумові завади формують сигнал $S_n(t)$ як безперервну випадкову функцію часу. Такі завади найчастіше підпорядковуються нормальному закону розподілу. Імпульсні завади формують сигнал $S_n(t)$ як послідовність окремих енергетичних викидів з випадковими параметрами: амплітудою, моментом появи, тривалістю.

При розгляді дискретних сигналів виділяють декілька причин помилок. Крайові спотворення, коли зміщується фронт імпульсу, можуть утворитися з причини певної затримки t у підсилювальних генераторах, котрі по мірі проходження сигналу по каналу відновлюють сигнал для відновлення форми імпульсів. Приклад крайового спотворення показано на рис. 2, де t_{\max} та t_{\min} – межі можливого зміщення фронтів прийнятого імпульсу.

Для дискретного повідомлення таке крайове спотворення означає, що передана комбінація символів «1110» буде спотворена на комбінацію «0111» (рис. 3).

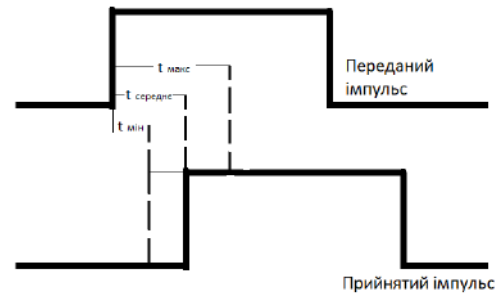


Рис. 2. Приклад крайового спотворення

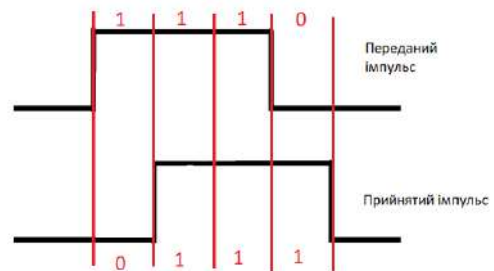


Рис. 3. Приклад крайового спотворення у дискретному форматі

Дроблення імпульсів у вигляді різкого зниження рівня або полярності сигналу у середині імпульсів є результатом нестабільності коефіцієнта передачі каналу зв'язку, імпульсних завад та інших причин. Приклад дроблення імпульсів показано на рис. 4. Причинами нестабільності коефіцієнту передачі у дротових лініях зв'язку є комутація, метеорологічні умови, перенавантаження підсилювачів, погані контакти, переключення у апаратурі.

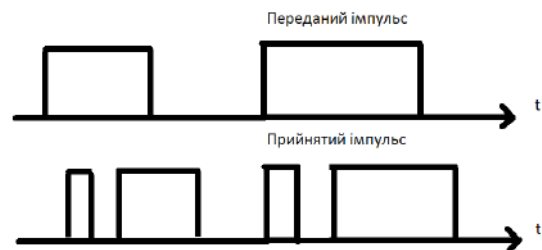


Рис. 4. Приклад дроблення імпульсів

При переході до дискретного повідомлення дроблення імпульсів буде означати, що передана комбінація символів «1111000111110» буде спотворена на комбінацію «01011100101111» (рис. 5).

Помилки під час передачі комбінацій символів можуть бути одноразовими (однократними) і багаторазовими – дворазовими (двократними), триразовими (трикратними) й так далі. З проведеного аналізу причин виникнення помилок можна зробити висновок, що помилки при передачі даних – розповсюджене явище, з яким необхідно боротися. Для того, щоб підібрати методи боротьби з завадами, необхідно проаналізувати ці методи [7, 8].

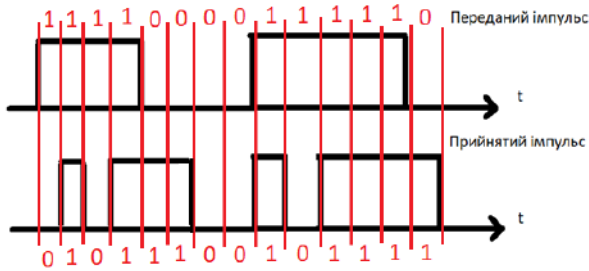


Рис. 5. Приклад дроблення імпульсів у дискретному форматі

Методи боротьби з завадами. Існує багато методів боротьби з помилками при передачі даних. У розширеному дискретному каналі, що включає дискретний канал, кодер та декодер каналу, виділяють наступні методи підвищення достовірності: засоби експлуатаційного і профілактичного характеру; засоби підвищення перешкодостійкості при передачі одиничних елементів; використання зворотного зв'язку; додавання надлишковості до коду; завадостійке кодування [4]. Засоби експлуатаційного і профілактичного характеру мають велике значення при передачі повідомлень, але вони потребують багато часу і значну кількість фінансів. Засоби підвищення перешкодостійкості дають можливість досягти легшої демодуляції та меншої ймовірності перекручувань, але при цьому є необхідність використання більш потужних модулаторів, якісніших каналів передачі, що також потребує істотно більших фінансових витрат. Використання зворотного зв'язку має як перевагу, що не потрібно ускладнювати систему та використовувати більш якісне обладнання, так і недолік – суттєве збільшення витрати часу. Додавання надлишковості до коду теж має перевагу – можливість виправлення або виявлення перекручувань, відсутність необхідності використання більш якісних каналів зв'язку, а також і недолік – зниження інформативності повідомлень [7].

Аналіз цих методів боротьби з завадами обґрунтував для боротьби за завадостійкість вибір методу використання завадостійкого кодування.

Основа моделі завадостійкого кодування. Існує ціла низка завадостійких кодів. Вони різняться за своїми функціями, особливостями структури та фізичними властивостями. Класифікація завадостійких кодів показана на рис. 6. Серед завадостійких кодів перевагу мають надлишкові блочні розділимі систематичні коди. Такі коди поділяють на циклічні коди та код Хеммінга. В основу моделі завадостійкого кодування запропоновано покласти використання систематичного коду – циклічного коду або коду Хеммінга з наступним каскадним кодуванням [9].

Систематичний код має складати першу ступінь каскаду, до якої додається друга ступінь у вигляді біту перевірки на парність. Додавання біту перевірки на парність спричинить можливість виявляти помилки парної кратності, тобто до можливості виправляти однократну помилку додається ще виявлення двократної помилки, що істотно підвищить завадостійкість кодування [10].

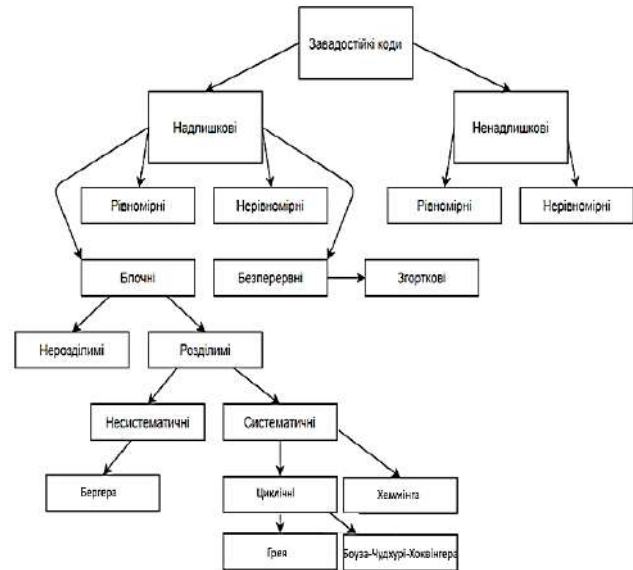


Рис. 6. Види завадостійких кодів

Побудова завадостійких кодів. Побудова завадостійких кодів можлива завдяки введенню надлишковості в код. Це означає, що для передачі інформації застосовується код, у якого в використанні знаходяться не всі доступні комбінації, а тільки деякі з них – коригувальні або надлишкові коди [7, 10, 11].

Надлишковість коду поділяється на абсолютну та відносну. Абсолютна надлишковість – кількість додаткових розрядів

$$k = n - m,$$

де n – загальна кількість елементів у комбінації або довжина комбінації;

m – загальна кількість інформаційних розрядів у комбінації.

Відносна надлишковість вказує на ту частину загальної кількості символів кодової комбінації, яку складають інформаційні символи,

$$K_{\text{відн}} = \frac{k}{n} = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}.$$

Відносна надлишковість визначає швидкість передачі інформації.

Властивості коригування надлишкових кодів є залежними від побудови самих кодів та їх параметрів – числа розрядів, надмірності, тривалості символів та інших. Розглянуто загальні принципи використання надлишковості кодів [10, 11].

На вхід пристрою, що виконує кодування, надходить деяка послідовність m інформаційних двійкових розрядів. На виході цієї послідовності буде відповідати послідовність з n двійкових символів, де $n > m$. Усього може існувати 2^m різних послідовностей з 2^n , які є дозволеними кодovими комбінаціями. Інші $2^n - 2^m$ послідовностей для передачі інформації не використовуються – вони є забороненими.

Помилки при передачі інформації спричиняються тим, що деякі з правильних символів, що передаються,

замінюються на інші – неправильні. Будь-яка із 2^m дозволених комбінацій може бути перевернена на будь-яку іншу. Усього таких випадків перевернення може бути $2^m 2^n$:

1) 2^m випадків безпомилкової передачі;

2) $2^m (2^m - 1)$ випадків переведення в інші дозвлені комбінації, що буде відповідати помилкам, які неможливо виявити;

3) $2^m (2^n - 2^m)$ випадків переходу у недозволені комбінації, що буде відповідати помилкам, які можливо виявити.

Частина помилкових кодових комбінацій, які можливо виявити, від загального числа можливих випадків комбінацій [8]

$$K_{\text{вияв}} = \frac{2^m (2^n - 2^m)}{2^m 2^n} = 1 - \frac{2^m}{2^n}$$

Для оцінки ступеню відмінності між двома довільними комбінаціями вихідного коду використовується характеристика у вигляді відстані між комбінаціями. Найменша відстань між дозвленими кодовими комбінаціями d_{\min} – це дуже важлива характеристика коду, тому що саме вона характеризує його коригувальні здібності.

Нехай необхідно побудувати код, який гарантовано виявляє всі помилки кратністю t і нижче. Побудувати такий код – це означає, що із множини 2^n можливих комбінацій потрібно обрати 2^m дозволених комбінацій таким чином, щоб кожна з них у сумі за модулем два з будь-яким вектором помилок вагою $w \leq t$ не давала б у результаті будь-якої дозвленої комбінації. Для цього необхідно, щоб мінімальна кодова відстань задовольняла умові

$$d_{\min} \geq t + 1.$$

Кодова відстань – це ступінь різності двох будь-яких кодових комбінацій. Для того, щоб підрахувати кодову відстань, необхідно підсумувати кількість одиниць у сумі цих комбінацій за модулем 2 [12, 13].

Реалізація моделі завадостійкої передачі даних.

Для початку роботи моделі завадостійкої передачі даних необхідно сформувати початкову кодову комбінацію, яка буде передаватися по каналу передачі даних. Тому на першому етапі виконується кодування інформаційної комбінації деяким систематичним кодом. Після цього до сформованої кодової комбінації додається біт перевірки на парність. Така комбінація вже передається по каналу.

Декодування кодової комбінації виконується за алгоритмом, блок-схема якого показана на рис. 7.

Якщо перевірка на парність і перевірка першої ступені каскадного коду не виявила помилки, то комбінація надсилається до споживача [13].

Якщо перевірка на парність не виявила помилки, але при декодуванні першого ступеню була отримана помилка, то до відправника надсилається запит про повторну відправку повідомлення. Якщо перевірка на парність не пройдена, то робиться висновок про

наявність однократної помилки. У випадку, якщо при декодуванні першого ступеню була виявлена помилка, то вона виправляється, і виправлене повідомлення пересилається споживачу. Якщо при декодуванні першого ступеню помилки не виявлено, то помилка сталась у біті перевірки на парність. Тому цей біт відкидається і комбінація передається споживачу [13].

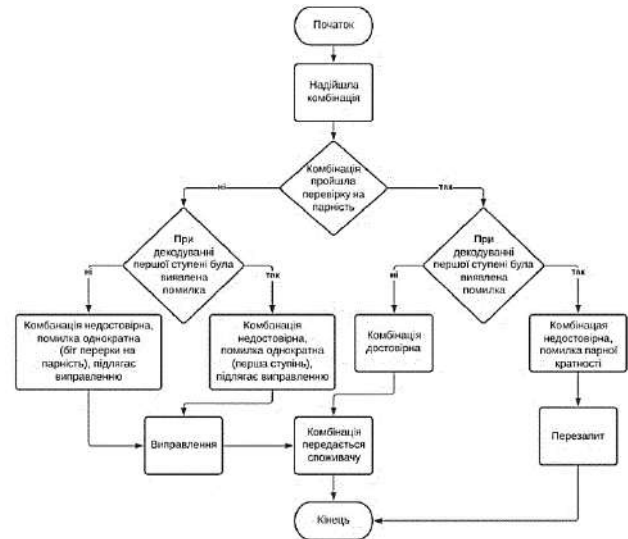


Рис. 7. Алгоритм декодування

наявності помилок у трьох з чотирьох випадків достовірна кодова комбінація надійде до споживача.

Висновки. Дана стаття присвячена розробці моделі завадостійкої передачі даних для інформаційної технології оптимізації управління динамічними системами. За отриманими результатами зроблені наступні висновки.

1. Наведена статистика помилок передачі даних.
2. Проаналізовані причини виникнення помилок.
3. Розглянуті методи боротьби з завадами.
4. Побудована завадостійка модель передачі даних, яка є загальним випадком використання спрощеного каскадного кодування, яка демонструє доцільну простоту використання і практичну цінність даного типу кодування, що є базою для подальшого розширення дослідження по даній темі.

Список літератури

1. Нікуліна О. М., Северин В. П., Кошоба Н. В., Бубнов А. І. Моделювання теплових процесів парогенератора АЕС для інформаційної технології оптимізації управління. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»: сб. наук. пр. Темат. вип.: Системний аналіз, управління та інформаційні технології*. Харків: НТУ «ХПІ», 2021. № 1 (5). С. 56–61.
2. Нікуліна О. М., Северин В. П., Кошоба Н. В. Розробка інформаційної технології оптимізації управління складними динамічними системами. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»: сб. наук. пр. Темат. вип.: Системний аналіз, управління та інформаційні технології*. Харків: НТУ «ХПІ», 2020. № 2 (4). С. 63–69.
3. Захарченко Н. В., Горохов С. М., Кочетков А. В. *Інформаційні параметри позиційних кодів*. Одеса: ОНАС, 2018. 212 с.
4. Bleihut R. *Theory and Practice of Error Control Codes*. 1983. 576 с.

5. Лосев Ю. І., Шматков С. І. *Основи теорії передачі інформації*. Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2013. 290 с.
6. Yue Tang, Tian Mao, Bing Jiang, Design and Experiment of Multi-resolution Composite Digital Array Antenna. *Journal of Radars*. 2016. Vol. 5, № 3. P. 265 p.
7. Банкет В. Л., Івашенко П. В., Іщенко М. О. *Завадостійке кодування в телекомунікаційних системах*. Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2011. 100 с.
8. Жураковський Ю. П., Полтораки В. П. *Теорія інформації та кодування*. Київ: Вища шк., 2001. 255 с.
9. Кожевніков В. Л., Кожевніков В. Л. *Теорія інформації та кодування*. Дніпро: Національний гірничий університет, 2011. 108 с.
10. Jones G. A., Jones J. M. *Information and Coding Theory*. London: Springer-Verlag, 2000. 210 p.
11. Шаров В. О., Бердніков А. Г. Моделювання коригувального каскадного коду в каналах передачі даних системи управління. *Матеріали міжнародної науково-технічної конференції «Комп'ютерне моделювання у наукоємних технологіях»*. Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2021. С. 298–302.
12. Yurong Guan, Zhihua Hu, Chen Chen, Xiaoming Zhu. An anti-noise transmission algorithm for 5G mobile data based on constellation selection and channel joint mapping. *Alexandria Engineering Journal*. 2021. Vol. 60, iss. 3. P. 3153–3160.
13. Жамбаєва О., Сайлауқызы Ж. Noise immunity of data transmission over digital communication channels using convolutional coding. *Engineering Journal of Satbayev University*. 2021. № 143 (2). P. 244–251.
- control of complex dynamic systems]. *Vestnik Nats. tekhn. un-ta "KhPI": sb. nauch. tr. Temat. vyp.: Sistemnyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of the National Technical University "KhPI": a collection of scientific papers. Thematic issue: System analysis, management and information technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2020, no. 2 (4), pp. 63–69.
3. Zakharchenko N. V., Gorokhov S. M., Kochetkov A. V. *Informatsijni parametry pozitsijnyh kodiv* [Information parameters of positional codes]. Odessa, ONAS Publ., 2018. 212 p.
4. Bleihut R. *Theory and Practice of Error Control Codes*. 1983. 576 p.
5. Losev Yu. I., Shmatkov S. I. *Osnovy teotiji peredachi informatsiji* [Fundamentals of the theory of information transfer]. Kharkiv, KhNU named V. N. Karazina Publ., 2013. 290 p.
6. Yue Tang, Tian Mao, Bing Jiang Design and Experiment of Multi-resolution Composite Digital Array Antenna. *Journal of Radars*. 2016, vol. 5, no. 3, p. 265.
7. Banket V. L., Ivashchenko P. V., Ishchenko M. O. *Zavadostijke koduvannya v telekomunatsijnyh systemah* [Interference-resistant coding in telecommunication systems]. Odessa, ONAZ named O. S. Popova Publ., 2011. 100 p.
8. Zhurakovskiy Yu. P., Poltorak V. P. *Teorija informatsiji ta koduvannya* [Theory of information and coding]. Kyiv, Vyscha shk. Publ., 2001. 255 p.
9. Kozhevnikov V. L., Kozhevnikov V. L. *Teorija informatsiji ta koduvannya* [Theory of information and coding]. Dnipro, National Mining University Publ., 2011. 108 p.
10. Jones G. A., Jones J. M. *Information and Coding Theory*. London, Springer-Verlag Publ., 2000. 210 p.
11. Sharov V. O., Berdnikov A. G. Modeluvannya koruguvalnogo kaskadnogo kodu v kanalah peredachi danyh systemy upravlinnja [Simulation of the correcting cascade code in data transmission channels of the control system]. *International scientific and technical conference "Computer simulation in scientific technologies"*. Kharkiv, KhNU named V. N. Karazina Publ., 2021, pp. 298–302.
12. Yurong Guan, Zhihua Hu, Chen Chen, Xiaoming Zhu. An anti-noise transmission algorithm for 5G mobile data based on constellation selection and channel joint mapping. *Alexandria Engineering Journal*. 2021, vol. 60, issue 3, pp. 3153–3160.
13. Zhambaeva O., Sailauqyzy Zh. Noise immunity of data transmission over digital communication channels using convolutional coding. *Engineering Journal of Satbayev University*. 2021, no. 143(2), pp. 244–251.

References (transliterated)

1. Nikulina E. N., Severyn V. P., Kotsiuba N. V., Bubnov A. I. Modeluvannya teplovykh procesiv parogeneratora AES dlya informatsijnoi tekhnologii optymizatsii upravlinnja [Modeling of thermal processes of NPP steam generator for information technology of control optimization]. *Vestnik Nats. tekhn. un-ta "KhPI": sb. nauch. tr. Temat. vyp.: Sistemnyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of the National Technical University "KhPI": a collection of scientific papers. Thematic issue: System analysis, management and information technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2021, no. 1 (5), pp. 56–61.
2. Nikulina E. N., Severyn V. P., Kotsiuba N. V. Rozrobka informatsijnoi tekhnologii optymizatsii upravlinnja skladnymy dynamichnymy systemamy [Development of information technology for optimizing the

Надійшла (received) 01.11.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Нікуліна Олена Миколаївна – д-р техн. наук, доцент, завідувачка кафедри інформаційних систем та технологій Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2938-4215>; e-mail: elniknik02@gmail.com

Северин Валерій Петрович – д-р техн. наук, професор, професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2969-6780>; e-mail: valerii.severyn@khp.edu.ua

Шаров Владислав Олегович – аспірант кафедри інформаційних систем та технологій Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна; ORCID: [0000-0003-3152-0650](https://orcid.org/0000-0003-3152-0650); e-mail: wycptpy@gmail.com

Nikulina Olena Mykolaivna – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of Department Information Systems and Technologies National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2938-4215>; e-mail: elniknik02@gmail.com

Severyn Valerii Petrovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Department System Analysis and Information-Analytical Technologies National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2969-6780>; e-mail: valerii.severyn@khp.edu.ua

Sharov Vladyslav Olegovich – Postgraduate of Department Information Systems and Technologies National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3152-0650>; e-mail: wycptpy@gmail.com

УПРАВЛІННЯ В ОРГАНІЗАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ

MANAGEMENT IN ORGANIZATIONAL SYSTEMS

УДК 330.46

DOI: 10.20998/2079-0023.2022.02.10

*О. С. МЕЛЬНИКОВ***ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ЗБУТОМ У РЕАЛЬНОМУ МАСШТАБІ ЧАСУ**

Предметом дослідження є розробка стратегії динамічного управління цінами при реалізації продукції на фіксованому інтервалі часу. Розглянуто випадок, коли попит на продукцію продавця можна представити як комбінацію двох випадкових процесів: 1) пуассонівського потоку потенційних споживачів; 2) купівлі товару індивідуальним споживачем, ймовірність якої зворотно залежить від ціни продукції. Споживачі потребують щонайбільше одну одиницю товару, що продається і мають незалежні однаково розподілені оцінки його споживчої вартості. Така структура попиту дозволяє формалізувати вибір цінової стратегії як задачу оптимального управління. Рішення цієї задачі методами динамічного програмування наводить до системи диференціальних рівнянь типу Ріккати, розв'язок яких дозволяє отримати оптимальну цінову політику у вигляді функції від часу до закінчення терміну реалізації та рівня залишків нерозпроданої продукції. Розглянуто приклад практичного вирішення задачі оптимального управління цінами для окремих випадків, коли вдається знайти аналітичне рішення. Для загального випадку показано, як знайти оптимальні ціни за допомогою чисельних методів. Розрахунки свідчать, що оптимальні ціни є спадними функціями від часу та кількості нерозпроданої продукції. Комбінація цих факторів разом із випадковим характером збуту продукції наводять до досить складних траєкторій спостережуваних цін, приклади яких були отримані за допомогою імітаційних експериментів. Зокрема, в багатьох випадках результатом імплементації запропонованої стратегії є циклічна поведінка цін, розповсюдженість якої в роздрібній торгівлі є добре документованим феноменом. Також було розглянуто задачу оптимізації очікуваного доходу продавця при використанні ним постійних цін. Зіставлення очікуваного доходу продавця при статичних і динамічних цінах свідчить про значну перевагу останніх. Економічний ефект від використання динамічного ціноутворення є найбільш вагомим у ситуаціях, коли наближується остаточний строк реалізації продукції.

Ключові слова: управління збутом; динамічне ціноутворення; пуассонівський процес; метод зворотної індукції; варіаційне числення

*O. S. MELNIKOV***DISCRETE-CONTINUOUS MODEL OF SALES MANAGEMENT IN REAL TIME**

The subject of the research is the development of a strategy for dynamic price management when selling products over a fixed time interval. We consider the case when the demand for the seller's products can be represented as a combination of two random processes: 1) Poisson flow of potential consumers; 2) the purchase of goods by an individual consumer, the probability of which is inversely related to the price of the product. Consumers need at most one unit of the good and have independent equally distributed estimates of its consumer value. Such demand structure allows to formalize the choice of the optimal pricing strategy as an optimal control problem. Employing dynamic programming methods to solving this problem yields a system of Riccati differential equations. The optimal solution is obtained in the closed-loop form as a function of the time to expiration of the product value and unsold inventory levels. Examples of a practical solution to the optimal pricing problem are given for special cases when it is possible to find an analytical solution. For the general case, it is shown how to find the optimal prices using numerical methods. Calculations show that optimal prices are decreasing functions of time and inventory levels. The combination of these factors, together with the random nature of the product sales, leads to rather complex observed price trajectories, examples of which were obtained using computer simulations. In particular, in many cases, the implementation of the proposed strategy results in cyclical price behavior, the prevalence of which in retail is well documented. The problem of optimizing the expected income of the seller when using constant prices was also solved. Comparison of the expected income of the seller under static and dynamic prices indicates a significant advantage of the latter. The economic effect of using dynamic pricing is most significant near the expiration of the product value.

Keywords: sales management; dynamic pricing; Poisson process; backward induction; calculus of variations

Вступ. Одним із головних елементів, що забезпечує функціонування ринкового механізму, є здатність цін адаптуватися до мінливих економічних умов. Проте, швидкість такої адаптації не завжди є високою. До факторів, які уповільнюють темпи зміни цін, підприємці відносять:

– брак оперативної інформації;

– час, необхідний на усвідомлення змін, що відбулися;

– високі витрати, пов'язані із зміною цін [1].

Деякі видатні економісти (зокрема, кейнсіанської та некейнсіанської школи) навіть вважають надмірну статичність цін («sticky prices») головним чинником періодичних економічних криз [2].

© О. С. Мельников, 2022



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом *НТУ «ХПІ»* у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХПІ» Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Common Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



Розвиток електронної комерції надає компаніям унікальні можливості для більш оперативного коригування цін. Цьому сприяють:

- доступність великих обсягів даних про структуру попиту в реальному масштабі часу (дані про відвідуваність сайту, конверсію продажів, тощо);
- низькі витрати на зміну продажних цін;
- можливість імплементації досить складних алгоритмів коригування цін безпосередньо у програмному середовищі інтернет-магазину.

Це сприяло активізації інтересу до використання алгоритмів динамічного ціноутворення для управління збутом. У широкому сенсі під динамічним ціноутворенням розуміють стратегію гнучкої зміни продажних цін в залежності від ринкових умов. Чинниками, що впливають на ціну товару, можуть бути пора року, день тижня, погода, умови постачання продукції, дії конкурентів тощо.

Особливу популярність методи динамічного ціноутворення набули в тих галузях, де в короткостроковій перспективі пропозицію товарів складно змінити. Прикладами таких ситуацій можуть бути продажі квитків на авіарейси, круїзні лайнери, концерти, спортивні події; бронювання готелів; дорожні збори; послуги постачання газу та електроенергії та ін. Успіх таких практик сприяє їх розповсюдженню також і в інших галузі економіки.

Отже, дослідження механізмів динамічного ціноутворення для оперативного управління збутом і аналіз їх економічної ефективності є актуальним.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Напевно, найперше ідею динамічного регулювання цін для максимізації доходу від реалізації продукції було запропоновано в роботі Кінкейда – Дарлінга [3], яка не привернула широкої уваги до 90-х років ХХ сторіччя. У роботі [4] розглядалась задача реалізації одиниці товару для випадку однорідних споживачів, які мають однакову, але невідому для продавця оцінку споживчої вартості товару. Продавець може поступово дізнатись цю оцінку шляхом зміни цін на товар, що реалізується. В роботі доводиться, що оптимальною політикою продавця є поступове зниження цін. Ця практика відома в маркетингу як «зняття вершків».

Найвідомішим дослідженням з даної тематики є робота Галего – Ван Райзіна [5]. В ній попит на продукцію розглядається як безперервний процес Пуассона з інтенсивністю, яка залежить від ціни реалізації. На базі методів варіаційного числення отримано систему диференціальних рівнянь для оптимальної цінової стратегії продавця. Для експоненційної функції попиту автори отримали аналітичне рішення, а для загального випадку встановили деякі властивості оптимальної цінової політики. Існує багато модифікацій та розширень цієї моделі. Наприклад, в роботі [6] розглядаються обмеження на множину прийнятних для продавця цін, в роботі [7] – нестационарний попит на його продукцію. В роботі [8] аналізується можливість стратегічної поведінки споживачів, зокрема, їх передбачування можливого зниження цін у майбутньому. Робота [9] розглядає вплив дій конкурентів на цінову

політику продавця. Детальний огляд цих досліджень міститься в [1].

Останні дослідження з даної тематики присвячені застосуванню алгоритмів машинного навчання для оцінки функцій споживчого попиту [10], [11]; обчислювальним аспектам реалізації алгоритмів динамічного ціноутворення [12]; евристичним правилам регулювання цін в умовах обмеженої інформації [13].

Проте, багато питань щодо доцільності застосування методів динамічного ціноутворення з точки зору їх економічної ефективності та практичної імплементації залишаються суперечливими. Зокрема, викликає інтерес розробка таких алгоритмів динамічного регулювання цін, які було б просто реалізувати на практиці в реальному масштабі часу, а також їх порівняння зі стратегіями фіксованих цін.

Мета роботи. В роботі [13] автором було запропоновано алгоритм динамічного управління цінами на фіксованому інтервалі часу для моделі попиту, коли споживачі продукції підприємства зацікавлені у придбанні щонайбільше однієї одиниці товару, а потік споживачів має постійну інтенсивність. У даній роботі ця модель розвивається на більш поширений випадок, коли потік споживачів є випадковим процесом із пуассонівським розподілом. Така модель добре збігається з такими практичними задачами управління збутом, як продаж авіаквитків, бронювання номерів у готелях, роздрібна торгівля товарами із фіксованим терміном реалізації, тощо. Порівняно простий характер попиту дозволяє в деяких випадках отримати аналітичне рішення для оптимальної цінової політики, встановити її якісні характеристики і виявити переваги порівняно із застосуванням статичних цін торгівля товарами із фіксованим терміном реалізації, тощо.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо продавця, якому потрібно реалізувати x одиниць однорідного дискретного товару протягом заздалегідь визначеного обмеженого періоду часу T . Вважатимемо, що продавець має певний ступінь ринкової влади, що надає йому можливість варіювати ціни в певному діапазоні. Метою продавця є отримання максимального очікуваного доходу від реалізації продукції на часовому інтервалі $[0, T]$, а його контрольною змінною – ціна, яка встановлюється в період часу t , $p(t)$. Попит на продукцію продавця є суперпозицією двох випадкових процесів:

- 1) прибуття потенційних споживачів;
- 2) прийняття рішення про купівлю товару індивідуальним споживачем.

Кожний потенційний споживач, якого будемо індексувати через k , має максимальну ціну ξ_k , яку він згоден заплатити за товар (надалі у відповідності з прийнятою в мікроекономіці термінологією будемо називати її резервованою ціною споживача [14]). Споживач купує одиницю товару, якщо його резервована ціна перевищує ціну, встановлену продавцем на момент прибуття k -го споживача. Будемо вважати, що резервовані ціни окремих споживачів є незалежними однаково розподіленими випадковими змінними із законом розподілу $F(p) = \mathbb{P}\{\xi \leq p\}$.

Прибуття споживачів до продавця будемо описувати пуассонівським процесом із інтенсивністю λ . Позначимо через $n(t)$ загальну кількість споживачів, що відвідали продавця на інтервалі часу $[0, t]$. Визначимо випадковий момент взаємодії k -го споживача із продавцем як

$$\tau_k = \inf\{t | n(t) = k\}. \quad (1)$$

За властивостями пуассонівського процесу (дивись, наприклад, [15]) інтервал часу між послідовними прибуттями споживачів $\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ має експоненційний розподіл із параметром λ , тобто

$$P\{\Delta_k \leq t\} = 1 - \exp(-\lambda t) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Позначимо через $X(t)$ рівень залишків нереалізованої продукції у продавця в момент часу t . Мета продавця полягає у максимізації очікуваного доходу на інтервалі часу $[0, T]$ за умови $X(0) = x$:

$$V[x, T] = M \left[\sum_{k=1}^{N(T)} p(\tau_k) I\{p(\tau_k) \leq \xi_k\} | X(0) = x \right] \quad (3)$$

де $I\{A\}$ позначає індикатор події A , $N(t) = \min(s, t)$, $s = \inf \left\{ t \mid \lim_{u \downarrow t} X(u) = 0 \right\}$, а динаміка випадкового процесу зміни залишків нереалізованої продукції $X(t)$ задається рівнянням

$$X(t) = X(0) - \sum_{k=1}^{n(t)} I\{p(\tau_k) \leq \xi_k\}. \quad (4)$$

Динаміка процесу $X(t)$ ілюструється на рис. 1.

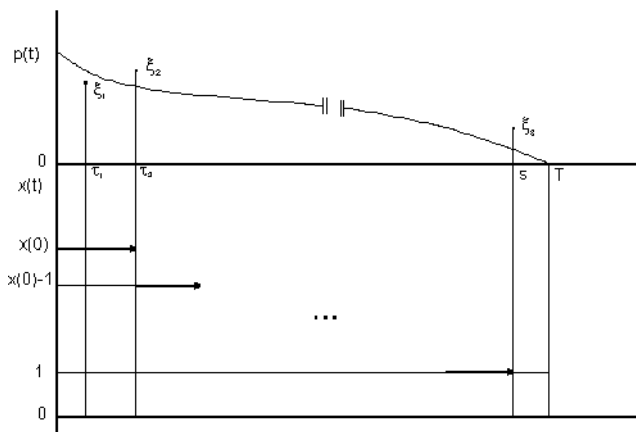


Рис. 1. Процес еволюції залишків нереалізованої продукції $X(t)$

Вирішимо задачу (3)–(4) спочатку для спеціального випадку коли $x=1$. В цьому випадку цільова функція (3) спрощується до виразу

$$V[T] = M \left[p(s) I\{s \leq T\} | X(0) = 1 \right]. \quad (5)$$

Задачу (5) можна вирішити за допомогою методу зворотної індукції [16]. Введемо функцію очікуваного виграшу продавця на момент часу t як

$$V(t) = M \left[p(s) I\{s \leq T\} | X(T-t) = 1 \right]. \quad (6)$$

Розглянемо зміну функції $V(t)$ на нескінченно малому проміжку часу $[t, t+dt]$. Позначимо через $q_k(h)$ ймовірність появи k потенційних споживачів протягом інтервалу часу h , тобто $q_k(h) = P\{n(t+h) - n(t) = k\}$.

Оскільки пуассонівський процес є стаціонарним із незалежними інкрементами, ця ймовірність не залежить від t і дорівнює $\frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{-\lambda h}$. Вочевидь, для малого проміжку h , $q_k(h) = o(q_1(h), q_0(h))$ для $k \geq 2$. Таким чином, $q_0(h) + q_1(h) \approx 1$ і

$$\begin{aligned} q_0(h) &= \exp(-\lambda h) \approx 1 - \lambda h; \\ q_1(h) &\approx 1 - q_0(h) \approx \lambda h. \end{aligned} \quad (7)$$

Отже, якщо єдину наявну одиницю товару ще не було продано на момент часу t , то протягом проміжку часу dt можливі два результати:

1) товар буде продано, після чого процес продажу завершується. У свою чергу, такий результат можливий як добуток двох подій: в деякий момент $\tau \in [t, t+dt]$ до продавця прибуває споживач, і його резервована ціна виявляється вищою, ніж $p(t)$. Для компактності формул позначимо $p(t) = u$, $Q(u) = 1 - F(u)$. Тоді ймовірність зазначеного результату складає $q_1(dt)Q(u) \approx \lambda Q(u)dt$.

2) товар не буде продано з компліментарною ймовірністю $1 - \lambda Q(u)dt$. Тоді процес продажу поновлюється в момент часу $t+dt$, що приносить продавцю очікуваний виграш $V(t+dt)$.

Отже, за законом повної ймовірності

$$V(t) = u \lambda Q(u)dt + V(t+dt)(1 - \lambda Q(u)dt). \quad (8)$$

Звідси

$$\frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = -\lambda u Q(u) + \lambda Q(u)V(t+dt). \quad (9)$$

Перейшовши в формулі (9) до границі при $dt \rightarrow 0$, отримаємо

$$\frac{dV(t)}{dt} = \dot{V} = \lambda Q(u)(V(t) - u). \quad (10)$$

Оскільки ймовірність прибуття споживача на нульовому проміжку часу дорівнює нулю, рівняння (9) можна доповнити граничною умовою $V(T) = 0$.

Замінімо змінні за формулою $\tau = T - t$, де τ – час, що залишився до кінцевого терміну реалізації. Отримаємо наступну задачу варіаційного числення:

$$V(T) = V(T) - V(0) = \int_0^T \dot{V} dt \rightarrow \max. \quad (11)$$

Підставивши в формулу (11) рівняння динаміки очікуваного доходу (10), отримаємо

$$\int_0^T \lambda Q(u)(V-u) dt \rightarrow \min. \quad (12)$$

Рівняння Ейлера для задачі (12) матиме вигляд

$$\frac{d\dot{V}}{du} = Q'(u)(V-u) - Q(u) = 0. \quad (13)$$

Для будь-якого заданого розподілу резервованих цін споживачів $Q(u)$ формула (13) буде алгебраїчним рівнянням, з якого оптимальне управління u^* можна виразити як функцію від V . Підставивши надалі $u^*(V)$ в рівняння динаміки (10) і інтегрувавши його при граничній умові $V(0) = 0$, можна отримати u^* і V в явному вигляді як функції від часу.

В якості прикладу розглянемо випадок, коли резервовані ціни споживачів розподілені рівномірно на одиничному інтервалі. У цьому випадку $Q(u) = 1-u$ і рівняння (13) приймає вигляд $u - V - (1-u) = 0$, звідки $u = (V+1)/2$ або $V = 2u - 1$. Підставивши останній вираз до рівняння динаміки (10), отримаємо

$$2\dot{u} = \lambda(1-u)(u-2u+1) = \lambda(1-u)^2. \quad (14)$$

Рівняння (14) є диференціальним рівнянням з відокремленими змінними, яке має загальне рішення

$$u = 1 - \frac{2}{\lambda\tau + C}, \quad (15)$$

де C – невизначена константа. Скориставшись граничною умовою $V(0) = 0$, отримаємо $C = 4$. Отже, остаточні рівняння для оптимальної цінової політики продавця та його очікуваного доходу матимуть такий вигляд:

$$p(\tau) = \frac{\lambda\tau + 2}{\lambda\tau + 4}; \quad V(\tau) = \frac{\lambda\tau}{\lambda\tau + 4}. \quad (16)$$

Легко бачити, що обидві функції $p(\tau)$ і $V(\tau)$ є безперервними, монотонно зростаючими, опуклими функціями своїх аргументів, що сходяться до одиниці при $\tau \rightarrow \infty$. Графіки цих функцій, що відповідають значенню $\lambda = 0,5$ наведено на рис. 2.

Повернемося тепер до загального випадку задачі (3)–(4). Позначимо через $V(x,t)$ математичне сподівання виразу в квадратних дужках в формулі (3) за умови $X(t) = x$ і через $p(x,t)$ – ціну, яку встановить продавець в момент t за тієї самої умови.

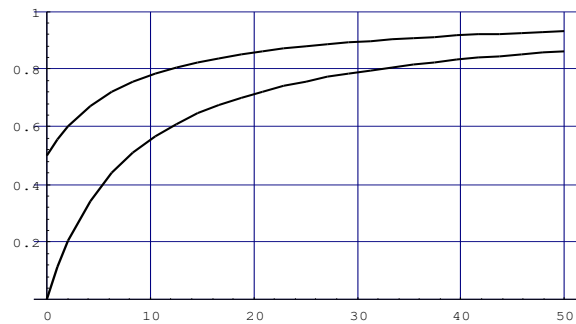


Рис. 2. Графіки функцій $p(\tau)$ і $V(\tau)$ ($\lambda = 0,5$, $T = 50$)

За зробленими припущеннями споживачі ніколи не купляють більше одиниці товару. Тому при будь-якій ціновій політиці випадковий процес $X(t)$ буде змінюватись дискретно, одиничними декрементами. Події, які можуть відбутися протягом нескінченно малого проміжку часу dt залишаються такими самими, які були окреслені при виведенні формули (8) і матимуть такі ж самі ймовірності. Єдина різниця полягає в тому, що якщо продавцю вдасться реалізувати одиницю продукції за цей проміжок часу, його майбутній очікуваний виграш і ціна реалізації складатимуть $V(x-1, t+dt)$ і $p(x-1, t+1)$, відповідно. Отже, застосувавши ще раз закон повної ймовірності, отримаємо

$$V(x,t) = [u + V(x-1, t+dt)] \lambda Q(u) dt + V(x,t+dt) [1 - \lambda Q(u) dt], \quad (17)$$

де, як і раніше, контрольну змінну $p(x,t)$ позначено через u для компактності запису. Після упорядкування доданків і граничного переходу при $dt \rightarrow 0$, отримаємо наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \lambda Q(u) [V(x,t) - u - V(x-1,t)]. \quad (18)$$

Оскільки x є цілочисловою змінною, функції $V(x,t)$ і $p(x,t)$ можна розглядати як множину функцій часу, індексованих параметром x . Таким чином, (18) є звичайним диференціальним рівнянням. Зробивши заміну змінних $\tau = T - t$, позначивши через $V(x,t)$ і $V_x(t)$ опустивши для стислості аргумент часу, формулу (18) можна переписати як

$$\dot{V}_x = \lambda Q(u) [u + V_{x-1} - V_x]. \quad (19)$$

Цільовий функціонал продавця можна записати як

$$\max_u V_x(T) \Leftrightarrow \max_u \int_0^T \dot{V}_x(t) dt, \quad (20)$$

а рівняння Ейлера для нього матиме вигляд

$$\frac{d\dot{V}_x}{du} = Q'(u)(V_x - V_{x-1} - u) - Q(u) = 0. \quad (21)$$

Схема рішення системи рівнянь (20) повністю аналогічна наведеній вище процедурі рішення рівняння (13) і ускладнюється лише тим, що рішення слід проводити ітеративно для $x = 1, 2, \dots$.

Наприклад, для розглянутого вище прикладу, коли резервовані ціни споживачів рівномірно розподілені на одиничному інтервалі, рівняння (21) спрощується до

$$u - V_x + V_{x-1} - 1 + u = 0, \quad (22)$$

звідки $u = p_x = \frac{1 + V_x - V_{x-1}}{2}$ або $V_x = V_{x-1} + 2p_x - 1$.

Підставивши останнє співвідношення в рівняння (19), отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь для оптимальної цінової політики продавця:

$$2\dot{p}_x - \lambda(1 - p_x)^2 + \dot{V}_{x-1} = 0 \quad (23)$$

при граничній умові

$$V_0(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (24)$$

Рівняння (23) є диференціальним рівнянням Ріккати [17]. При $x = 1$ останній доданок в рівнянні (23) зникає, що дозволяє вирішити його аналітично, що й було зроблено при виведенні формули (16). Для $x > 1$ рішення рівняння (23) можна знайти за допомогою чисельних методів. На рис. 3 наведені результати чисельного інтегрування рівнянь (23) методом Рунге – Кутта для $x = 1, \dots, 5$, отримані в програмному середовищі Matlab [18]. На рис. 4 наведені відповідні функції очікуваного доходу продавця $V_x(t)$.

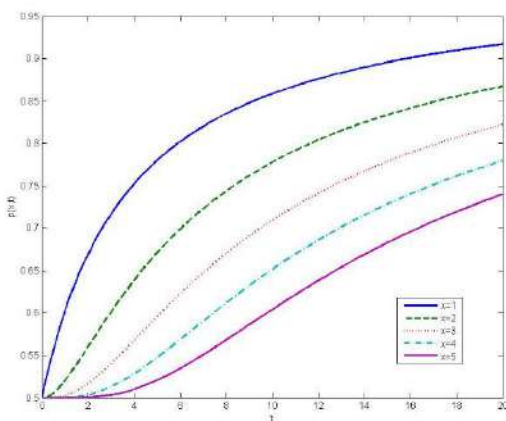


Рис. 3. Оптимальна цінова політика продавця $p_x(t)$

Легко бачити, що оптимальні ціни продавця зростають із збільшенням часу, що залишається до кінцевого терміну реалізації і зменшуються із зростанням залишків неререалізованої продукції. Сукупність цих двох властивостей наводить до досить складної динаміки спостережуваних цін: при загальному тренді до зниження цін з протягом часу, кожна продаж товару

наводить до стрибкоподібного зростання цін. На рис. 5 наведені деякі можливі траєкторії цін, отримані за допомогою імітаційного моделювання.

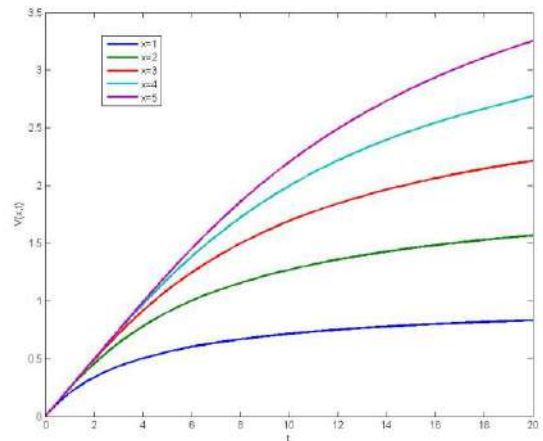


Рис. 4. Очікуваний вигравш продавця $V_x(t)$

Для оцінки економічного ефекту від застосування динамічного ціноутворення, порівняємо очікуваний вигравш продавця $V_x(t)$ з тим, який можна було б отримати при постійних цінах.

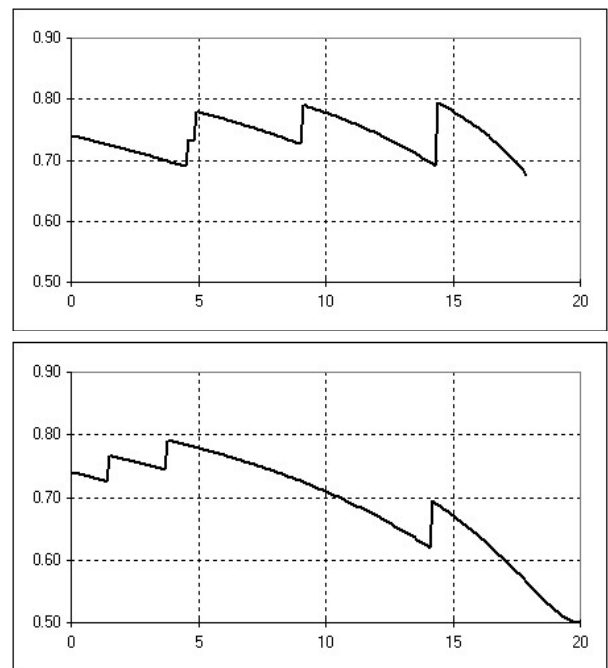


Рис. 5. Приклади траєкторій спостережуваних цін в імітаційних експериментах

Якщо продажна ціна p залишається незмінною протягом терміну реалізації, то процес успішних продажів буде пуассонівським із інтенсивністю $\lambda Q(p)$ і очікуваний вигравш продавця можна розрахувати як

$$W_x(p, t) = pM[\min(v(t), x)], \quad (25)$$

де $v(t)$ – випадкова кількість подій на інтервалі $[0, t]$ згідно з розподілом Пуассона з інтенсивністю $\lambda Q(p)$.

Оптимальну фіксовану ціну при горизонті планування T можна знайти шляхом максимізації виразу (25) при $t=T$. Наприклад, при $x=1$ і рівномірному розподілі резервованих цін споживачів на одиничному інтервалі, оптимальна ціна (i , відповідно, очікуваний виграш продавця) можна отримати шляхом вирішення оптимізаційної задачі

$$W(p, T) = p(1 - e^{-\lambda(1-p)T}) \rightarrow \max_{p \in [0,1]} \quad (26)$$

Задача (26) не має аналітичного рішення, проте, легко розв'язується будь-яким методом чисельної оптимізації. На рис. 6 порівнюються очікувані доходи продавця при оптимальній фіксованій ціні (штрихпунктирна лінія) і при динамічному ціноутворенні (суцільна лінія). Також на рис.6 відображено виграш від динамічного управління цінами у відносних одиницях.

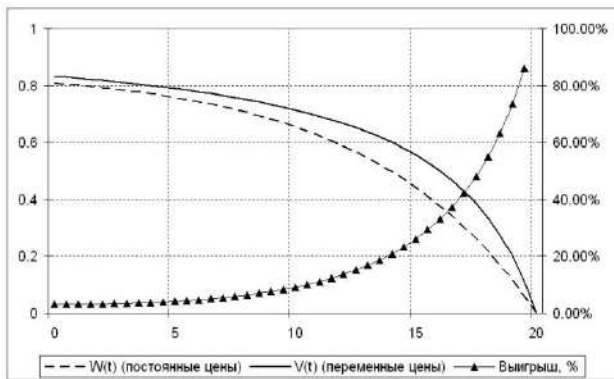


Рис. 6. Виграш від застосування динамічного ціноутворення порівняно зі стратегією постійних цін ($\lambda = 1, T = 20$)

З рис. 6 можна побачити, що при тривалому терміні реалізації виграш від динамічного регулювання цін є незначним. Проте, він швидко збільшується із наближенням кінцевого терміну реалізації продукції. В розглянутому прикладі наприкінці періоду реалізації відносний виграш сягає 86 %.

Результатом застосування розглянутої моделі часто є циклічна поведінка спостережуваних цін (що, власне, можна побачити з результатів імітаційних експериментів, наведених на рис. 5). Це добре узгоджується з практикою надання періодичних цінових знижок в підприємствах роздрібною торгівлі [19, 20]. Емпірична перевірка узгодженості динаміки спостережуваних роздрібних цін із запропонованою моделлю є перспективним напрямком для подальших досліджень.

Висновки. В роботі розроблено математичну модель динамічного регулювання цін в реальному масштабі часу при управлінні збутом продукції, попит на яку можна описати композитним пуассонівським процесом. Вона дозволяє визначити оптимальну ціну продукції як функцію від поточного рівня нералізованої продукції та часу, що залишається до кінцевого

строку її реалізації. Проведені розрахунки та імітаційні експерименти свідчать про високу ефективність запропонованого механізму ціноутворення порівняно зі стратегією постійних цін. Динаміка цін, яка випливає із практичної імплементації запропонованої моделі, добре узгоджується із емпіричними спостереженнями стосовно циклічної поведінки роздрібних цін.

Список літератури

1. Elmaghraby W., Keskinocak P. Dynamic Pricing in the Presence of Inventory Considerations: Research Overview, Current Practices, and Future Directions. *Management Science*. 2003. Vol. 49. P. 1287–1309.
2. Barro, R.J., Tenreiro S. Closed and Open Economy Models of Business Cycles with Marked Up and Sticky Prices. *The Economic Journal*. 2006. Vol. 116, Issue 511. P. 434–456.
3. Kincaid W. M., Darling D. An inventory pricing problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1963. No. 7. P. 183–208.
4. Lazear D. P. Retail Pricing and Clearance Sales. *American Economics Review*. 1986. Vol. 76. P. 14–32.
5. Gallego G., van Ryzin G. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons. *Management Science*. 1994. Vol. 40. P. 999–1020.
6. Feng Y., Xiao B. Optimal policies of yield management with multiple predetermined prices. *Operation Research*. 2000. No. 48. P. 332–343.
7. Zhao W., Zheng Y. Optimal dynamic pricing for perishable assets with non homogeneous demand. *Management Science*. 2000. Vol. 46. P. 375–388.
8. Su X. Intertemporal pricing with strategic customer behavior. *Management Science*. 2007. Vol. 53. P. 726–741.
9. Levin, Y., McGill J, Nediak M. Dynamic pricing in the presence of strategic consumers and oligopolistic competition. *Management Science*. 2009. Vol. 55. P. 32–46.
10. Avramidis A. N. A pricing problem with unknown arrival rate and price sensitivity. *Mathematical Methods of Operations Research*. 2020. No. 92. P. 77–106.
11. Wang R. et al. Solving a Joint Pricing and Inventory Control Problem for Perishables via Deep Reinforcement Learning. *Complexity*. Vol. 2021. Article ID 6643131. 17 p.
12. Чайковская М. П., Медведь Т. С. Модель оптимального ціноутворення в режимі реального часу на основі методів динамічного програмування. *Економічний вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут"*. 2016. № 13. С. 559–568.
13. Мельников О. С. Стратегії динамічного ціноутворення при управлінні збутом дискретних товарів з обмеженим терміном реалізації. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Економічні науки: зб. наук. пр. Харків: НТУ «ХПІ». 2022. № 2(2022). С. 38–43.
14. Steedman I. Reservation price and reservation demand. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*. 1987. Vol. 4. P. 158–59.
15. Мішура Ю.С., Ральченко К.В., Шевченко Г.М. *Випадкові процеси: теорія, статистика, застосування : підручник*. 2021. Київ: ВПЦ "Київський університет". 496 с.
16. Judd K. L. *Numerical Methods in Economics*. Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1998. 633 p.
17. Wolfram Math. World. Riccati Differential Equation. URL: <https://mathworld.wolfram.com/RiccatiDifferentialEquation.html> (дата звернення: 25.08.2022).
18. Мэтьюз Д. Г., Финк К. Д. Численные методы. Использование MATLAB. 2001. Москва: Издательский дом «Вильямс». 720 с.
19. Pashigian B. P. Demand uncertainty and sales: A study of fashion and markdown pricing. *American Economic Review*. 1988. Vol. 78, P. 936–953.
20. Pashigian B. P., Bowen B. Why Are Products Sold on Sale?: Explanations of Pricing Regularities. *The Quarterly Journal of Economics*. 1991. Vol. 106. P. 1014–1038.

References (transliterated)

1. Elmaghraby W., Keskinocak P. Dynamic Pricing in the Presence of Inventory Considerations: Research Overview, Current Practices, and Future Directions. *Management Science*. 2003, vol. 49, pp. 1287–1309.

2. Barro, R.J., Tenreiro S. Closed and Open Economy Models of Business Cycles with Marked Up and Sticky Prices. *The Economic Journal*. 2006, Vol. 116, Issue 511, pp. 434–456.
3. Kincaid W. M., Darling D. An inventory pricing problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1963, 7, pp. 183–208.
4. Lazear D. P. Retail Pricing and Clearance Sales. *American Economics Review*. 1986, vol. 76, pp. 14–32.
5. Gallego G., van Ryzin G. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons. *Management Science*. 1994, vol. 40, pp. 999–1020.
6. Feng Y., Xiao B. Optimal policies of yield management with multiple predetermined prices. *Operation Research*. 2000, no. 48, pp. 332–343.
7. Zhao W., Zheng Y. Optimal dynamic pricing for perishable assets with non homogeneous demand. *Management Science*. 2000, vol. 46, pp. 375–388.
8. Su X. Intertemporal pricing with strategic customer behavior. *Management Science*. 2007, vol. 53, pp. 726–741.
9. Levin, Y., McGill J, Nediak M. 2009. Dynamic pricing in the presence of strategic consumers and oligopolistic competition. *Management Science*. 2009, vol. 55, pp. 32–46.
10. Avramidis A. N. A pricing problem with unknown arrival rate and price sensitivity. *Mathematical Methods of Operations Research*. 2020, no. 92, pp. 77–106.
11. Wang R. et al. Solving a Joint Pricing and Inventory Control Problem for Perishables via Deep Reinforcement Learning. *Complexity* Vol. 2021, Article ID 6643131, 17 p.
12. Chaikovskaia M. P., Medved T. S. Model optimalnoho tsinoutvorennia v rezhymy realnoho chasu na osnovi metodiv dynamichnoho prohranuvannia. [A Model of Optimal Pricing in Real Time Based on Dynamic Programming]. *Ekonomichnyi visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu Ukrainy "Kyivskiy politekhnichnyi instytut"* [Economic Bulletin of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"]. 2016, № 13, pp. 559–568.
13. Melnikov O. S. Stratehii dynamichnoho tsinoutvorennia pry upravlinni zbutom dyskretnykh tovariv z obmezhenym terminom realizatsii [Dynamic pricing strategies in sales management of discrete products with a limited lifetime]. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. Seriya: Ekonomichni nauky: zb. nauk. pr. [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Economic Sciences. A Collection of Scientific Papers]. Kharkiv: NTU «KhPI». 2022, № 2(2022), pp. 38–43.
14. Steedman I. Reservation price and reservation demand. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*. 1987, Vol. 4, pp. 158–59.
15. Mishura Yu.S., Ralchenko K.V., Shevchenko H.M. *Vypadkovi protsesy: teoriia, statystyka, zastosuvannia : pidruchnyk* [Stochastic Processes: Theory, Statistics, and Applications]. 2021. Kyiv: VPTs "Kyivskiy universytet". 496 s.
16. Judd K. L. *Numerical Methods in Economics*. 1998, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 633 p.
17. Wolfram Math. World. Riccati Differential Equation. URL: <https://mathworld.wolfram.com/RiccatiDifferentialEquation.html> (accessed 25.08.2022).
18. Mathews, J.H., Fink, K.D. *Numerical methods using MATLAB* (Vol. 3). 1999. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall. (Rus.ed.: Mathews, J.H., Fink, K.D. *Chislennyye metody. Ispolzovaniye MATLAB*. 2001. Moscow, Williams Publishing House, 720 p.)
19. Pashigian B. P. Demand uncertainty and sales: A study of fashion and markdown pricing. *American Economic Review*. 1988, vol. 78, pp. 936–953.
20. Pashigan B. P., Bowen B. Why Are Products Sold on Sale?: Explanations of Pricing Regularities. *The Quarterly Journal of Economics*. 1991, vol. 106, pp. 1014–1038.

Надійшло (received) 01.10.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Мельников Олег Станіславович – кандидат економічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри системного аналізу та інформаційно–аналітичних технологій, Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2409-4983>, e-mail: Oleg.Melnikov@khi.edu.ua.

Melnikov Oleg Stanyslavovich – candidate of economic sciences (PhD), docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of System Analysis and Information–analytical Technologies; Kharkiv, Ukraine; associate professor, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2409-4983>, e-mail: Oleg.Melnikov@khi.edu.ua.

S. V. OREKHOV, A. M. KOPP, D. L. ORLOVSKYI

EXAMPLE OF USE OF VIRTUAL PROMOTION MAP

The paper presents an example of using new technology to solve the problem of promoting goods and services according to the 7P concept. The technology was called virtual promotion. The reason for its occurrence is a decrease in the effectiveness of the currently classical search engine optimization methodology on the Internet. The task of the latter is to bring the given corporate WEB resource to the first place in the search server's answers to the requests of potential buyers. Virtual promotion is based on two ideas. The first is based on marketing theory when to sell a product or service, you need to build a marketing channel. The second is that a search server is an intelligent machine. Then, to get the first position, we need to teach the virtual space, which consists of Internet nodes, to activate in such a way that the number of links to the WEB page with the desired product is maximum. To implement these ideas, two objects are synthesized as part of the virtual promotion: a semantic kernel and a promotion map. A semantic kernel is a description of a product or service or a training sequence of keywords. A map is a set of nodes on the Internet, where the semantic core should be placed to attract the maximum number of buyers of the product. The map is also a variant of marketing channels on the Internet. The paper considers an example of a situation where a semantic core and a minimal map have already been created using the classical approach (search optimization). In this case, the classic approach gave an increase in the number of visits to the WEB site, but there was not a single buyer of the product for six months. That is, the classical approach improved the key performance indicator, but it did not affect the sales performance in any way. The paper demonstrates how virtual promotion forms such a modification of the map that gives a given result in a given period. At the same time, it is not enough to synthesize a new map. It is necessary to apply a special mechanism for its implementation. For this purpose, the paper shows a real task of inter-functional coordination, which makes it possible to implement a promotion map. Real data for 2021, which was used to promote the product on the Ukrainian market, is given. The introduction of the new version of the map resulted in the first two orders within the first two weeks.

Keywords: virtual promotion map, coordination, semantic kernel.

С. В. ОРЕХОВ, А. М. КОПП, Д. Л. ОРЛОВСЬКИЙ

ПРИКЛАД ВИКОРИСТАННЯ КАРТИ ВІРТУАЛЬНОГО ПРОСУВАННЯ

У статті представлено приклад використання нової технології для вирішення задачі просування товарів та послуг згідно концепції 7P. Технологія отримала назву віртуальне просування. Причиною її виникнення є зменшення ефективності класичної на даний момент методології пошукової оптимізації в мережі Інтернет. Завдання останньої полягає в тому, щоб вивести заданий корпоративний WEB-ресурс на перше місце у відповідях пошукового серверу на запити потенційних покупців. В основі віртуального просування лежать дві ідеї. Перша базується на теорії маркетингу, коли щоб продати товар чи послугу треба побудувати маркетинговий канал. Друга полягає в тому, що пошуковим сервером є інтелектуальна машина. Тоді, щоб отримати першу позицію, нам треба навчити віртуальний простір, який складається з вузлів мережі Інтернет, активуватися таким чином, щоб кількість посилань на WEB-сторінку з потрібним товаром була максимальною. Для реалізації цих ідей у складі віртуального просування синтезується два об'єкти: семантичне ядро та карта просування. Семантичне ядро – це опис товару чи послуги, або навчаюча послідовність ключових слів. Карта – це множина вузлів мережі Інтернет, де семантичне ядро треба розмішувати, щоб залучити максимальну кількість покупців товару. Карта – це також варіанти маркетингових каналів в мережі Інтернет. В роботі розглянуто приклад ситуації, коли засобами класичного підходу (пошукова оптимізація) вже створено семантичне ядро та мінімальна карта. В цьому випадку класичний підхід дав приріст кількості візитів на WEB-сайт, але не було жодного покупця товару впродовж півроку. Тобто класичний підхід дав поліпшення ключового показника ефективності, але це ніяк не вплинуло на ефективність продажу. В роботі продемонстровано, як віртуальне просування формує таку модифікацію карти, яка дає заданий результат за заданий проміжок часу. При цьому не достатньо синтезувати нову карту. Треба застосовувати спеціальний механізм її впровадження. Для цього в роботі показано реальну задачу міжфункціональної координації, яка дає змогу впровадити карту просування. Наведено реальні дані на 2021 рік, які були застосовані для просування товару на ринку України. Впровадження нової версії карти дозволило отримати перші два замовлення вже впродовж перших двох тижнів.

Ключові слова: карта віртуального просування, координація, семантичне ядро.

Introduction. The paper examines the process of verification of the already existing classic process of search engine optimization, which was implemented over six months for a real WEB resource. Classical approaches include optimization of HyperText Markup Language (HTML) code and online advertising. Indeed, the implementation of these methodologies made it possible to improve the value of the WEB metric (traffic) three times from the initial value (Fig. 1). But the conversion rate of these visits was zero (Fig. 2), that is, the number of orders during six months was zero. Thus, we have a problematic situation when the promotion customer does not receive the desired result, namely a large number of online orders.

To improve the conversion rate, it was proposed to use virtual promotion technology [1–2]. Its application is based on two objects: the semantic kernel and the virtual

promotion map. In this project, the semantic kernel was generated. However, the methods and directions of its implementation were wrong. To do this, we proposed to synthesize a new promotion map and implement it. The process of implementing the map is based on solving the problem of cross-functional coordination [3–5]. Consider the results of the implementation of the card through the coordination of providers on the Internet.

Problem statement. This test project became an example of a situation where the map and the semantic kernel were synthesized thanks to classical methods of search optimization [6–7], but the result they provided did not satisfy the customer. Such a case occurs because the task of functional coordination has not been resolved.

Proposed approach. Let's consider the use of the coordination method to improve the promotion result

© S. V. Orekhov, A. M. Kopp, D. L. Orlovskiy, 2022



Research Article: This article was published by the publishing house of NTU "KhPI" in the collection "Bulletin of the National Technical University "KhPI" Series: System analysis, management and information technologies." This article is distributed under a Creative Commons [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Conflict of Interest:** The author/s declared no conflict of interest.



achieved by classical methods of search engine optimization. The semantic kernel has already been used in online advertising (Fig. 3). But the map of virtual promotion was not synthesized. That is, only the kernel, the maximally simplified promotion map, and HTML optimization of the e-content of this WEB resource were implemented.

The virtual promotion map was proposed in the work. The main idea of the map was to create it as an alliance of providers. Two groups of Limited Liability Partnership (LLP) providers were formed: marketplaces and social networks (Fig. 4). That is, there are only LLP providers on the map, but of two groups: Facebook, Instagram, OLX.UA, Prom.UA, Rozetka.UA, and Google Ads. This configuration of the virtual promotion map is quite common nowadays because it allows you to effectively manage the promotion process. In addition, each such LLP provider has its own promotion budget but works only

thanks to the financial resource provided by our union, that is, the marketing department of the enterprise.

Consider the setting of a new map based on solving problem (1)–(4). Let's write down the specified formulas taking into account the requirements within the test project (Fig. 1–4):

$$\sum_{m \in M_3} \sum_{s=1}^4 b_s X^{sm} \frac{(x^4 - (x^0 - \Delta x^s))^2}{(x^4 - x^0)^2} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\delta \sum_{s=1}^4 \sum_{m=1}^6 X^{sm} - \sum_{s=1}^4 \sum_{m=1}^6 Y^{sm} = 0, \quad (2)$$

$$X^{sm} \leq 1, X^{sm} \in \{0,1\}, s = \overline{1,4}, m \in M_3, \quad (3)$$

where X^{sm} is boolean variable that includes or excludes the m -th node of the map from the coordination process for the

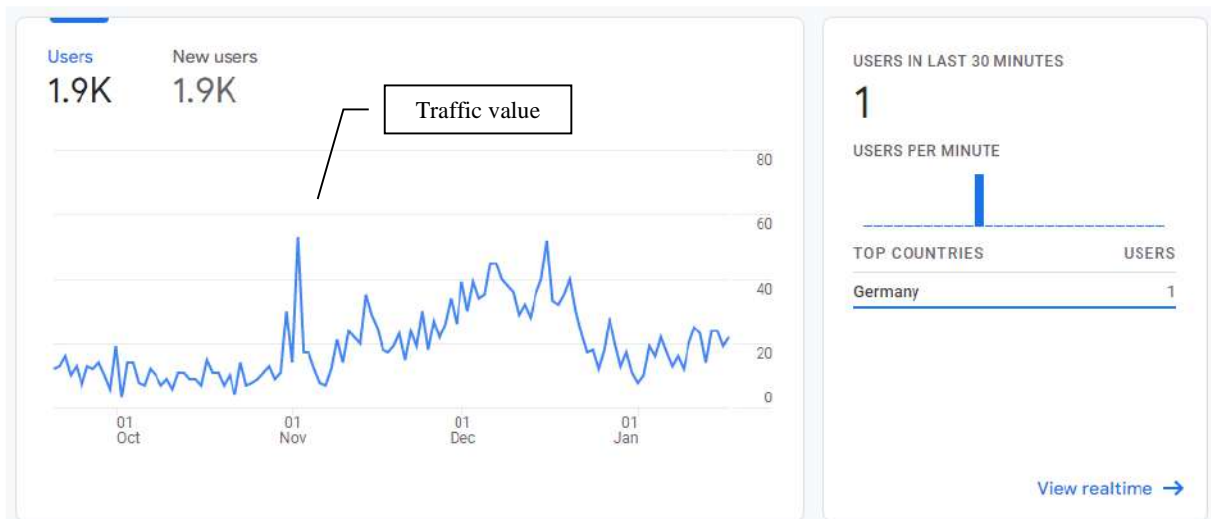


Fig. 1. WEB statistics of testing WEB resource

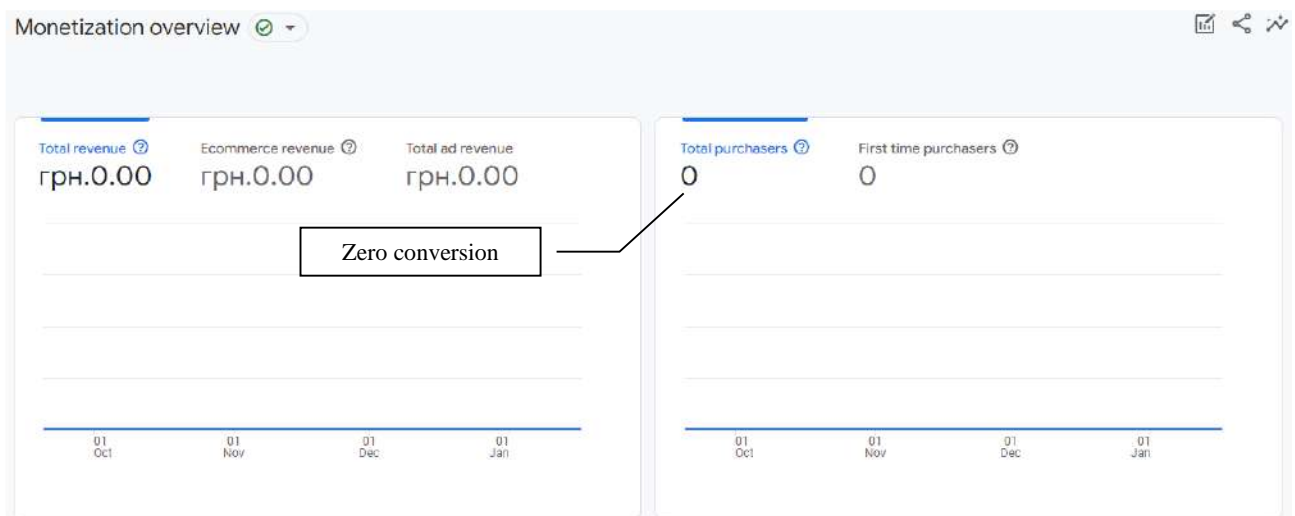


Fig. 2. Conversion of testing WEB resource

Page title and screen class	Views	Users	Views per user
List of semantic kernels	7,415 100% of total	1,940 100% of total	3.82 Avg 0%
1 Коптильни в Харькове купить коптильню в Украине цена недорого	1,960	843	2.33
2 Коптильня купить Харьков, Киев недорого, коптильня цена в интернет магазине	733	283	2.59
3 Коптильня с дымогенератором Харьков, Киев цена - купить промышленную коптильню холодного копчения	350	191	1.83

Fig. 3. Examples of semantic kernels of testing WEB resource

time interval s ; b_s and δ are weights (prices of node rent); M_3 is a set of providers (nodes of a map); Y^{sm} is a budget for semantic kernel placement in m -th node of the map for the time interval s ; x^0 is starting value of conversion rate; x^4 is an objective value of conversion rate.

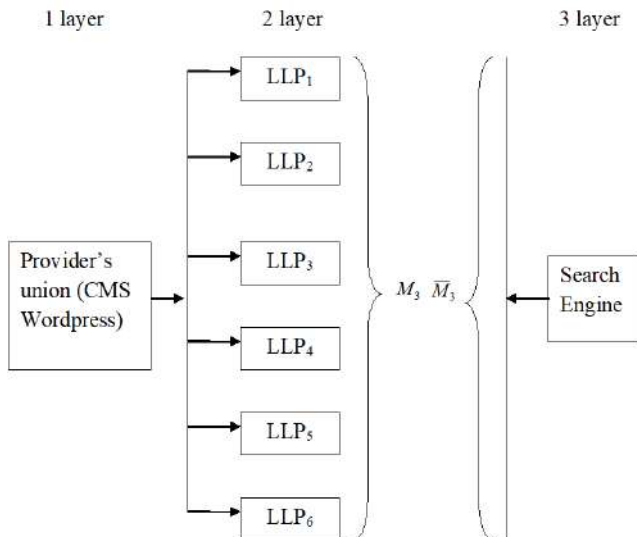


Fig. 4. Example of virtual promotion map

According to the conditions schematically depicted in Fig. 4, we have one set of nodes of the promotion map ($m \in M_3$). According to Fig. 4, the period of virtual promotion lasted approximately four months ($s = \overline{1,4}$). The key indicator of the project's effectiveness was the number of online orders in the node, that is, we have only one key indicator. We also take into account the fact that we have only one main operation of processing the semantic core,

namely its storage in the node. That is, at this step of virtual advancement, the core remains unchanged. In addition, according to the request of the customer, we had only one option of using financial resources to influence the value of the key performance indicator, namely the payment of an advertisement in the customization node. Then condition (2) reflects the fact that at least one node had, during each time interval, an advertisement to increase traffic.

Following the average values of prices for advertising services in the nodes that existed at the end of 2021, we finally obtained the following problem:

$$(32,4 \sum_{m=1}^6 X^{1m} + 25,6 \sum_{m=1}^6 X^{2m} + 19,6 \sum_{m=1}^6 X^{3m} + 14,4 \sum_{m=1}^6 X^{4m}) \rightarrow \min, \tag{4}$$

$$\sum_{s=1}^4 (180X^{s1} + 180X^{s2} + 40X^{s3} + 250X^{s4} + 250X^{s5} + 900X^{s6}) = 5000, \tag{5}$$

$$X^{sm} \leq 1, X^{sm} \in \{0,1\}, s = \overline{1,4}, m \in M_3. \tag{6}$$

Solving problem (4)–(6) shows that at the end of the third month of virtual promotion, the desired result can be obtained with this map configuration under the given input conditions (Table 1). At the same time, condition (5) guarantees that the budget of the union will be used in full. In addition, all providers will function according to their initial conditions regarding the use of financial resources of the union or our enterprise.

Results. In the case of a decrease in the number of providers, for example, without the functioning of online advertising, the period of virtual promotion should be increased to exhaust the entire promotion budget.

Therefore, if the union wants to reduce costs, then this fact should be reflected in condition (5).

Table 1 – Input values

Node	δ ,UAH	Node name	Comment
1	180	Facebook	Social network
2	180	Instagram	Social network
3	40	OLX	Marketplace
4	250	Prom	Marketplace
5	250	Rozetka	Marketplace
6	900	Google Ads	Online advertisement

Thus, the implementation of the second level of the virtual promotion map makes it possible to evaluate the effectiveness of the map and the number of financial resources to achieve the desired value of the key performance indicator for a given period. In addition, the selection of weighting coefficients and the size of the financial resource, as well as the desired value of the work efficiency indicator, was carried out based on trained neural networks. They gave the predictive value of each node based on available WEB statistics.

The main conclusion to be drawn from the results of the test project is the fact that the methodology proposed in the paper can work both separately and in connection with classic methods of search engine optimization on the Internet. The main difference of the new methodology is that it provides an opportunity to manage the promotion process itself, so to speak, from the remote control within the enterprise. The enterprise manages the promotion process by coordinating the nodes of the Internet network, which were chosen by the enterprise itself according to key performance indicators and their predictive values, which were obtained thanks to neural networks.

Summary. The example of real WEB projects given in the paper confirmed the effectiveness of methods, algorithms, and technology of virtual promotion [1–2]. The given example also really demonstrates the presence of a new methodology that has better results compared to the classical methods of the theory of search engine optimization on the Internet [6–7]. Let's consider the analysis of these results in detail.

The first conclusion is related to the methodology of checking the scientific materials presented in the paper. It is proposed to perform this verification using the classic methodology of high-level verification of information technology, which is currently the most modern and widespread [8–10]. As is known, in experimental modeling, it is advisable to compare the results with classical methodologies already known at this time. Therefore, in the work, all experimental data were compared with WEB statistics, which were also obtained thanks to classical methods of search optimization on the Internet. The main representative of classic promotion technologies is a set of Google services.

According to the results of the test project, it is also shown that the proposed technology can be used both in parallel with Google's methods and in connection with them. In both cases, the implementation of our technology increases the efficiency of the result tenfold. Thus, the proposed technology of virtual promotion can be

considered as a reengineering of already existing classical methodologies [11–13].

The second conclusion can be made through a methodological comparison of classical approaches to search engine optimization on the Internet and the new technology of virtual promotion. The following points can be highlighted here.

First, in the classical approach, there is no model for assessing the quality or effectiveness of the specified tools and the duration of their use. Such an assessment is the most important for the customer because it minimizes financial costs and guarantees a given promotion period. This fact is important, because "...in the market, it is not big or small that die, but the slow ones" [14].

Secondly, for the implementation of the classic approach, a high qualification is required on the part of the customer at the level of a programmer or content manager, who knows one or more programming languages, has experience in working with WEB services, for example, from the Google API (Application Programming Interface), of varying complexity. This leads to a misunderstanding between the customer and the contractor.

Thirdly, to achieve the result, it is necessary to mount or consistently execute certain algorithms for using WEB services. This requires experience on the part of both the customer and the contractor. The description of such algorithms is not widely available or is limited. Therefore, it is clear that the complexity of such algorithms leads to errors, ambiguity, and misunderstandings.

These considerations can be demonstrated by an example. The main element of the classic methodology of search optimization is also the semantic kernel [15]. But in practice, there are no metrics for determining its quality, nor stable algorithms for its synthesis and use. There is only a definition as a set of keywords, which can be built based on search server services, for example, Google Trends [7].

Current methods of search engine optimization generally boil down to placing advertisements based on the semantic kernel in services such as Google Ads, or to correcting the HTML code to more accurately reflect the kernel in the responses of search services such as Google Search Console and Bing API.

References

- Orekhov S. Technology of Virtual Promotion of a Product. *Computer Systems and Information Technologies*. 2021. No. 3. P. 52–58.
- Orekhov S. Analysis of Virtual Promotion of a Product. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2022. No. 463. P. 3–13.
- Ходаков В. Е., Соколова Н. А., Кирийчук Д. Л. О развитии основ теории координации сложных систем. *Проблемы информационных технологий*. 2014. № 16. С. 12–21.
- Кущенко А. С., Годлевский И. М. Структура модели координации организационного управления территориально распределенными логистическими системами дистрибуции. *Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ»: сб. науч. тр. Темат. вып.: Системный анализ, управление и информационные технологии..* Харьков: НТУ «ХПИ», 2015. № 58 (1167). С. 1–6.
- Ляшенко Е. Н., Коваленко В. Ф., Кирийчук Д. Л. Постановка задачи координации в иерархической системе управления силами и средствами, привлекаемыми для ликвидации чрезвычайных ситуаций. *Проблемы информационных технологий*, 2015. № 18. С. 46–51.
- Godlevsky M., Orekhov S., Orekhova E. Theoretical Fundamentals of Search Engine Optimization Based on Machine Learning. *CEUR WS*. 2017. Vol. 1844. P. 23–32.

7. Ziakis C., Vlachopoulou M., Kyrkoudis T., Karagkiozidou M. Important Factors for Improving Google Search Rank. *Future Internet*. 2019. No. 11 (32). P. 3–14.
8. Dasso A., Funes A. *Verification, validation and Testing in Software Engineering*. Idea Group Publishing, 2007. 443 p.
9. Lettнин D., Winterholer M. *Embedded Software Verification and Debugging*. Springer Science & Business Media, 2017. 220 p.
10. Kundu S., Lerner S., Gupta R.K. *High-Level Verification. Methods and Tools for Verification of System-Level Designs*. Springer Science & Business Media, 2011. 182 p.
11. Kettinger W.J., Grover V. *Business Process Change: Concepts, Methods and Technologies*. Group Publishing, 1998. 704 p.
12. Mohapatra S. *Business Process Reengineering. Automation Decision Points in Process Reengineering*. Springer Science & Business Media, 2013. 264 p.
13. Drucker P.F. *The Effective Executive. The definitive guide to getting the right things done*. HarperCollins Publishers Inc., 2017. 193 p.
14. Райс Л., Траут Дж. *Маркетингові війни*. Київ: Фабула, 2019. 240 с.
15. Orekhov S., Malyhon H. Method for Synthesizing the Semantic Kernel of Web Content. *CEUR-WS*. 2022. Vol. 3171. P. 127–137.
5. Lyashenko E. N., Kovalenko V. F., Kiriychuk D. L. Postanovka zadachi koordinazii v ierarhicheskoy sisteme upravleniya silami i sredstvami, privilekaemumi dlya likvidazii chrezvychaynyh situaziy. [Statement of the problem of coordination in the hierarchical system of management of forces and means involved in the elimination of emergency situations]. *Problems of information technologies*. 2015, no. 18, pp. 46–51.
6. Godlevsky M., Orekhov S., Orekhova E. Theoretical Fundamentals of Search Engine Optimization Based on Machine Learning. *CEUR WS*. 2017, vol. 1844, pp. 23–32.
7. Ziakis C., Vlachopoulou M., Kyrkoudis T., Karagkiozidou M. Important Factors for Improving Google Search Rank. *Future Internet*. 2019, no. 11 (32), pp. 3–14.
8. Dasso A., Funes A. *Verification, validation and Testing in Software Engineering*. Idea Group Publishing, 2007. 443 p.
9. Lettнин D., Winterholer M. *Embedded Software Verification and Debugging*. Springer Science & Business Media, 2017. 220 p.
10. Kundu S., Lerner S., Gupta R.K. *High-Level Verification. Methods and Tools for Verification of System-Level Designs*. USA: Springer Science & Business Media, 2011. 182 p.
11. Kettinger W.J., Grover V. *Business Process Change: Concepts, Methods and Technologies*. Group Publishing, 1998. 704 p.
12. Mohapatra S. *Business Process Reengineering. Automation Decision Points in Process Reengineering*. USA: Springer Science & Business Media, 2013. 264 p.
13. Drucker P.F. *The Effective Executive. The definitive guide to getting the right things done*. HarperCollins Publishers Inc., 2017. 193 p.
14. Rise L., Traute Jr. *Marketynhovi viiny* [Marketing wars]. Kyiv, Fabula, 2019. 240 p.
15. Orekhov S., Malyhon H. Method for Synthesizing the Semantic Kernel of Web Content. *CEUR-WS*. 2022, vol. 3171, pp. 127–137.

References (transliterated)

1. Orekhov S. Technology of Virtual Promotion of a Product. *Computer Systems and Information Technologies*. 2021, no. 3, pp. 52–58.
2. Orekhov S. Analysis of Virtual Promotion of a Product. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2022, no. 463, pp. 3–13.
3. Hodakov V. E., Sokolova N. A., Kiriychuk D. L. O razvitii osnov teorii koordinazii sloznuh sistem [On the development of the foundations of the theory of coordination of complex systems]. *Problems of information technologies*. 2014, no. 16, pp. 12–21.
4. Kuzenko A. S., Godlevsky I. M. Struktura modeli koordinazii organizacionnigi upravleniya territorialno raspredelennymi logisticheskimi systemami distribuzii [The structure of the coordination model of organizational management of geographically distributed logistics distribution systems] *Vestnik Nats. tekhn. un-ta "KhPI": sb. nauch. tr. Temat. vyp.: Sistemy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii*. [Bulletin of the National Technical University "KhPI": a collection of scientific papers. Thematic issue: System analysis, management and information technology]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2015, no. 58 (1167), pp. 1–6.

Received 06.11.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Орехов Сергій Валерійович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління; м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5040-5861>; e-mail: sergey.v.orekhov@gmail.com

Копп Андрій Михайлович – доктор філософії, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління; м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3189-5623>; e-mail: kopp93@gmail.com

Орловський Дмитро Леонідович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління; м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8261-2988>; e-mail: orlovskiyi.dm@gmail.com

Orekhov Sergey Valerievich – PhD, Associate Professor, National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute», Associate Professor of Software Engineering and Management Intelligent Technologies Department; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5040-5861>; e-mail: sergey.v.orekhov@gmail.com

Kopp Andrii Mykhailovych – PhD in Computer Sciences, National technical university «Kharkiv polytechnic institute», Associate Professor of the Department of Software Engineering and Management Intelligent Technologies; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3189-5623>; e-mail: kopp93@gmail.com

Orlovskiy Dmytro Leonidovych – PhD in Technical Sciences, Docent, National technical university «Kharkiv polytechnic institute», Associate Professor of the Department of Software Engineering and Management Intelligent Technologies; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8261-2988>; e-mail: orlovskiyi.dm@gmail.com

МАТЕМАТИЧНЕ І КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING

UDC 004.94

DOI: 10.20998/2079-0023.2022.02.12

A. M. KOPP, D. L. ORLOVSKYI

A SOFTWARE TOOL FOR QUALITY MEASUREMENT OF BUSINESS PROCESS MODELS USING DISTANCES IN N-DIMENSIONAL SPACE

This paper considers the problem of quality measurement of business process models using the n-dimensional space distances. Business process models are graphical schemes similar to flowcharts or activity diagrams utilized in software engineering, usually represented using the BPMN (Business Process Model and Notation) or EPC (Event-driven Process Chain) notations. Business process modeling aims to capture current enterprise workflows for their analysis and then improvement using automation through IT (Information Technology) systems deployment. Therefore, designed business process models should be of high quality, so all "weak spots" of described organizational workflows could be properly identified and replaced with more efficient solutions. Whereas process models, which are not understandable, un-structured, and/or uncertain, may cause even more issues when used to improve organizational activities. Therefore, this study proposes quality measures and a software tool that can be used to detect errors in BPMN and EPC business process models using distances in n-dimensional space. The formal problem statement based on the graph-based description of business process models was given. Business process model quality characteristics and measures that consider features of both BPMN and EPC notations were proposed. Distances in n-dimensional space were suggested for usage to measure the quality of business process models. The algorithm for business process model quality measurement was proposed. The software tool to measure the quality of BPMN and EPC business process models was designed and developed. The quality of sample business process models was measured using the software tool. Obtained results were analyzed and discussed. This paper considers the Euclidean distance only, while other existing n-dimensional space distance measures or, on the opposite, similarity measures, can be used to evaluate business process model quality in further research.

Keywords: business process model, quality measure, software tool, distance measure, n-dimensional space.

A. M. КОПП, Д. Л. ОРЛОВСЬКИЙ

ПРОГРАМНЕ РІШЕННЯ ДЛЯ ВИМІРУ ЯКОСТІ МОДЕЛЕЙ БІЗНЕС-ПРОЦЕСІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ВІДСТАНЕЙ У N-ВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ

У даній роботі розглядається задача вимірювання якості моделей бізнес-процесів за допомогою відстаней у n-вимірному просторі. Моделі бізнес-процесів — це графічні схеми, подібні до блок-схем або діаграм діяльності, які використовуються в розробці програмного забезпечення, зазвичай представлені за допомогою нотацій BPMN (Business Process Model and Notation) або EPC (Event-driven Process Chain). Моделювання бізнес-процесів має на меті охопити поточні потоки робіт підприємства для їх аналізу та подальшого удосконалення за допомогою автоматизації через розгортання IT-систем (інформаційних технологій). Тому розроблені моделі бізнес-процесів мають бути якісними, щоб усі «слабкі місця» описаних організаційних бізнес-процесів могли бути правильно визначені та замінені більш ефективними рішеннями. Тоді як моделі процесів, які є незрозумілими, неструктурованими та/або невизначеними, можуть викликати ще більше проблем, якщо їх використовувати для покращення організаційної діяльності. Тому в цьому дослідженні пропонуються міри якості та програмний засіб, який можна використовувати для виявлення помилок у моделях бізнес-процесів у нотаціях BPMN та EPC з використанням відстаней у n-вимірному просторі. Дано формальну постановку задачі на основі графічного опису моделей бізнес-процесів. Запропоновано якісні характеристики моделей бізнес-процесів та міри, які враховують особливості нотацій як BPMN, так і EPC. Відстані в n-вимірному просторі були запропоновані для вимірювання якості моделей бізнес-процесів. Запропоновано алгоритм вимірювання якості моделей бізнес-процесів. Спроектовано та розроблено програмний засіб для вимірювання якості моделей бізнес-процесів у нотаціях BPMN та EPC. Продемонстровано приклади вимірювання якості моделей бізнес-процесів за допомогою розробленого програмного засобу. Отримані результати було проаналізовано та обговорено. У цій статті розглядається лише Евклідова відстань, тоді як інші існуючі відстані у n-вимірному просторі або, навпаки, міри подібності, можуть бути використані для оцінки якості моделей бізнес-процесів у подальших дослідженнях.

Ключові слова: модель бізнес-процесу, міра якості, програмний засіб, міра відстані, n-вимірний простір.

Introduction. Business process modeling is a key activity within the Business Process Management (BPM) domain [1]. Process modeling ensures IT (Information Technology) and business alignment by making easier communication between business users, such as chief officers, managers, and other stakeholders on the one side,

and IT engineers who design and maintain enterprise information system(s) on the other side.

Graphical business process models are used to capture and analyze current workflows in order to find ways for their improvement by means of improvement of current IT systems or introducing new IT system modules in the case

© A. M. Kopp, D. L. Orlovskiy, 2022



Research Article: This article was published by the publishing house of NTU "KhPI" in the collection "Bulletin of the National Technical University "KhPI" Series: System analysis, management and information technologies." This article is distributed under a Creative Common [Creative Common Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Conflict of Interest:** The author/s declared no conflict of interest.



considered workflows are still not automated. Hence, captured business process models should be understandable, well-structured, and may not have any uncertainties. Otherwise, it will not be possible properly analyzed current enterprise activities and suggest efficient ways for their improvement. Moreover, improper business process models may signalize improper business processes themselves, so modeling mistakes may appear because the reflected real business process has certain faults.

Considered process modeling issues may negatively affect BPM projects, since fault business process models may cause even more inefficient spots in so-called “improved” or “TO-BE” workflows. Moreover, further costs to fix arisen errors at the stage of IT system maintenance may be literally 100 times greater than at the stage of system design [2], where the business process models are created and analyzed.

This study aims to provide quality measures to improve business process modeling and analysis activities of BPM projects. A research object includes business process modeling and analysis activity, conducted by business analysts or IT management specialists. A research subject includes quality measures for BPMN (Business Process Model and Notation) [3] and EPC (Event-driven Process Chain) [4] models used nowadays the most to capture organizational workflows [5].

In order to achieve the research aim, there should be solved following tasks:

- give the formal problem statement based on the graph-based description of business process models;
- propose business process model quality characteristics and measures that consider features of both BPMN and EPC notations;
- suggest usage of distances in n-dimensional space to measure the quality of business process models;
- propose an algorithm to measure the quality of business process models;
- design and develop a software tool to measure the quality of BPMN and EPC business process models;
- measure quality of sample business process models using the software tool, analyze, and discuss obtained results.

These tasks could be solved using methods of business process modeling [6], graph theory [7], metric geometry [8], and software engineering [9].

Problem statement. Business process elements that deserve the most attention in business process models are tasks or also referred to as activities.

Since business process models could be described as directed graphs [7], the following formalism could be used to describe the structure of a business process diagram:

$$BPG = \langle T, SF \rangle. \quad (1)$$

The *BPG* stands for the Business Process Graph, the formal description of a business process model, which is then should be used to analyze business process diagrams.

The *T* stands for the Tasks, the set of activities of a business process model. Each task could be described using

the following tuple of incoming sequence flows t^{in} and outgoing sequence flows t^{out} as well:

$$T = \{t = \langle t^{in}, t^{out} \rangle, t \in T\}. \quad (2)$$

The *SF* stands for the Sequence Flow, the set of sequence flows that connect tasks of a business process model and other elements, such as events and gateways. Each sequence flow could be described using the following tuple of the source task sf^{source} and target task sf^{target} :

$$SF = \{sf = \langle sf^{source}, sf^{target} \rangle, sf \in SF\}. \quad (3)$$

Hence, each of t^{in} or t^{out} tuples could be formally described as following: $t^s = \{sf, sf \in SF\}$, $s \in \{in, out\}$, while $t \in T$.

The linkage between considered formalisms (1)–(3) and business process modeling elements in BPMN and EPC notations is demonstrated in Fig. 1.

Using introduced formalisms (1)–(3) and proposed quality characteristics of business process models, there could be formulated following measures.

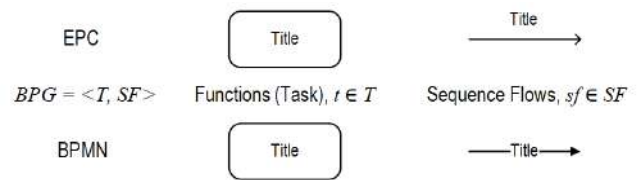


Fig. 1. Connecting graph theory formalisms with BPMN and EPC elements

Business process model quality characteristics and measures. The following quality characteristics [10] could be used to describe a business process model:

- Complexity – how large the business process model is, how dense, connected, and coupled are sequence flows that associate elements to each other in the business process model.
- Structuredness – how the business process model is structured: elements should be properly connected and the connection of business process model elements also should be consistent and coherent.
- Uncertainty – business process workflows, demonstrated by models, should be free of the uncertainty of depicted scenarios – business process branching should be explicitly determined and depicted without any uncertainty.

The complexity of a business process model could be described using a tuple instead of a single measure:

$$BPG_C = \langle \hat{t}_{avg}, \hat{t}_{min}, \hat{t}_{max} \rangle. \quad (4)$$

The \hat{t}_{avg} is the average degree of a business process model activity, where degree stands for the number of incoming and outgoing sequence flows associated with a business process model element:

$$\hat{t}_{avg} = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} (|t^{in}| + |t^{out}|). \quad (5)$$

The \hat{t}_{\min} is the minimum degree of a business process model activity:

$$\hat{t}_{\min} = \min_{t \in T} \left\{ |t^{\text{in}}| + |t^{\text{out}}| \right\}. \quad (6)$$

The \hat{t}_{\max} is the maximum degree of a business process model activity:

$$\hat{t}_{\max} = \max_{t \in T} \left\{ |t^{\text{in}}| + |t^{\text{out}}| \right\}. \quad (7)$$

The proposed measure of business process model complexity gives only relative values and, therefore, could be used to compare business process models of different sizes. The introduced measure of business process model complexity considers degrees of activities and derived sub-measures, such as average degree, minimum degree, and maximum degree of the task in a business process model. Usage of such relative measures also allows comparing business process models of different sizes to each other.

Structuredness of a business process model is a much more complex quality characteristic, which also could be described using the following tuple-based measure:

$$BPG_S = \langle \hat{t}_{\text{in}}^{(0)}, \hat{t}_{\text{out}}^{(0)} \rangle. \quad (8)$$

The $\hat{t}_{\text{in}}^{(0)}$ is the relative number of tasks (the percent of all tasks of a business process model), each of which does not have incoming sequence flows:

$$\hat{t}_{\text{in}}^{(0)} = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} 1_{|t^{\text{in}}|=0}. \quad (9)$$

The $\hat{t}_{\text{out}}^{(0)}$ is the relative number of tasks, each of which does not have outgoing sequence flows:

$$\hat{t}_{\text{out}}^{(0)} = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} 1_{|t^{\text{out}}|=0}. \quad (10)$$

Here $1_{|t^{\text{in}}|=0}$ and $1_{|t^{\text{out}}|=0}$ are the respective indicator functions.

Introduced relative measures of business process model structuredness demonstrate if there are present tasks, which do not have incoming or outgoing sequence flows that signalize interruptions of a business process.

Business processes should start or end with respective events, while activities that trigger business process workflow execution or serve as the ends of business process workflow may signalize inconsistent and incoherent business processes [6].

Uncertainty of a business process model is even more complex quality characteristic in comparison to structuredness, which also could be described using the following tuple-based measure:

$$BPG_U = \langle \hat{t}_{\text{in}}^{(>1)}, \hat{t}_{\text{out}}^{(>1)} \rangle. \quad (11)$$

The $\hat{t}_{\text{in}}^{(>1)}$ is the relative number of tasks, each of which has multiple incoming sequence flows:

$$\hat{t}_{\text{in}}^{(>1)} = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} 1_{|t^{\text{in}}|>1}. \quad (12)$$

The $\hat{t}_{\text{out}}^{(>1)}$ is the relative number of tasks, each of which has multiple outgoing sequence flows:

$$\hat{t}_{\text{out}}^{(>1)} = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} 1_{|t^{\text{out}}|>1}. \quad (13)$$

Here $1_{|t^{\text{in}}|>1}$ and $1_{|t^{\text{out}}|>1}$ are the respective indicator functions.

Considered relative measures also demonstrate the presence of tasks, which implement implicit branching of a business process workflow. There are exclusive and parallel branching scenarios, which could be declared without special workflow patterns using XOR-gateways and AND-gateways [6]. Such implicit decisions bring uncertainty to described business processes and should be re-designed to achieve better understandability and maintainability of business process models.

Using distances in n-dimensional space to measure the quality of business process models. Therefore, the business process model graph could be described using the following ordered set of measures (4), (8), and (11):

$$BPG_M = \langle BPG_C, BPG_S, BPG_U \rangle. \quad (14)$$

By expanding this tuple (14), we could obtain the following vector, which describes a business process model:

$$\mathbf{X}^{BPG} = \left(\hat{t}_{\text{avg}}, \hat{t}_{\text{min}}, \hat{t}_{\text{max}}, \hat{t}_{\text{in}}^{(0)}, \hat{t}_{\text{out}}^{(0)}, \hat{t}_{\text{in}}^{(>1)}, \hat{t}_{\text{out}}^{(>1)} \right). \quad (15)$$

The vector of a business process model, which does not have any flaws, which violate complexity, structuredness, and uncertainty, could be described as follows:

$$\mathbf{X}_0^{BPG} = (2, 2, 2, 0, 0, 0, 0). \quad (16)$$

Hence, the quality of the business process model could be measured as the distance between the vector of a “perfect” business process model \mathbf{X}_0^{BPG} and the current business process model under evaluation \mathbf{X}^{BPG} [8]:

$$d(\mathbf{X}^{BPG}, \mathbf{X}_0^{BPG}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (X_k^{BPG} - X_{0k}^{BPG})^2}. \quad (17)$$

As it is shown, the Euclidean distance in the n -dimensional space ($n = 7$) could be used to measure the similarity between the “perfect” business process model and the measured business process model [8].

Therefore, business process models of high quality should demonstrate zero distance $d(\mathbf{X}^{BPG}, \mathbf{X}_0^{BPG}) = 0$ to the vector of a “perfect” business process model \mathbf{X}_0^{BPG} . Otherwise, if $d(\mathbf{X}^{BPG}, \mathbf{X}_0^{BPG}) > 0$, there could be present violations of complexity, structuredness, or uncertainty quality features.

The algorithm for business process model quality measurement. The algorithm for business process model quality measurement may include the following steps.

Step 1. Enter the name N of the measured business process model.

Step 2. Enter the name N_t of the activity and its input/output sequence flow numbers $|t^{in}|$ and $|t^{out}|$.

Step 3. Return to Step 2 if one more activity should be added. Otherwise – go to Step 4.

Step 4. Build the set of activities T , calculate measures defined in (4), (8), and (11), and build the vector X^{BPG} for the model N .

Step 5. Calculate the distance value $d(X^{BPG}, X_0^{BPG})$.

If $d(X^{BPG}, X_0^{BPG}) = 0$, model N does not have complexity, structuredness, or uncertainty mistakes. Otherwise – go to Step 6.

Step 6. Check the vector X^{BPG} and make the following assumptions, so fault activities $N_t, t \in T$ could be detected and fixed:

- if $\hat{t}_{avg} \neq 2 \vee \hat{t}_{min} \neq 2 \vee \hat{t}_{max} \neq 2$, there are complexity issues in model N ;
- if $\hat{t}_{in}^{(0)} \neq 0 \vee \hat{t}_{out}^{(0)} \neq 0$, there are structuredness issues in model N ;
- if $\hat{t}_{in}^{(>1)} \neq 0 \vee \hat{t}_{out}^{(>1)} \neq 0$, there are uncertainty issues in model N .

In order to provide the efficient quality measurement of business process models, the proposed algorithm should be implemented as a software tool. Details related to the design and development of such a software tool are outlined in the subsequent section.

Design and development of the software tool to measure business process model quality. The developed software tool is a client-server web application based on the Java platform and programming language [9]. We used Java because of its cross-platform capabilities, relative simplicity for object-oriented design, and scalability. It uses the collection of BPMN models and the Camunda BPMN library [11]. The collection of business process models locates on the application server or on the dedicated file server. Fig. 2 below demonstrates the main nodes and components of the developed software.

Let us briefly describe the main software components (see Fig. 2 above). The client-side contains the single web page and the stylesheet. The web page communicates with the Java servlet (a server-side application that processes requests and provides responses). Utility classes (see the package “util”) allow reading and measuring BPMN models given in a collection of files. Java beans (simple object representations) describe BPMN elements, models, and measured indicators.

Fig. 3 below explains the interaction of the main software components. The described workflow includes the following steps:

- the user uploads a BPMN model to the server;
- the user visits the software tool’s homepages (i.e. the “index” page);

- the homepage accesses the backend Java code (i.e. the “MeasureServlet” class);
- the respective servlet calls the special method of the “CollectionUtil” class to read the collection of BPMN models from the server;
- the servlet then calls the special method of the “CollectionUtil” class to measure the quality of retrieved BPMN models;
- the “CollectionUtil” class returns the results to the servlet that then displays these results on the “index” page to the user.

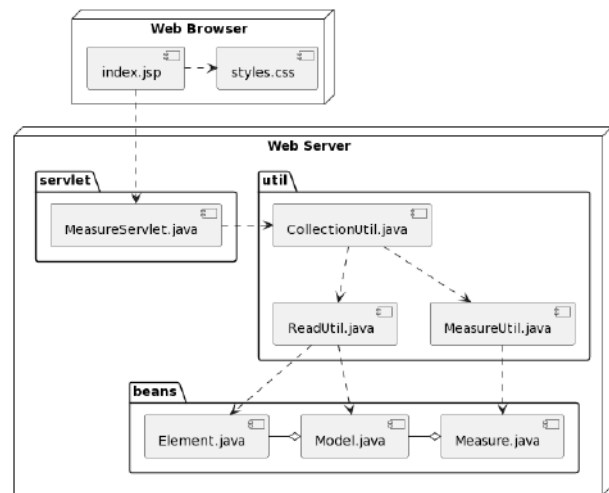


Fig. 2. Component diagram of the software tool

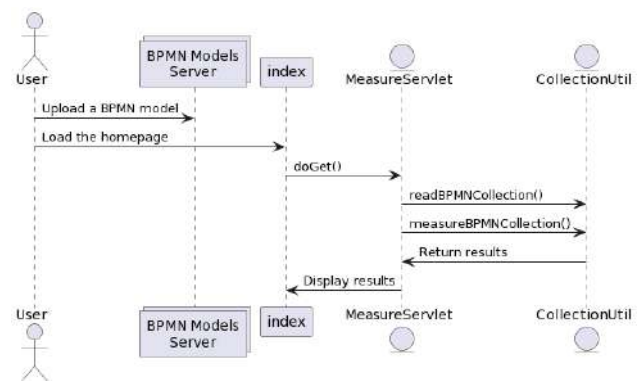


Fig. 3. Sequence diagram of the software tool

Quality measurement of sample business process models. Fig. 4 below shows the usage of the developed software tool “BPMNmeter”. We used the Camunda repository [12] of goods dispatch process models. Models with measures different from “perfect” are colored in red, while high-quality models are highlighted in green. Models are sorted in reverse order by distance from the “perfect” model.

Fig. 5 below demonstrates one of the goods dispatch business process models of poor quality, named as “Shipping1_c87ef14a31294d689947d679015e8afb”.

Fig. 5 below demonstrates one of the goods dispatch business process models of poor quality, named as “Shipping1_c87ef14a31294d689947d679015e8afb”.

BPMNmeter

Name	avgI	minI	maxI	inT(=0)	outT(=0)	inT(>1)	outT(>1)	Quality
warenersand - english_a850c588e7d54de1add30aadce62cd6.bpmn	2.22	2.00	4.00	0.00	0.00	0.00	0.11	2.02
Shipping1_c87ef14a31294d689947d679015e8afb.bpmn	2.00	1.00	3.00	0.14	0.00	0.14	0.00	1.43
Warenersand_7f50c52e9d69490db819c1d685c59e3a.bpmn	1.40	1.00	2.00	0.00	0.60	0.00	0.00	1.31
dispatch_of_goods_2a1f9e8760a844f9b1794af65d2746ee.bpmn	2.17	2.00	3.00	0.00	0.00	0.17	0.00	1.03
Excercise_1_Dispatch_261502e16e3a457e8f2787775defec9d.bpmn	2.17	2.00	3.00	0.00	0.00	0.17	0.00	1.03
warenersand - english_027ce98fab3a4b3dada547ccf03e3c51.bpmn	2.17	2.00	3.00	0.00	0.00	0.17	0.00	1.03
My_first_example_process_2_40ebe9ccb3e142f7823aedc43cd7d617.bpmn	2.11	2.00	3.00	0.00	0.11	0.11	0.00	1.02
Dispatch_of_goods_42528d54df304f9fa9c747c8d40deb35.bpmn	2.11	2.00	3.00	0.00	0.00	0.11	0.00	1.01
Dispatchin_of_goods_ca3ac1d3e9ce4cda979953ebc59bf6b7.bpmn	2.00	2.00	2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Dispatch_01_6a478fb945e4464abc19d1a74b903390.bpmn	2.00	2.00	2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Dispatch_1cb656bdb9ec435fbc33bf4df633c2f5.bpmn	2.00	2.00	2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Fig. 4. Detected business process models of the lowest quality

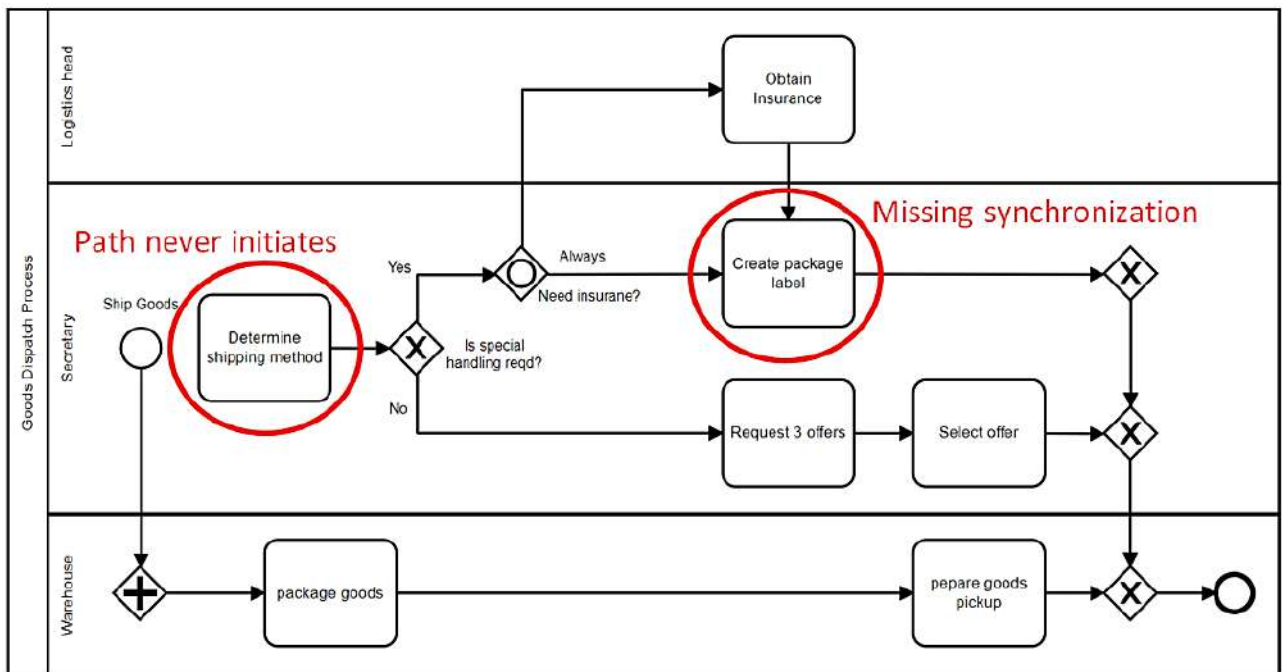


Fig. 5. One of the BPMN models of poor quality

Its distance from the “perfect” BPMN model is $d(X^{BPG}, X_0^{BPG}) = 1.43$. Fig. 5 demonstrates the respective diagram, which contains two types of modeling mistakes:

- missing incoming flow for the “Determine shipping method” task leading to the never initiated process path;
- multiple incoming flows for the “Create package label” leading to missing synchronization.

Obtained measures prove the observations outlined above. The considered model demonstrates deviations of measures from “perfect” indicators:

- the maximum degree of a business process model activity, $\hat{t}_{max} = 3 \neq 2$;
- the relative number of tasks, each of which does not have incoming sequence flows, $\hat{t}_{in}^{(0)} = 0.14 \neq 0$;

- the relative number of tasks, each of which has multiple outgoing sequence flows, $\hat{t}_{in}^{(>1)} = 0.14 \neq 0$.

These measures reflect complexity, structuredness, and uncertainty issues in the analyzed BPMN model.

Complexity issues signalize the complicated modifiability and maintainability of such a model. Structuredness issues signalize modeling errors that violate the workflow of a business process (e.g. the path beginning with the “Determine shipping method” activity may never trigger). Uncertainty issues signalize the complicated understandability of such a model and, therefore, a business process (e.g. how possible parallel flows synchronize before the “Create package label” activity).

Conclusion. In this study, we considered the problem of quality measurement of business process models using the n-dimensional space distances. Since process models,

which are not understandable, unstructured, and/or uncertain, may cause even more issues when used to improve organizational activities, this paper proposed quality measures and the software tool that can be used to detect errors in BPMN and EPC business process models using distances in n-dimensional space.

The formal problem statement based on the graph-based description of business process models was given. Business process model quality characteristics and measures that consider features of both BPMN and EPC notations were proposed. Distances in n-dimensional space were suggested for usage to measure the quality of business process models. The algorithm for business process model quality measurement was proposed. The software tool to measure the quality of BPMN and EPC business process models was designed and developed. The quality of sample business process models was measured using the software tool. Obtained results were analyzed and discussed.

Limitations of this paper are related to the consideration of only tasks as the most important business process modeling elements, whereas gateways (i.e. logical connectors) are also valuable and error-prone objects. Also, this paper considers the Euclidean distance only, while other existing n-dimensional space distance measures or, on the opposite, similarity measures, can be used to evaluate business process model quality. These limitations should be taken into account in future research.

References

1. Reijers H. A. Business Process Management: The evolution of a discipline. *Computers in Industry*. 2021. No. 126. P. 103404.
2. Han X., Gongjun Y. Fault Prediction with Static Software Metrics in Evolving Software: A Case Study in Apache Ant. *Journal of Computer and Communications*. 2022. No. 10 (2). P. 33–45.
3. Dijkman R., Hofstetter J., Koehler J. *Business Process Model and Notation*. Springer, 2011. 179 p.
4. Nizioł M., et al. Characteristic and comparison of UML, BPMN and EPC based on process models of a training company. *Annals of Computer Science and Information Systems*. 2021. No. 26. P. 193–200.
5. Entringer T., et al. Comparative analysis main methods business process modeling: literature review, applications and examples. *International Journal of Advanced Engineering Research and Science*. 2019. No. 5 (6). P. 100–116.

6. Guizani K, Sonia A. G. An approach for selecting a business process modeling language that best meets the requirements of a modeler. *Procedia Computer Science*. 2021. No. 181. P. 843–851.
7. Trudeau R. J. *Introduction to graph theory*. Courier Corporation, 2013. 224 p.
8. Thant A. A., Soe M. A., Myanmar M. Euclidean, Manhattan and Minkowski Distance Methods For Clustering Algorithms. *Int. J. Sci. Res. Sci. Eng. Technol.* 2020. No. 7. P. 553–559.
9. Juneau J., Luciano M. Java Web Applications. *Java 17 Recipes*. 2022. P. 479–514.
10. Krogstie J. Quality of business process models. *Quality in Business Process Modeling*. 2012. P. 53–102.
11. *BPMN model API*. URL: <https://docs.camunda.org/manual/7.16/user-guide/model-api/bpmn-model-api/> (accessed: 20.04.2022).
12. *BPMN for research*. URL: <https://github.com/camunda/bpmn-for-research/> (accessed: 20.04.2022).

References (transliterated)

1. Reijers H. A. Business Process Management: The evolution of a discipline. *Computers in Industry*. 2021, no. 126, pp. 103404.
2. Han X., Gongjun Y. Fault Prediction with Static Software Metrics in Evolving Software: A Case Study in Apache Ant. *Journal of Computer and Communications*. 2022, no. 10 (2), pp. 33–45.
3. Dijkman R., Hofstetter J., Koehler J. *Business Process Model and Notation*. Springer, 2011. 179 p.
4. Nizioł M., et al. Characteristic and comparison of UML, BPMN and EPC based on process models of a training company. *Annals of Computer Science and Information Systems*. 2021, no. 26, pp. 193–200.
5. Entringer T., et al. Comparative analysis main methods business process modeling: literature review, applications and examples. *International Journal of Advanced Engineering Research and Science*. 2019, no. 5 (6), pp. 100–116.
6. Guizani K, Sonia A. G. An approach for selecting a business process modeling language that best meets the requirements of a modeler. *Procedia Computer Science*. 2021, no. 181, pp. 843–851.
7. Trudeau R. J. *Introduction to graph theory*. Courier Corporation, 2013. 224 p.
8. Thant A. A., Soe M. A., Myanmar M. Euclidean, Manhattan and Minkowski Distance Methods For Clustering Algorithms. *Int. J. Sci. Res. Sci. Eng. Technol.* 2020, no. 7, pp. 553–559.
9. Juneau J., Luciano M. Java Web Applications. *Java 17 Recipes*. 2022, pp. 479–514.
10. Krogstie J. Quality of business process models. *Quality in Business Process Modeling*. 2012, pp. 53–102.
11. *BPMN model API*. Available at: <https://docs.camunda.org/manual/7.16/user-guide/model-api/bpmn-model-api/> (accessed 20.04.2022).
12. *BPMN for research*. Available at: <https://github.com/camunda/bpmn-for-research/> (accessed 20.04.2022).

Надійшла (received) 05.10.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Kopp Andrii Mykhailovych – PhD in Computer Sciences, National technical university «Kharkiv polytechnic institute», Associate Professor of the Department of Software Engineering and Management Intelligent Technologies; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3189-5623>; e-mail: kopp93@gmail.com

Orlovskiy Dmytro Leonidovych – PhD in Technical Sciences, Docent, National technical university «Kharkiv polytechnic institute», Associate Professor of the Department of Software Engineering and Management Intelligent Technologies; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8261-2988>; e-mail: orlovskiy.dm@gmail.com

Копп Андрій Михайлович – доктор філософії, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління; м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3189-5623>; e-mail: kopp93@gmail.com

Орловський Дмитро Леонідович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління; м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8261-2988>; e-mail: orlovskiy.dm@gmail.com

М. Д. ГОДЛЕВСЬКИЙ, Д. К. МАЛЕЦЬ

СИНТЕЗ ФУНКЦІЇ КОРИСНОСТІ ПРОЦЕСУ РОЗРОБКИ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ІТ-КОМПАНІЇ НА ОСНОВІ ЕТАЛОННОЇ МОДЕЛІ SPICE

У роботі виділено два типи складних систем: «реальні системи» і «віртуальні системи». Перші є об'єктом дослідження комп'ютерних наук, а другі – інженерії програмного забезпечення. До останніх відносяться програмні системи (ПС) і процес розробки програмного забезпечення (ПР ПЗ), який є об'єктом наукового дослідження роботи. ПР ПЗ відноситься до цілеспрямованих систем. В таких системах на основі поставлених цілей виникає задача синтезу їх структури (окремі елементи і відношення між ними), яка спрямована на досягнення поставлених цілей, пов'язаних з якістю ПР ПЗ. Вважається, що успіх розробки ПС безпосередньо залежить від якості ПР ПЗ. У роботі розглядається проблема оцінки і покращення ПР ПЗ на основі двох моделей зрілості: СММІ, SPICE. Для обох моделей використовується бальна шкала першого типу, коли оцінка проводиться за об'єктивними критеріями, так що індивідуальні оцінки є деякими флуктуаціями реальних значень. При цьому є загальноприйнятні еталони, що відповідають градаціям бальної шкали. Основна складова моделі СММІ – фокусна область, яка характеризується «рівнем можливості» в бальній шкалі від 0 до 3. Основна складова моделі SPICE – процес, який характеризується «рівнем можливості» в бальній шкалі від 1 до 5. Для дискретного варіанта моделі СММІ використовується поняття «рівень зрілості», завдяки якому проводиться оцінка якості ПР ПЗ всієї ІТ-організації. Проведено формалізацію моделі і реалізовані статична та динамічна моделі планування розвитку ПР ПЗ ІТ-організації, які інтегровані в єдину технологію «ковзаного» планування. Одним з основних недоліків дискретного варіанта моделі СММІ є те, що він не враховує особливості діяльності ІТ-організації. З іншої сторони, модель SPICE не дозволяє проводити оцінку всього ПР ПЗ ІТ-організації. Тому було запропоновано синтез дискретної моделі зрілості на основі еталонної моделі SPICE. Основна її ціль – мінімізувати основні вади моделі СММІ. З цією метою було запропоновано використання теорії корисності. Сформована ієрархічна структура критеріїв, на основі яких проводиться синтез функції корисності. Попередньо на рівні окремого процесу формалізована модель SPICE і на цій основі визначена структура функції корисності. З огляду на фундаментальні властивості систем представлено тренд її зміни від використання ресурсів. Далі експерти зіставляють характеристики процесів моделі SPICE і ІТ-компанії з погляду важливості процесів для зростання рівня зрілості ПР ПЗ. Ця інформація від експертів надається аналітикам, які розташовують процеси у чергу залежно від важливості з погляду функції корисності.

Ключові слова: програмна система, процес розробки програмного забезпечення, модель зрілості, бальна шкала, теорія корисності, дискретна модель зрілості, експерти, аналітики.

M. D. GODLEVSKYI, D. K. MALETS

SYNTHESIS OF THE UTILITY FUNCTION OF THE IT COMPANY'S SOFTWARE DEVELOPMENT PROCESS BASED ON THE SPICE REFERENCE MODEL

The work distinguishes two types of complex systems: "real systems" and "virtual systems". The first ones are the object of computer science research, and the second ones are the object of software engineering. The latter include software systems (SS) and the software development process (SDP), which is the object of scientific work research. SDP refers to goal-oriented systems. In such systems, on the basis of the set goals, the task of synthesizing their structure (individual elements and the relationship between them) arises, which is aimed at achieving the set goals related to the quality of SDP. It is believed that the success of SS development directly depends on the quality of SDP. The work considers the problem of assessment and improvement of SDP on the basis of two maturity models: SMMI, SPICE. Both models use a point scale of the first type, when the assessment is made according to objective criteria, so that individual assessments are some fluctuations of the real values. At the same time, there are generally accepted standards that correspond to the gradations of the point scale. The main component of the SMMI model is the focal area, which is characterized by the "level of opportunity" on a point scale from 0 to 3. The main component of the SPICE model is a process characterized by a "level of possibility" on a point scale from 1 to 5. For the discrete version of the SMMI model, the concept of "maturity level" is used, thanks to which the quality of the SDP of the entire IT organization is assessed. The formalization of the model was carried out and static and dynamic planning models of the SDP of the IT organization have been implemented, which are integrated into a single technology of "sliding" planning. One of the main disadvantages of the discrete version of the SMMI model is that it does not take into account the specifics of the IT organization activity. On the other hand, the SPICE model does not allow for the assessment of the entire SDP of the IT organization. Therefore, a synthesis of a discrete maturity model based on the SPICE reference model was proposed. Its main goal is to minimize the main drawbacks of the SMMI model. For this purpose, the use of utility theory was proposed. A hierarchical structure of criteria is formed, on the basis of which the utility function is synthesized. Previously, at the level of a separate process, the SPICE model was formalized and the structure of the utility function was determined on this basis. Taking into account the fundamental properties of the systems, the trend of its change based on the used resources is presented. Next, the experts compare the characteristics of the processes of the SPICE model and the IT company from the point of view of the importance of the processes for increasing the level of maturity of the SDP. This information from the experts is provided to the analysts, who place the processes in a queue depending on the importance from the point of view of the utility function.

Keywords: software system, software development process, maturity model, point scale, utility theory, discrete maturity model, experts, analysts.

Вступ. З погляду характеристик складних систем виділимо два їх типи: «реальні системи», «віртуальні системи». До «реальних систем» будемо відносити будь-які системи, що існують в реальному світі. Це можуть бути суто технічні, соціальні, техніко-економічні системи, такі як: конкретне підприємство, технологічний процес, буд-яка інша складна система. Вважається, що такі системи є об'єктом дослідження

комп'ютерних наук. До «віртуальних систем» будемо відносити різного роду програмні системи (ПС) і процес розробки програмного забезпечення (ПР ПЗ) [1, 2]. Вважається, що об'єктом дослідження таких систем є інженерія програмного забезпечення. З погляду теорії прийняття рішень інтерес представляють цілеспрямовані системи, які ставлять перед собою цілі, або перед якими ставляться цілі для виконання. Зазвичай виникає

© М. Д. Годлевський, Д. К. Малець, 2022



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом *НТУ «ХПІ»* у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХПІ» Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Common Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



задача оцінки систем з погляду досягнення поставлених цілей. Це може бути задача синтезу такої системи, яка найкраще реалізує поставлені цілі. Вирішення цієї проблеми реалізується шляхом використання теорії прийняття рішень, яка є частиною системного аналізу та теорії систем.

У роботі об'єктом дослідження є ПР ПЗ, основною метою якого є розробка ПС на основі функціональних та нефункціональних вимог. Тому розглянемо загальне визначення цілеспрямованої системи, бо тільки для таких систем виникає проблема прийняття рішень. Під системою будемо розуміти множину однорідних або різнорідних елементів M , на якій реалізовано деяку множину відносин R . Ці відносини впорядковують елементи в структуру, яка володіє деяким набором властивостей, що дозволяє досягти заданої мети. Отже, впорядковані множини елементів і відносин між ними утворюють певну структуру $C = \{M, R\}$. Якщо мета системи задана, то розв'язується задача усвідомленого (цілеспрямованого) синтезу системи з властивостями P , які забезпечують досягнення мети. Ця задача полягає у визначенні підмножини елементів M і відносин R , що утворюють множину варіантів структур C із заданими властивостями P . Отже, цілеспрямована система може бути визначена як впорядкована множина $S = (\{M, R\}, P)$. Отже, з погляду теорії систем, мета наукової роботи – сформувати ПР ПЗ з множини M окремих елементів і визначити множину R відносин між ними, які утворюють певну структуру системи з властивостями P . Досягнення ПР ПЗ деяких властивостей P – це результат сукупності дій, які спрямовані на покращення характеристик ПР. При цьому необхідно підкреслити, що показниками успіху цих дій є множина P властивостей ПР, а не сама ПС. Вважається, що успіх розробки ПС безпосередньо залежить від якості ПР ПЗ. В роботі будемо розглядати проблему оцінки і покращення якості ПР ПЗ на основі двох основних моделей зрілості [3–5]:

- Capability Maturity Model Integration – CMMI;
- Software Process Improvement and Capability dEtermination – SPICE.

При порівнянні окремих об'єктів, з погляду визначення кращого, використовуються різного роду критерії, для кожного з яких визначається шкала, на якій проводиться оцінка значення відповідного критерія. Шкали критеріїв бувають двох типів: якісні, кількісні. Якісні шкали поділяються на шкали найменувань (номінальні) і шкали порядку (рангові). Розрізняються три типи кількісних шкал: шкали інтервалів, шкали відношень (подібності), абсолютні шкали. До окремого підкласу шкал порядку відносяться бальні шкали, які на відміну від кількісних оцінок, відповідних, зазвичай, об'єктивним вимірам показників, використовують експертні оцінки (суб'єктивні думки фахівців). Відрізняються два види бальних оцінок. У першому випадку оцінка проводиться за об'єктивним критерієм, так що індивідуальні оцінки є деякими флуктуаціями

реальних значень. Зазвичай при цьому є загальноприйнятні еталони, що відповідають градаціям шкали, з якими порівнюються об'єкти, які розглядаються. Бальна оцінка другого виду використовується, коли не тільки немає загальноприйнятних еталонів, а й сумнівна сама наявність якогось єдиного об'єктивного критерію, суб'єктивними відображеннями якого є оцінки. В моделях зрілості CMMI та SPICE використовуються бальні шкали першого типу. Основною складовою моделі зрілості CMMI є фокусна область, кожна з яких описує якість окремого процесу організації на основі рівнів можливості, які визначаються в балах від 0 до 3. Характеристика (еталон) кожного рівня можливості наведена в [6]. Для еталонної моделі SPICE також основною складовою є процес, кожний з яких має своє призначення і характеризується поняттям «можливість», яке містить набір атрибутів [6]. Атрибути процесів це їх риси, які оцінюються за відповідною шкалою ([6], табл. 6), на якій визначається ступінь володіння процесом відповідною рисою. Сукупність атрибутів процесу з відповідними ступенями володіння рисами на основі алгоритму, який наведено в [6], табл. 7 визначає рівень можливості в бальній шкалі від 1 до 5.

Постановка та мета задачі дослідження. Бальна шкала оцінки рівня можливості окремої фокусної області моделі CMMI в роботі [7] була використана для окремої практики фокусної області і запропонована оцінка рівня можливості фокусної області на основі згортки оцінок її окремих практик з урахуванням їх вагових коефіцієнтів важливості щодо фокусної області, в яку вони входять. Модель CMMI реалізована в двох варіантах – дискретний і безперервний. Вище наведено використання бальної шкали оцінки для безперервного варіанта, завдяки якій реалізована оцінка окремої фокусної області шляхом поняття «рівень можливості». Для дискретного варіанта використано поняття «рівень зрілості», завдяки якому оцінюється якість ПР ПЗ усієї організації. Рівні зрілості ПР ПЗ формуються у такий спосіб. Перший рівень вважається виконаним для будь-якої працездатної ІТ-компанії. Наступний другий рівень складається з деякої множини фокусних областей, на якому необхідно, щоб усі фокусні області досягли другого рівня можливості. На третьому рівні зрілості додаються нові фокусні області і всі вони повинні досягти третього рівня можливості. На четвертому і п'ятому рівнях зрілості також додаються нові фокусні області, які теж повинні мати третій рівень можливості. У роботах [8, 9] реалізовані статична та динамічна моделі планування розвитком ПР ПЗ ІТ-організації, які інтегровано в єдину технологію «ковзного» планування. Такий підхід дозволяє сформувати траєкторію розвитку ПР ПЗ на деякому плановому періоді, яка використовується для синтезу статичної більш детальної моделі на першому підперіоді планування. Реалізація такого підходу [10, 11], завдяки розробленій інформаційній технології, дозволяє керівництву ІТ-компанії раціонально використовувати фінансові ресурси для просування організації на плановому періоді до більш високого рівня зрілості ПР ПЗ. Одним з основних недоліків дискретного варіанта

моделі CMMI є те, що він не враховує особливості діяльності IT-організації.

У роботі [12] щодо еталонної моделі SPICE проведена формалізація оцінки рівня можливості окремого процесу моделі. Введені дискретні змінні, які визначають ступінь володіння рисою окремого атрибута, який відноситься до відповідної практики деякого процесу моделі SPICE. На цій основі запропоновано алгоритм оцінки рівня можливості окремого процесу, який базується на оцінках атрибутів окремих практик процесу і вагових коефіцієнтах важливості практик, які належать процесу. Це дозволило сформулювати модель планування розвитку підмножини процесів еталонної моделі SPICE на деякому плановому періоді в умовах обмежених фінансових ресурсів. Отже, керівництво IT-компанії має можливість сформулювати своє бачення стосовно рівнів можливості підмножини процесів на кінець планового періоду і синтезувати траєкторію руху до бажаної мети.

Необхідно підкреслити, що синтезована модель не дає можливості провести оцінку рівнів зрілості всього ПР ПЗ і тим паче сформулювати траєкторію розвитку ПР ПЗ IT-організації з урахуванням недоліків, які притаманні дискретній моделі CMMI. Тому метою роботи є розробка першого наближення (облікових характеристик) технології побудови дискретної моделі модифікації SPICE, яку далі будемо називати SPICE INTEGRATION (INT). На відмінну від CMMI вона повинна урахувати:

- основні цілі IT-компанії з погляду розвитку;
- моделі життєвого циклу ПР ПЗ;
- особливості методологій управління проектами;
- особливості та специфіку предметної області, в якій працює IT-компанія;
- розмір IT-компанії і т. ін.

Оцінка ПР ПЗ на основ функцій корисності.

Труднощі проблеми оцінювання ПР ПЗ як об'єкта дослідження полягають в тому, що він характеризується багатьма показниками (критеріями) і неможливо вибрати єдиний критерій, який досить повно характеризує цей об'єкт. У зв'язку з цим виникає необхідність:

1) формування множини локальних критеріїв, які досить повно відображають усі значущі характеристики ПР ПЗ;

2) вибору на множині локальних критеріїв метрики, що дозволяє встановлювати на множині варіантів реалізації ПР ПЗ відношення порядку.

Розглянемо методологічні підстави розв'язання кожної з цих задач. Функціональна досконалість ПР ПЗ як цілеспрямованої віртуальної системи визначається ступенем досягнення мети, яка визначається низкою критеріїв. У сукупності вони характеризують функціональну досконалість (ефект) кожного з можливих варіантів об'єкта дослідження. У нашому випадку кожний локальний критерій відноситься до окремого процесу еталонної моделі SPICE. У роботі розглядається множина індексів процесів (підпроцесів)

$$\bar{P} = \bigcup_{g \in G} \bigcup_{k \in K_g} P_{gk}$$

де: G – множина груп процесів; K_g – множина категорій процесів g -ї групи, де $g \in G$; P_{gk} – множина індексів окремих процесів (підпроцесів), де $k \in K_g$. Далі будемо вважати, що x_p – окремих p -й процес, де $p \in \bar{P}$, а $X = \{x_p, p \in \bar{P}\}$ – множина процесів.

Теоретичною основою формування багатокритеріальних скалярних оцінок є теорія корисності [13], яка передбачає існування кількісної оцінки переваги окремих альтернатив. Це означає, що, якщо альтернативний варіант ПР ПЗ X_1 переважає альтернативний варіант X_2 , то $\bar{F}(X_1) > \bar{F}(X_2)$, де $\bar{F}(X_1)$, $\bar{F}(X_2)$ – функції корисності. У загальному випадку справедливо і зворотне твердження. Отже, корисність є кількісною мірою «якості» рішень. У зв'язку з цим виникає задача обґрунтування правила (метрики), за яким формується функція корисності в просторі множини локальних критеріїв $\{f_i(X), i \in \bar{P}\}$.

Розглянемо системологічні підстави вибору метрики функції корисності. Синтез будь-якої математичної моделі, у тому числі і функції корисності для визначення якості (зрілості) ПР ПЗ, передбачає необхідність рішення двох взаємопов'язаних задач: структурної, параметричної ідентифікації. Перша з них передбачає: 1) визначення значущих чинників, які впливають на вихідні дані моделі; 2) визначення структури, тобто виду оператора, який встановлює зв'язок між вхідними та вихідними даними моделі. Друга задача полягає у визначенні конкретних кількісних значень параметрів моделі.

Усі локальні критерії описують різні властивості об'єкта дослідження, його елементи і відношення, і в загальному випадку мають різну розмірність, важливість, інтервали і шкали вимірювання. У результаті стоїть проблема синтезу функції корисності, яка грає роль моделі оцінювання ПР ПЗ

$$\bar{F}(X) = \hat{F}\left(J\{\alpha_j\}, \{f_i(X), i \in \bar{P}\}\right)$$

і потребує рішення наступних задач:

1) нормалізації, тобто приведення до ізоморфного виду всіх локальних критеріїв $f_i(X)$; 2) визначення структури моделі, тобто ідентифікації виду оператора \hat{F} ; 3) розробки методів параметричної ідентифікації моделі, тобто методів отримання від особи, що приймає рішення інформації про коефіцієнти взаємної важливості $J\{\alpha_j\}$ локальних критеріїв $f_i(X)$.

Синтез функції корисності ПР ПЗ на основі еталонної моделі SPICE. Перейдемо безпосередньо від загального підходу до формування функції корисності оцінки ПР ПЗ IT-компаній до її побудови на основі еталонної моделі зрілості SPICE. Будемо вважати, що функція корисності дорівнює одиниці, коли ПР ПЗ використовує всі процеси моделі SPICE і

кожний з них має максимальний рівень можливості, який дорівнює п'яти балам. Ієрархічну структуру критеріїв, на основі якої пропонується формувати функцію корисності, наведено на рис. 1.

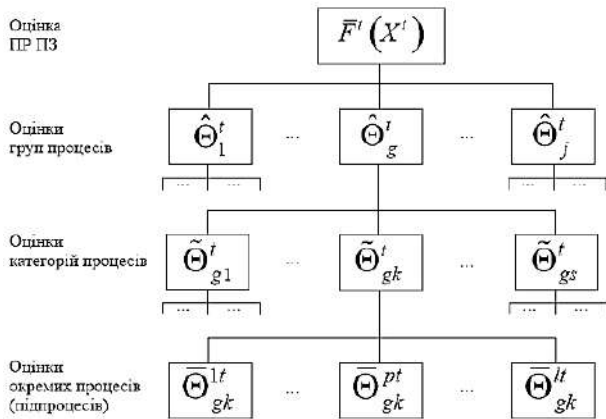


Рис. 1. Ієрархічна структура критеріїв

Перший рівень ієрархії відповідає фокусу проблеми, а саме функції корисності всього ПР ПЗ ІТ-компанії. На другому рівні знаходяться групи процесів еталонної моделі SPICE, на третьому рівні – категорії процесів, а на четвертому безпосередньо критерії, яким відповідають окремі процеси (підпроцеси). Як було підкреслено вище, кожний процес може мати рівень можливості в бальній шкалі від 1 до 5 залежно від оцінок його атрибутів. Перейдемо до розгляду питання представлення локальних критеріїв у ізоморфному виді в межах від 0 до 1. На рис. 1 вся множина критеріїв $\{f_i(X), i \in \bar{P}\}$ представлена як ієрархія, на основі якої, як це було підкреслено вище, визначається структура моделі. У роботі [12] для кожного процесу (підпроцесу) на плановому підперіоді t введено змінні $\Theta_{gk}^{pt}(\gamma) \in (0,1]$, які визначають рівень досягнення γ рівня можливості p -го процесу, який належить k -й категорії g -ї групи процесів еталонної моделі SPICE. Наприклад, якщо $\gamma = 1$ і $\Theta_{gk}^{pt}(1) = 1$, це означає, що процес має рівень можливості одиниця. Рівень можливості два він досягає, коли $\Theta_{gk}^{pt}(2) = 1$ і далі рівень можливості п'ять означає, що $\Theta_{gk}^{pt}(5) = 1$. Пропонується перетворення бальної шкали критеріїв у ізоморфну шкалу, де значення критеріїв належать інтервалу $(0,1]$. Для цього введемо таке перетворення

$$\bar{\Theta}_{gk}^{pt} = \prod_{\gamma=1}^5 \Theta_{gk}^{pt}(\gamma).$$

У цьому випадку, якщо $\Theta_{gk}^{pt}(1) = \Theta_{gk}^{pt}(2) = \dots = \Theta_{gk}^{pt}(5) = 1$, то $\bar{\Theta}_{gk}^{pt} = 1$.

На основі метода парних порівнянь Сааті визначаються вагові коефіцієнти важливості $\{\bar{\rho}_{gk}^p, p \in P_{gk}\}$, де $k \in K_g, g \in G$, які задовольняють умові

$$\bar{\rho}_{gk}^p > 0 \forall p \in P_{gk}; \sum_{p \in P_{gk}} \bar{\rho}_{gk}^p = 1.$$

Вагові коефіцієнти $\{\bar{\rho}_{gk}, k \in K_g\}$ також визначаються на основі метода парних порівнянь Сааті, де $g \in G$. Вони задовольняють умові

$$\bar{\rho}_{gk} > 0 \forall k \in K_g; \sum_{k \in K_g} \bar{\rho}_{gk} = 1.$$

Вагові коефіцієнти $\{\tilde{\rho}_g, g \in G\}$ визначають важливості окремих груп процесів еталонної моделі SPICE, визначаються аналогічно тим, які розглянуто вище, і задовольняють умові

$$\tilde{\rho}_g > 0 \forall g \in G; \sum_{g \in G} \tilde{\rho}_g = 1.$$

Тоді функція корисності на t -му підперіоді планування визначається у такий спосіб

$$\bar{F}^t(X^t) = \sum_{g \in G} \tilde{\rho}_g \sum_{k \in K_g} \bar{\rho}_{gk} \sum_{p \in P_{gk}} \bar{\rho}_{gk}^p \cdot \bar{\Theta}_{gk}^{pt}.$$

Однією з основних задач нашого дослідження є розробка раціональної стратегії просування ПР ПЗ ІТ-компанії до більш високого рівня якості (зрілості) за рахунок використання різного роду ресурсів (фінансові, людські і т. ін.). Тому будемо використовувати фундаментальну властивість систем [14], згідно з якою залежність зростання корисності (якості, зрілості) будь-якої складної системи від використаних ресурсів на всьому інтервалі життєвого циклу може бути описана деякою логістичною кривою, яка має S-образний характер (рис. 2). Відповідно до рисунку 2 область зміни функції корисності можна поділити на три інтервали. Перший інтервал $[0, L_1]$, на якому залежно від виділених ресурсів якість ПР ПЗ зростає доволі повільно і ми маємо функцію корисності опуклу донизу. Другий інтервал належить відрізку $[L_1, L_2]$ і функція корисності ближче за все відповідає лінійній залежності. Третій інтервал – це відрізок $[L_2, 1]$. Він відповідає опуклій вгору монотонній залежності від виділених ресурсів. Корисності, яка дорівнює одиниці, відповідає ПР ПЗ, який має в своєму розпорядженні всі процеси з максимальним рівнем можливості, який дорівнює 5 балам.

Перейдемо до розгляду питання формування функції корисності залежно від ресурсів, які направлені на зростання її рівня та виявлення відповідних цим ресурсам конкретних процесів і їх рівнів можливості. Будемо розглядати це питання з урахуванням того, що функція корисності формується для конкретної ІТ-компанії з відповідними характеристиками. Експерти можуть зіставити характеристики процесів моделі SPICE і характеристики ІТ-компанії з погляду важливості процесів моделі для зростання рівня зрілості ПР ПЗ. Ця інформація від експертів надається аналітикам (особам, що формують рішення – ОФР, рис. 2), які розташовують процеси у чергу залежно від важливості з урахуванням тренду зміни функції корисності (як логістичної кривої).

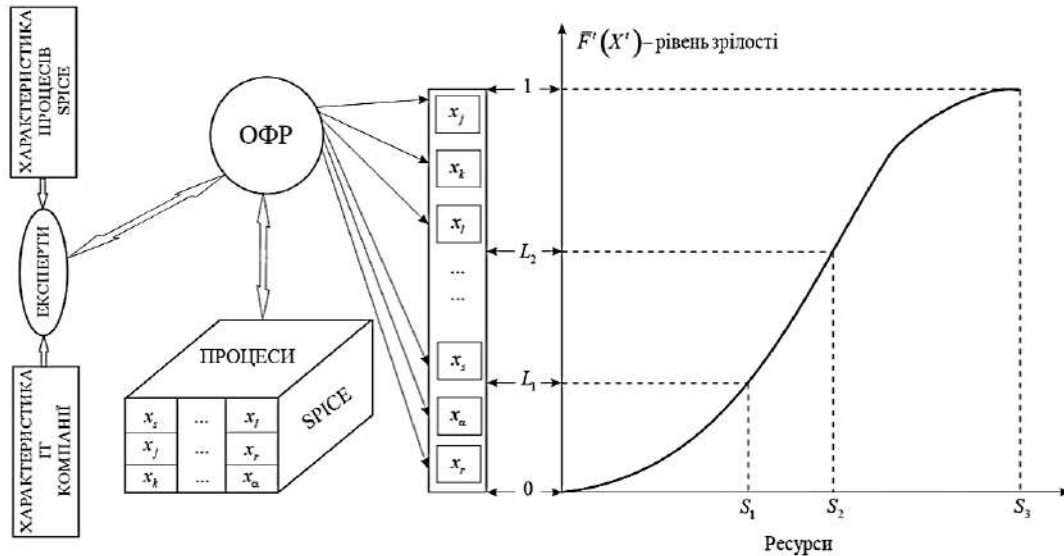


Рис. 2. Синтез функції корисності процесу розробки програмного забезпечення ІТ-компанії на основі еталонної моделі SPICE

Висновки, шляхи подальших досліджень. У роботі підкреслено, що об'єктом дослідження є ПР ПЗ і успіх розробки ПЗ безпосередньо залежить від його якості. Базовими для покращення якості ПР ПЗ виділені моделі зрілості CMMI та SPICE, які базуються на використанні бальних шкал першого типу. Такі шкали мають загальноприйнятні еталони, яким відповідають градації шкали. Тому оцінки експертів є деякими флуктуаціями еталонних значень. Підкреслені вади дискретної моделі CMMI, які пов'язані з відсутністю урахування особливостей ПР ПЗ ІТ-компанії. Тому запропоновано врахувати ці вади завдяки побудові дискретної моделі SPICE INT на основі синтезу функції корисності еталонної моделі SPICE, основні принципи побудови якої запропоновані у роботі.

Подальші дослідження будуть присвячені вирішенню наступних проблем:

- на основі зіставлення характеристик ІТ-компанії та окремих процесів еталонної моделі SPICE розробка технології упорядкування процесів з погляду їх важливості для підняття рівня зрілості ПР ПЗ;
- формування експертних оцінок необхідних фінансових витрат на підняття рівня володіння окремих практик відповідними рисами атрибутів;
- визначення важливості окремих практик в межах процесу, якому вони належать;
- на основі необхідних фінансових витрат на підняття рівня можливості окремих процесів і тренду зміни функції корисності (рис. 2) визначення необхідних рівнів можливості окремих процесів залежно від рівня покращення функції корисності;
- визначення кількості рівнів зрілості дискретної моделі SPICE INT;
- визначення конкретних процесів моделі SPICE, які повинні розглядатися на кожному рівні зрілості.

Список літератури

1. Madachy R. J. *Software process dynamics*. Hoboken, NJ: IEEE Press, Wiley Interscience, 2008. 601 p.
2. Li T. *An Approach to Modelling Software Evolution Processes*. Berlin–Heidelberg: Springer, 2008. 213 p.
3. Chrissis M. B., Konrad M., Shrum S. *CMMI: Guidelines for Process Integration and Product Improvement*. Addison–Wesley, 2003. 688 p.
4. Ahern D. M., Clouse A., Turner R. *CMMI Distilled: A Practical Introduction to Integrated Process Improvement*. Addison–Wesley, 2008. 288 p.
5. Оценка и аттестация зрелости процессов создания и сопровождения программных средств и информационных систем (ISO/IEC TR 15504-CMM). Москва: Книга и бизнес, 2001. 348 с.
6. Годлевский М. Д., Гончаренко Т. С., Бурлаков Г. О., Малец Д. К. Шляхи підвищення якості процесу розробки програмного забезпечення на основі моделей зрілості. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. Харків: НТУ «ХПІ», 2019. № 2. С. 63–69.
7. Годлевский М. Д., Шеховцов В. А., Брагинский И. Л. Принципы моделирования оценки и управления качеством процесса разработки программного обеспечения. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. Харьков, 2012. № 5/3 (59). С. 45–49.
8. Годлевский М. Д., Брагинский И. Л. Динамическая модель и алгоритм управления качеством процесса разработки программных систем на основе модели зрелости. *Проблемы информационных технологий*. Херсон: ОЛДИ-Плюс, 2012. С. 6–13.
9. Годлевский М. Д., Голоскокова А. А. Синтез статических моделей планирования улучшения качества процесса разработки программного обеспечения. *Східно-Європейський журнал передових технологій*. Харків: Технологічний центр, 2015, № 3/2 (75). С. 23–29.
10. Godlevskiy M. D., Goloskokova A. A., Chipizhenko A. A. Medium-term planning information technology for quality improvement of the software development process based on the CMMI model. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології*. Харків: НТУ «ХПІ», 2017. № 51 (1272). С. 32–37.
11. Godlevskiy M. D., Goloskokova A. A., Bielous O. S. Information technology of a static model solving for quality improvement of the software development process based on the CMMI model. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та*

- інформаційні технології. Харків: НТУ «ХПІ», 2017. № 55 (1276). С. 26–30.
12. Годлевський М. Д., Голоскокова А. О., Бурлаков Г. О. Динамічна модель планування розвитку підмножини процесів еталонної моделі зрілості SPICE. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології*. Харків: НТУ «ХПІ», 2020. № 2 (4). С. 10–16.
 13. Фишберн П. *Теория полезности принятия решений*. Москва: Наука, 1978. 352 с.
 14. Саркисян С. А., Ахунов В. М., Минаев Э. С. *Большие технические системы. Анализ и прогноз развития*. Москва: Наука, 1977. 350 с.
- References (transliterated)**
1. Madachy R. J. *Software process dynamics*. Hoboken, NJ, IEEE Press, Wiley Interscience, 2008. 601 p.
 2. Li T. *An Approach to Modelling Software Evolution Processes*. Berlin–Heidelberg, Springer, 2008. 213 p.
 3. Chrissis M. B., Konrad M., Shrum S. *CMMI: Guidelines for Process Integration and Product Improvement*. Addison–Wesley, 2003. 688 p.
 4. Ahern D. M., Clouse A., Turner R. *CMMI Distilled: A Practical Introduction to Integrated Process Improvement*. Addison–Wesley, 2008. 288 p.
 5. *Otsenka i attestatsiya zrelosti protsessov sozdaniya i soprovozhdeniya programnykh sredstv i informatsionnykh sistem (ISO/IEC TR 15504-CMM)*. [Assessment and certification of the maturity of the processes of creating and maintaining software tools and information systems (ISO/IEC TR 15504-CMM)]. Moscow, Kniga i biznes Publ., 2001. 348 p.
 6. Godlevskiy M. D., Goncharenko T. Ye., Burlakov H. O., Malets D. K. Shlyakhy pidvyshchennya yakosti protsesu rozrobky programnoho zabezpechennya na osnovi modeley zrilosti [Ways to improve the quality of the software development process based on maturity models]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu "KhPI". Seriya: Systemnyy analiz, upravlinnya ta informatsiyni tekhnolohiyi* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: System analysis, control and information technology]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2019. no. 2. pp. 63–69.
 7. Godlevskiy M. D., Shekhovtsov V. A., Brahynskyy Y. L. Pryntsypy modelyrovannya otsenky u upravlenyya kachestvom protsessu razrobotky programnoho obespechennya [Principles of modeling evaluation and quality management of the software development process]. *Vostochno-Evropeyskyy zhurnal peredovykh tekhnolohiy* [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies]. Khar'kov, 2012, no. 5/3 (59), pp. 45–49.
 8. Godlevskiy M. D., Brahynskyy Y. L. Dynamicheskaya model' y alhorytm upravlenyya kachestvom protsessu razrobotky programmnnykh system na osnove modely zrelosti [Dynamic model and algorithm for quality management of the software systems development process based on the maturity model]. *Problemy ynfarmatsyonnykh tekhnolohyy* [Information Technology Issues]. Kherson, OLDY-Plyus Publ., 2012, pp. 6–13.
 9. Godlevskiy M. D., Goloskokova A. A. Sintez staticheskyykh modelei planirovaniya uluchsheniya kachestva protsessu razrobotky programnoho obespechennya [Synthesis of static planning models for improving the quality of the software development process]. *Vostochno-Evropeyskyy zhurnal peredovykh tekhnolohyy* [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies]. Kharkiv, Technology Tsentrl Publ., 2015, no. 3/2 (75), pp. 23–29.
 10. Godlevskiy M. D., Goloskokova A. A., Chipizhenko A. A. Medium-term planning information technology for quality improvement of the software development process based on the CMMI model. *Visnyk NTU "KhPI": zb. nauk. pr. Seriya: Sy'stemny'j analiz, upravlinnya ta informatsiyni tekhnolohiyi*. [Bulletin of NTU "KhPI". Series: System analysis, control and information technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2017, no. 51 (1272), pp. 32–37.
 11. Godlevskiy M. D., Goloskokova A. A., Bielous O. S. Information technology of a static model solving for quality improvement of the software development process based on the CMMI model. *Visnyk NTU "KhPI": zb. nauk. pr. Seriya: Sy'stemny'j analiz, upravlinnya ta informatsiyni tekhnolohiyi*. [Bulletin of NTU "KhPI". Series: System analysis, control and information technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2017, no. 55 (1276), pp. 26–30.
 12. Godlevskiy M. D., Goloskokova A. A., Burlakov G. O. Dinamichna model planuvannya rozvitku pidmnozhini protsesiv etalonnoyi modeli zrilosti SPICE [A dynamic model for development planning of process subsets for the SPICE reference maturity model]. *Visnyk NTU "KhPI": zb. nauk. pr. Seriya: Sy'stemny'j analiz, upravlinnya ta informatsiyni tekhnolohiyi*. [Bulletin of NTU "KhPI". Series: System analysis, control and information technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2020, no. 2 (4), pp. 10–16.
 13. Fishern P. *Teoriya poleznosti prinjatija reshenij* [Decision utility theory]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 352 p.
 14. Sarkisjan S. A., Ahudnov V. M., Minaev Je. S. *Bol'shie tekhnicheskie sistemy. Analiz i prognoz razvitija* [Large technical systems. Analysis and development forecast]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 350 p.

Надійшло (received) 25.10.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Годлевський Михайло Дмитрович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», директор інституту комп'ютерних наук і інформаційних технологій; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2872-0598>; e-mail: god_asu@kpi.kharkov.ua,

Малець Дмитро Костянтинович – Technorely Inc., головний виконуючий директор; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1980-1401>; e-mail: dmitriy@technorely.com.

Godlevskiy Mykhaylo Dmytrovych – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Director of the Institute of Computer Science and Information Technology; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2872-0598>; e-mail: god_asu@kpi.kharkov.ua.

Malets Dmytro Kostyantynovych – Technorely Inc Chief Executive Officer; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1980-1401>; e-mail: dmitriy@technorely.com.

N. V. GYBKINA, M. V. SIDOROV, H. V. STADNIKOVA

MATHEMATICAL MODELING OF THE QUASI-STATIONARY PROCESSES OF VISCOUS MIXTURE MIXING IN A RECTANGULAR AREA BY THE R-FUNCTIONS METHOD

Mixing processes are found in the chemical, pharmaceutical and food industries. Fluid mixing is one of the fundamental scientific problems associated with modern concepts of regular and chaotic dynamics. The paper considers the problem of mathematical modeling of the quasi-stationary process of mixing a viscous mixture. This problem consists of two sub-problems: determination of the velocity field in the flow region (Eulerian formalism) and investigation of the trajectories of individual fluid particles (Lagrange formalism). To solve the first subproblem, it is proposed to jointly use the principle of superposition, the structural method (method of R-functions) and the Ritz variational method. The methods of nonlinear dynamics and qualitative theory of differential equations are used to solve the second subproblem. A plane quasi-steady flow is considered in a rectangular region and it is assumed that the side walls are at rest, and the upper and lower walls move alternately according to the given laws. According to the method of R-functions, the structures of the solutions were built and the use of the Ritz variational method for the approximation of the uncertain components of the structures was justified. The operation of the proposed method is illustrated by the results of a computational experiment, which was conducted for different modes of wall motion. The practical interest of the considered regimes is due to the fact that they lead to the emergence of chaotic behavior when mixing occurs most efficiently. Using the methods of nonlinear dynamics, the location of periodic (hyperbolic and elliptical) points was investigated and the Poincaré section was constructed. Further research with the help of the method proposed in the work can be related to the consideration of flows in more geometrically complex regions and more complex mixing regimes, as well as in the application to the calculation of industrial problems.

Keywords: viscous fluid quasi-stationary flow, mixing flow, stream function, R-functions method, Ritz method, periodic points

Н. В. ГИБКІНА, М. В. СИДОРОВ, Г. В. СТАДНІКОВА

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КВАЗІСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕМІШУВАННЯ В'ЯЗКОЇ СУМІШІ У ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ

Процеси перемішування зустрічаються в хімічній, фармацевтичній та харчовій промисловостях. Перемішування рідини є однією з фундаментальних наукових проблем, пов'язаних з сучасними концепціями регулярної та хаотичної динаміки. У роботі розглянуто задачу математичного моделювання квазістаціонарного процесу перемішування в'язкої суміші. Ця задача складається з двох підзадач: визначення поля швидкостей в області течії (формалізм Ейлера) та дослідження траєкторій окремих частинок рідини (формалізм Лагранжа). Для розв'язання першої підзадачі пропонується сумісно використати принцип суперпозиції, структурний метод (метод R-функцій) та варіаційний метод Рітца. Для розв'язання другої підзадачі використовуються методи нелінійної динаміки та якісної теорії диференціальних рівнянь. Плоска квазістаціонарна течія розглядається в прямокутній області і вважається, що бічні стінки перебувають у стані спокою, а верхня та нижня стінки рухаються по черзі за заданими законами. Відповідно до методу R-функцій побудовано структури розв'язків та обґрунтовано застосування для апроксимації невизначених компонент структур варіаційний метод Рітца. Роботу запропонованого методу проілюстровано результатами обчислювального експерименту, який було проведено для різних режимів руху стінок. Прикладний інтерес розглянутих режимів обумовлений тим, що вони призводять до виникнення хаотичної поведінки, коли перемішування відбувається найбільш ефективно. Методами нелінійної динаміки досліджено розташування періодичних (гіперболічних та еліптичних) точок та побудовано переріз Пуанкаре. Подальші дослідження за допомогою запропонованого у роботі методу можуть бути пов'язані з розглядом течій у більш геометрично складних областях та більш складних режимів перемішування, а також у застосуванні до розрахунку промислових задач.

Ключові слова: квазістаціонарна течія в'язкої рідини, перемішування, функція течії, метод R-функцій, метод Рітца, періодичні точки

Introduction. Mathematical modeling of viscous flows is widely used in investigation of mixing processes in chemical, pharmaceutical and food industries, etc. [1–3]. On the other hand, the problem of liquids mixing research is a fundamental scientific problem associated with chaotic dynamics [2–5]. There are several methods that are used for numerical simulation of these processes. But they do not have the universality property and can be only used to investigate processes in geometrically simple areas. In particular, in J. M. Ottino, H. Aref, V.V. Meleshko, T.A. Dunaeva, T.S. Krasnopolskaya [1, 6–8] and others works, the mixing problem was solved in a circle, a semicircle and a circular sector, etc. The methods proposed in these works cannot be applied to studying of mixing processes in more complex areas.

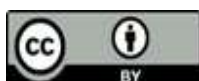
The geometric information included in the problem formulation can be taken into account accurately. This can be achieved by the usage of the constructive apparatus of the R-functions theory. The theory was proposed by V.L.

Rvachev, Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine [9]. Thus, it is a relevant scientific problem to develop new methods of numerical analysis of mixing processes based on the application of the R-functions theory. For instance, the R-functions method was applied to study the viscous fluid flows in [10–14]. This work continues the research initiated in [15, 16].

Problem statement. Let's consider a flat quasi-stationary flow of viscous incompressible fluid that fills Ω , the inside of a rectangle $\bar{\Omega} = [0, a] \times [0, b]$. We assume that the side walls $\bar{\Omega}$ are at rest and the top and bottom walls take turns move with speeds $\mathbf{v}_{\text{top}}(t) = (v_{\text{top}}(t), 0)$ and $\mathbf{v}_{\text{bot}}(t) = (v_{\text{bot}}(t), 0)$, respectively. Fig. 1 illustrates the scheme of such flow.

To solve the first part of the mixing problem we need to obtain the velocity field (v_x, v_y) in the flow area Ω . Let's assume that the considered flow is creeping. Then the

© N. V. Gybkina, M. V. Sidorov, H. V. Stadnikova, 2022



Research Article: This article was published by the publishing house of NTU "KhPI" in the collection "Bulletin of the National Technical University "KhPI" Series: System analysis, management and information technologies." This article is distributed under a Creative Commons [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Conflict of Interest:** The author/s declared no conflict of interest.



nonlinear terms in the Navier – Stokes system of equations can be neglected and the flow can be described using the Stokes approximation [17].

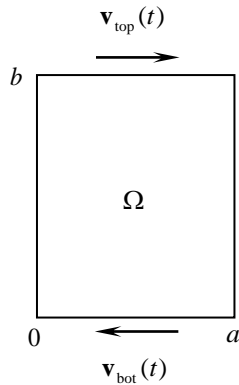


Fig. 1. Flow scheme

It is convenient to describe plane flows using the stream function $\psi(x, y, t)$ associated with the components of the velocity vector (v_x, v_y) by the relations [17]

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Under such conditions, we can set the following boundary-value problem for the stream function $\psi(x, y, t)$ in the Stokes approximation:

$$\Delta^2 \psi = 0 \text{ in } \Omega, \tag{1}$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} -v_{\text{top}}(t), & (x, y) \in \partial\Omega_1 = \{y = b\}, \\ v_{\text{bot}}(t), & (x, y) \in \partial\Omega_3 = \{y = 0\}, \\ 0, & (x, y) \in \partial\Omega_2 = \{x = 0\} \cup \\ & \cup \partial\Omega_4 = \{x = a\}, \end{cases} \tag{2}$$

where \mathbf{n} – is the external normal to the boundary $\partial\Omega$ of the flow area Ω ;

Δ^2 – biharmonic operator,

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

The solution of the second part consists of solving the initial problem for the equations system of Lagrangian particle motion:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y}, \quad \dot{y}(t) = -\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}, \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \tag{4}$$

and constructing and analyzing the motion trajectories.

Basic Information on R-Function Theory. Let's consider the basics of the R-functions theory and the general application scheme of this theory methods in

mathematical modeling of physical and mechanical fields [9].

A function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is called the R-function that corresponds to the three gradations partition of the set $\mathfrak{X} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$$S_3^{-1}(0) = \mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0), \quad S_3^{-1}(1) = \mathfrak{X}(1) = \{0\},$$

$$S_3^{-1}(2) = \mathfrak{X}(2) = (0, +\infty),$$

if such a three-valued logic function $Y = F(X_1, \dots, X_n)$ exists, that

$$S_3[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S_3(x_1), \dots, S_3(x_n)], \tag{5}$$

where

$$S_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t = 0, \\ 2, & t > 0. \end{cases}$$

The three-valued logic function F that satisfies condition (5) is called accompanying for R-function f .

Thus, the definition (5) points out a functions class among the continuous argument functions. They have properties of the logic algebra functions (a discrete argument functions). In the R-functions theory, it is proved that this class has a nonempty intersection with the set of elementary functions. One of the most used in practical applications is the following R-functions system

$$\bar{\sigma} \equiv -\sigma; \quad \sigma_1 \wedge_0 \sigma_2 \equiv \sigma_1 + \sigma_2 - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2};$$

$$\sigma_1 \vee_0 \sigma_2 \equiv \sigma_1 + \sigma_2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \tag{6}$$

Accompanying functions for the R-functions of system (6) are three-valued negation, disjunction, and conjunction, respectively.

The application of the R-functions is primarily associated with an analytical description of geometric objects (solving the inverse problem of analytic geometry). It is also used to form structures for solving boundary value problems of mathematical physics (structural method).

One can describe an application scheme for the R-functions theory apparatus to solve the inverse problem of analytic geometry in the plane. Let a geometric object $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be constructed from support sets $\Sigma_i = (\sigma_i(x, y) \geq 0)$, $i = 1, \dots, m$, using algebra of logic operations $-, \wedge, \vee$ in this form

$$\Omega = F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m). \tag{7}$$

We assume that $\sigma_i(x, y)$, $i = 1, \dots, m$, are simple continuous (elementary) functions, i.e. at the same time $\sigma_i(x, y) = 0$ is the boundary of sets $\sigma_i(x, y) \geq 0$ and $\sigma_i(x, y) > 0$. If in (7) we carry out a formal substitution for set Ω with $\omega(x, y)$, Σ_i with $\sigma_i(x, y)$, and the logic algebra symbols $-, \wedge, \vee$ with the corresponding R-functions symbols, we obtain an elementary function $\omega(x, y)$ in the

form of a single analytical expression that is equal to zero on the boundary $\partial\Omega$. Moreover, the inequality $\omega(x, y) > 0$ is true for the internal points Ω .

Thus, the implicit equation $\omega(x, y) = 0$ defines the locus, which is the boundary of Ω .

Also, this function $\omega(x, y)$ can be subordinated to the normalization conditions:

$$\omega(x, y) = 0 \text{ at } \partial\Omega; \omega(x, y) > 0 \text{ in } \Omega;$$

$$\left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1, \tag{8}$$

where \mathbf{n} – external normal to $\partial\Omega$.

For boundary-value and initial-boundary-value problems of mathematical physics, the R-function method allows to construct general structures for solving. These structures are bundles of functions that exactly satisfy all the boundary conditions of the problem.

The application of the R-functions structural method for the numerical study of physical-mechanical fields consists of the following steps:

1) an exact analytical geometric description of the area Ω in which the field is considered, i.e. the construction of a function $\omega(x, y)$ with properties (8);

2) continuation of the boundary conditions into the area, i.e. until the functions and operators become defined on the boundary at internal points of the area Ω ;

3) the construction of the general solution structure, i.e. such formula that depends on one or more indefinite functions and which, with any choice, exactly satisfies all boundary problem conditions;

4) the construction of an approximate solution, i.e. the approximation of the indeterminate components of the structure by some numerical method (grid method, Ritz method, Galerkin method, etc.).

The following two approaches are the most common ways to extend the boundary conditions within the area [9].

Let the function φ_0 at the points $\partial\Omega$ be defined as composite like this

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} \varphi_0^{(1)}(s), & s \in \partial\Omega_1, \\ \dots & \dots \\ \varphi_0^{(r)}(s), & s \in \partial\Omega_r, \end{cases}$$

where the border sections $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_r$ are pairwise different, they do not have common internal points and $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_r$.

If functions $\varphi_i(x, y)$, $i = 1, \dots, r$, are such that $\varphi_i|_{\partial\Omega_i} = \varphi_0^{(i)}$, and $\omega_i(x, y)$, $i = 1, \dots, r$, such that $\omega_i(x, y) = 0$ at $\partial\Omega_i$ and $\omega_i(x, y) > 0$ in $\Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_i)$, then the function

$$\varphi = \frac{\varphi_1\omega_2\omega_3\dots\omega_r + \varphi_2\omega_1\omega_3\dots\omega_r + \dots + \varphi_r\omega_1\omega_2\dots\omega_{r-1}}{\omega_2\omega_3\dots\omega_r + \omega_1\omega_3\dots\omega_r + \dots + \omega_1\omega_2\dots\omega_{r-1}} \tag{9}$$

has a property $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$. We will mark this continuation as EC $\varphi_0 = \varphi$.

The second approach is connected to the continuation of the differential operators into the area Ω . These operators are defined on the boundary $\partial\Omega$. Let $\omega(x, y) = 0$ be the normalized equation of the boundary $\partial\Omega$ of the area Ω (i.e. the function $\omega(x, y)$ satisfies conditions (8)). Then the operator D_1 , that behaves according to the rule

$$D_1u \equiv \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{10}$$

at regular points of $\partial\Omega$ satisfies the equality

$$-D_1u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}},$$

where \mathbf{n} – external normal to $\partial\Omega$. The expression D_1u makes sense everywhere in $\Omega \cup \partial\Omega$.

In particular [10], the structure of the problem solution

$$\Delta^2 u = F \text{ in } \Omega, \tag{11}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \left. \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega, \tag{12}$$

can be represented as follows

$$u = f - \omega(D_1f + g) + \omega^2\Phi, \tag{13}$$

where $f = EC \tilde{f}$ and $g = EC \tilde{g}$ – are extensions of functions \tilde{f} and \tilde{g} in Ω which are constructed using formula (9);

the operator D_1 is determined by equality (10);

Φ is the indefinite component of the structure, and the function $\omega(x, y)$ satisfies conditions (8).

Method of Numerical Analysis of Quasi-Stationary Viscous Fluid. In accordance with the principle of superposition, the solution of problem (1), (2) is represented in the form

$$\psi(x, y, t) = -v_{\text{top}}(t)\psi_1(x, y) + v_{\text{bot}}(t)\psi_2(x, y), \tag{14}$$

where $\psi_1(x, y)$ – is the solution of the problem

$$\Delta^2 \psi_1 = 0 \text{ in } \Omega, \tag{15}$$

$$\psi_1|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \partial\Omega_1, \\ 0, & (x, y) \in \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4, \end{cases} \tag{16}$$

and $\psi_2(x, y)$ – is the solution of the problem

$$\Delta^2 \psi_2 = 0 \text{ in } \Omega, \tag{17}$$

$$\psi_2|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \partial \Omega_3, \\ 0, & (x, y) \in \partial \Omega_1 \cup \partial \Omega_2 \cup \partial \Omega_4. \end{cases} \quad (18)$$

To solve problems (15), (16) and (17), (18), we use the R-functions method and Ritz method.

Let's introduce the following functions

$$\omega_1 = b - y, \quad \omega_2 = x, \quad \omega_3 = y, \quad \omega_4 = a - x.$$

Each of these functions $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4$, has properties:

- 1) $\omega_i = 0$ at $\partial \Omega_i$;
- 2) $\omega_i > 0$ in $\Omega \cup (\partial \Omega \setminus \partial \Omega_i)$;
- 3) $\frac{\partial \omega_i}{\partial \mathbf{n}} = -1$ at $\partial \Omega_i$, \mathbf{n} – external normal to $\partial \Omega_i$.

Then the function

$$\omega = \left[\frac{1}{a} x(a - x) \right] \wedge_0 \left[\frac{1}{b} y(b - y) \right], \quad (19)$$

where \wedge_0 – the R-conjunction sign, satisfies the conditions (8).

Each of problems (15), (16) and (17), (18) can be reduced to the form (11), (12) if (according to (9)) we choose

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

$$g_1 = \frac{\omega_2 \wedge_0 \omega_3 \wedge_0 \omega_4}{\omega_1 + \omega_2 \wedge_0 \omega_3 \wedge_0 \omega_4}, \quad g_2 = \frac{\omega_1 \wedge_0 \omega_2 \wedge_0 \omega_4}{\omega_3 + \omega_1 \wedge_0 \omega_2 \wedge_0 \omega_4}.$$

Then by formula (13) we obtain the solution structures for the problems (15), (16) and (17), (18) in the form

$$\psi_i = -\omega g_i + \omega^2 \Phi_i, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

where the function ω is (19);

Φ_1, Φ_2 are the indeterminate components of the structures.

To approximate the indeterminate components in (20) we use Ritz's variational method [18]. To do this, in problems (15), (16), and (17), (18) we first make substitutions

$$\psi_i = h_i + u_i, \quad (21)$$

where $h_i = -\omega g_i$, $u_i = \omega^2 \Phi_i$ – new functions we are looking for, $i = 1, 2$. Substituting (21) into (15), (16), and (17), (18) for functions u_i , $i = 1, 2$, we obtain problems with homogeneous boundary conditions:

$$\Delta^2 u_i = -\Delta^2 h_i \text{ in } \Omega, \quad (22)$$

$$u_i \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (23)$$

We consider boundary value problems (22), (23) in Hilbert space $L_2(\Omega)$. We will associate each of these problems with an operator $A = \Delta^2$ at the function definition area

$$D_A = \left\{ u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), u \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \right\} \subset L_2(\Omega).$$

The operator A defined in this way is symmetric and positively defined. If we close the set D_A in the norm generated by the scalar product

$$[u, v] = \iint_{\Omega} \Delta u \Delta v dx dy,$$

then we get the energy space H_A . Then, by the theorem on the energy functional [18] (provided that $\Delta h_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2$) the generalized solution of problems (22), (23) is

$$u_i = \arg \inf_{u \in H_A} \iint_{\Omega} [(\Delta u)^2 + 2\Delta u \Delta h_i] dx dy, \quad i = 1, 2.$$

According to the Ritz method [18], approximate solutions of these variational problems will be sought in the form

$$u_i = \omega^2 \Phi_i \approx u_{i,N} = \omega^2 \Phi_{i,N} = \omega^2 \sum_{k=1}^N c_k^{(i)} \tau_k = \sum_{k=1}^N c_k^{(i)} \varphi_k,$$

where $i = 1, 2$, $\{\tau_k\}$ – any complete in $L_2(\Omega)$ system of functions (degree or trigonometric polynomials, splines, etc.), $\varphi_k = \omega^2 \tau_k$.

The sequence $\{\varphi_k\}$ is coordinate because

- 1) $\varphi_j \in D_A$ for anyone j ;
- 2) $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ linearly independent for each N ;
- 3) the system $\{\varphi_j\}$ is full in space H_A .

To determine the unknown numbers $c_1^{(i)}, \dots, c_N^{(i)}$, $i = 1, 2$, it is necessary to solve the Ritz system

$$\sum_{k=1}^N [\varphi_k, \varphi_j] c_k^{(i)} = -(\Delta h_i, \Delta \varphi_j), \quad (24)$$

$$j = 1, \dots, N, \quad i = 1, 2,$$

where

$$[\varphi_k, \varphi_j] = \iint_{\Omega} \Delta \varphi_k \Delta \varphi_j dx dy, \quad k, j = 1, \dots, N,$$

$$(\Delta h_i, \Delta \varphi_j) = \iint_{\Omega} \Delta h_i \Delta \varphi_j dx dy, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 1, 2.$$

The matrices of systems (24) are independent of i and can be calculated once, when we solve problems (22), (23). In addition, these matrices are symmetric, which also reduces the amount of computation.

It follows from the Ritz method convergence theorem [18] that the sequences of functions $u_{i,N}$, $i = 1, 2$, $N \rightarrow \infty$, converge to the unique generalized solutions of boundary value problems (22), (23) in both norms $L_2(\Omega)$ and H_A . Then the sequences of functions $\psi_{i,N} = h_i + u_{i,N}$, $i = 1, 2$, converge in norm $L_2(\Omega)$ to the unique generalized solutions of problems (15), (16) and (17), (18) and the sequence of functions

$$\psi_N(x, y, t) = -v_{top}(t)\psi_{1,N}(x, y) + v_{bot}(t)\psi_{2,N}(x, y)$$

converges to the unique generalized solution of the original problem (1), (2).

So the first part of the mixing problem is solved.

To solve the second part of the mixing problem we need to study the methods of qualitative theory of differential equations of the initial problem

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \psi_N(x, y, t)}{\partial y}, \quad \dot{y}(t) = -\frac{\partial \psi_N(x, y, t)}{\partial x}, \quad (25)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad (26)$$

that describes the behavior of individual fluid particles (markers).

In considered problem (25), (26), it is necessary to find the periodic points of system (25), find out their nature, study the behavior of phase trajectories, etc. [5].

Results. The computational experiment was performed for a rectangular area for different ratios $a : b$ and for different movement modes of the top and bottom walls. The integrals in system (24) were numerically calculated using a Gaussian cubic formula. The fifth-degree Schönberg splines for the system $\{\tau_k\}$ were chosen. Two quasi-stationary modes (T – period) were considered:

– mode A: alternately at time intervals $\left[kT; \frac{T}{2} + kT \right]$,

$\left[\frac{T}{2} + kT; T + kT \right]$, $k \in \mathbb{N}$, the top and bottom walls move respectively at regular intervals in opposite directions at constant speeds;

– mode B: the top wall moves at the time interval $\left[kT - \varepsilon; \frac{T}{2} + \varepsilon + kT \right]$, $k \in \mathbb{N}$, and the bottom wall moves in the opposite direction at the time interval $\left[\frac{T}{2} - \varepsilon + kT; T + kT + \varepsilon \right]$, $k \in \mathbb{N}$ ($0 < \varepsilon < \frac{T}{2}$).

The quasi-stationary modes under consideration are of applied interest. In these cases, chaotic behavior may occur when mixing is the most effective. In the case of stationary mode, the phase trajectory of markers in the area Ω is a closed curve without self-intersection points. For quasi-stationary mode the phase trajectory has more complex behavior. Fig. 3 shows the marker trajectory exiting from the point (0.52; 0.53) in 10 periods in case of mode B.

Periodic points for different ratios $a : b$ were numerically found for the considered modes. Schemes of their location in the area Ω are shown in Fig. 3 and 4 (\times – hyperbolic point; \bullet – elliptic point). Poincare Sections for 300 points were constructed as well. The obtained cross sections allow us to conclude that in quasi-stationary mode A the regularity of the flow is disturbed. In mode B there is an area of global chaos with the exception of only the border zones. For the area Ω when $a=1, b=1$, their examples for different modes are shown in Fig. 5 and 6. The obtained results are in good agreement with the results

of physical experiments [1, 5] and with the results obtained by means of other methods [4, 8].

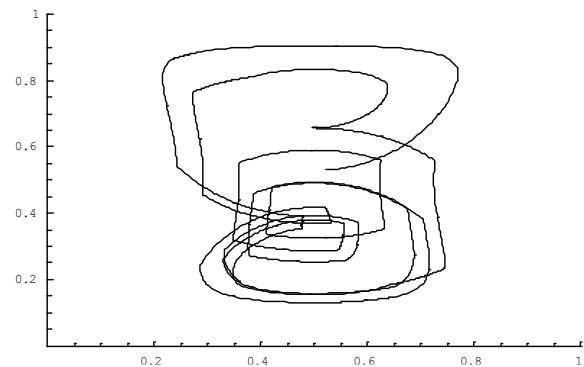


Fig. 2 The marker trajectory exiting from the point (0.52; 0.53) in 10 periods (mode B)

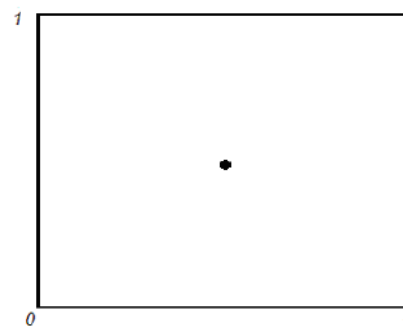


Fig. 3 Location of periodic points in the area Ω ($a=1, b=1$, modes A and B)

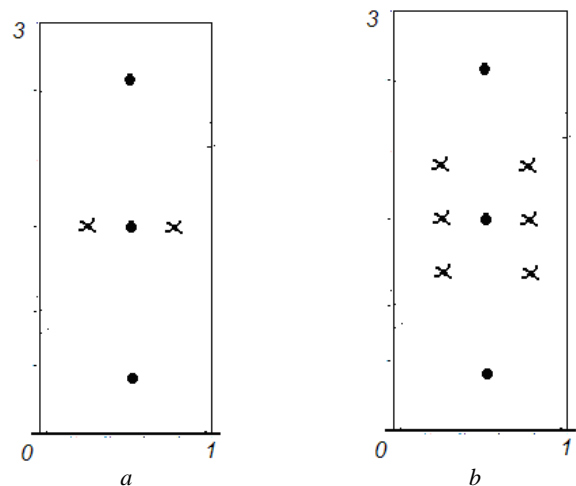


Fig. 4 Location of periodic points in area Ω ($a=1, b=3$) mode A (a) and mode B (b)

Conclusions. The technique for investigating the processes of mixing viscous mixtures was proposed. It is based on the joint application of the structural method (R -functions method) and methods of qualitative theory of differential equations. The application of the R -functions method made it possible to obtain the analytic solution of the first part of the mixing problem – viscous stream flow function. That facilitated its further usage for solving the

second part of the mixing problem – to study the properties of the trajectories of the marker movements.

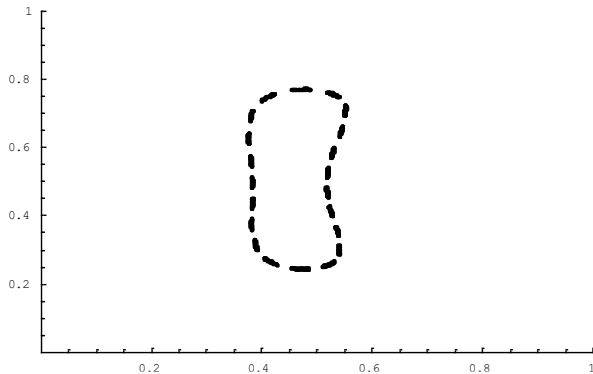


Fig. 5 Poincaré Intersection of the trajectory exiting from the point (0.52; 0.53) (mode A)

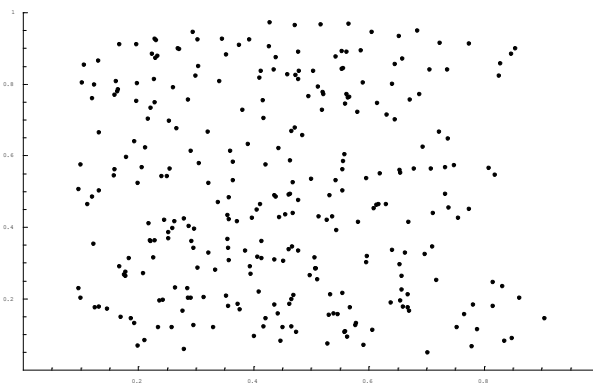


Fig. 6 Poincaré Intersection of the trajectory exiting from the point (0.52; 0.53) (mode B)

The application of the R -functions method allows to perform computational experiments for more complex areas than those found in modern research. That made the proposed method more universal than the known ones. Experimental studies of two of mixing modes allowed us to make conclusions about their effectiveness. Further studies of the proposed method may be related to the consideration of flows in more geometrically complex areas and more complex mixing modes.

References

- Ottino J. M. The mixing of fluids. *Scientific American*. 1989, no 260, pp. 56–67.
- Андрієвський Б. Р., Фрадков А. Л. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы. *Автоматика и телемеханика*. 2003. № 64 (5). С. 673–713. http://gateway.isiknowledge.com/gateway/Gateway.cgi?GWVersion=2&SrcApp=PARTNER_APP&SrcAuth=LinksAMR&DestLinkType=FullRecord&DestApp=ALL_WOS&KeyUT=000183044400001
- Андрієвський Б. Р., Фрадков А. Л. Управление хаосом: методы и приложения. II. Приложения. *Автоматика и телемеханика*. 2004. № 65 (4). С. 505–533.
- Aref H. The development of chaotic advection. *Physics of Fluids*. 2002, vol. 14, pp. 1315–1325.
- Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Москва: Эдиториал УРСС, 2001. 318 с.
- Дунаева Т. А., Гуржий А. А., Мелешко В. В. Перемешивание вязкой жидкости в полукруге при малых числах Рейнольдса. *Прикладна гідромеханіка*. 2021. Т. 3, № 2. С. 15–24.

- Мелешко В. В., Краснопольская Т. С. Смешивание вязких жидкостей. *Нелинейная динамика*. 2005. Т. 1, № 1. С. 69–109.
- Meleshko V. V., Kurylko O. B., Gourjii O. A. Generation of topological chaos in the Stokes flow in a rectangular cavity. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012, vol. 185, no. 6, pp. 858–871.
- Рвачев В. Л. *Теория R-функций и некоторые ее приложения*. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.
- Сидоров М. В. О построении структур решений задачи Стокса. *Радиоэлектроника и информатика*. 2002. № 3 (20). С. 39–42.
- Тевяшев А. Д., Гибкина Н. В., Сидоров М. В. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях. *Радиоэлектроника и информатика*. 2007, № 2 (37). С. 50–57.
- Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the R-function method. *Journal of Engineering Mathematics*. 2015, no. 91, pp. 59–79.
- Lamtyugova S. N., Sidorov M. V., Sytnykova I. V. Method of numerical analysis of the problem of stationary flow past bodies of revolution by viscous fluid. *Радиоелектроніка, інформатика, управління*. 2018, no. 1 (44), pp. 50–57.
- Lamtyugova S. N., Sidorov M. V., Sytnykova I. V. Method of numerical analysis of the problem of mass transfer of a cylindrical body with the uniform translational flow. *Радиоелектроніка, інформатика, управління*. 2018, № 2 (45). С. 22–29.
- Арпюх А. В., Гибкина Н. В., Сидоров М. В. Об одном методе математического моделирования некоторых процессов перемешивания с помощью метода R-функций. *АСУ и приборы автоматизации*. 2008, Вып. 143. С. 67–73.
- Гибкина Н. В., Роговой Н. С., Сидоров М. В., Стадников А. В. Численный анализ процессов перемешивания методом R-функций. *Радиоэлектроника и информатика*. 2012, № 3 (58). С. 28–34.
- Loitsyansky L.G. *Mechanics of liquids and gases*. New York, Begell House, 2003. 974 p.
- Mikhailin S. G. *Variational methods in mathematical physics*. Oxford, Pergamon Press, 1964. 584 p.

References (transliterated)

- Ottino, J.M. The mixing of fluids. *Scientific American*. 1989, no 260, pp. 56–67.
- Andrievsky B. R., Fradkov A. L. Upravlenie haosom: metody i prilozheniya. I. Metody [Control of Chaos: Methods and Applications. I. Methods]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 2003, no. 64 (5), pp. 673–713. http://gateway.isiknowledge.com/gateway/Gateway.cgi?GWVersion=2&SrcApp=PARTNER_APP&SrcAuth=LinksAMR&DestLinkType=FullRecord&DestApp=ALL_WOS&KeyUT=000183044400001
- Andrievsky B. R., Fradkov A. L. Upravlenie haosom: metody i prilozheniya. II. Prilozheniya [Control of Chaos: Methods and Applications. II. Applications]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 2004, no. 65 (4), pp. 505–533.
- Aref H. The development of chaotic advection. *Physics of Fluids*. 2002, vol. 14, pp. 1315–1325.
- Tabor M. *Haos i integriruemost v nelinejnoj dinamike* [Chaos and integrability in nonlinear dynamics]. Moscow, Editorial URSS, 2001. 318 p.
- Dunaeva T. A., Gourjii A. A., Meleshko V. V. Peremeshivanie вязкой жидкости в полукруге при малых числах Рейнольдса [The mixing of viscous fluid in a semicircle at low Reynolds number]. *Прикладна гідромеханіка* [Applied Hydromechanics]. 2021, vol. 3, no. 2, pp. 15–24.
- Meleshko V. V., Krasnopol'skaya T. S. Smeshivanie вязких жидкостей [Mixing of viscous fluids]. *Nelinejnaya dinamika* [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]. 2005, vol. 1, no. 1, pp. 69–109.
- Meleshko V. V., Kurylko O. B., Gourjii O. A. Generation of topological chaos in the Stokes flow in a rectangular cavity. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012, vol. 185, no. 6, pp. 858–871.
- Rvachev V. L. *Teoriya R-funkcij i nekotorye ee prilozheniya* [The R-functions theory and some of its applications]. Kiev, Naukova dumka, 1982. 552 p.
- Sidorov M. V. O postroenii struktur reshenij zadachi Stoksa [About general solution structures for Stokes problem]. *Radioelektronika i*

- informatika* [Radioelectronics & Informatics]. 2002, no. 3 (20), pp. 39–42.
11. Tevjashev A. D., Gybkina, N. V., Sidorov M. V. Ob odnom podhode k matematicheskomu modelirovaniyu ploskih stacionarnyh techenij vyzkoj neshhimaemoj zhidkosti v konechnyh odnosvyaznyh oblastiakh [About one method mathematical modeling of viscous flow in bounded simply connected 2D-domains]. *Radioelektronika i informatika* [Radioelectronics & Informatics]. 2007, no. 2 (37), pp. 50–57.
 12. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the R-function method. *Journal of Engineering Mathematics*. 2015, no. 91, pp. 59–79.
 13. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V., Sytnykova I. V. Method of numerical analysis of the problem of stationary flow past bodies of revolution by viscous fluid. *Radioelektronika, informatika, upravlinnya* [Radio Electronics, Computer Science, Control]. 2018, no. 1 (44), pp. 50–57.
 14. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V., Sytnykova I. V. Method of numerical analysis of the problem of mass transfer of a cylindrical body with the uniform translational flow. *Radioelektronika, informatika, upravlinnya* [Radio Electronics, Computer Science, Control]. 2018, no. 2 (45), pp. 22–29.
 15. Artiukh A. V., Gybkina N. V., Sidorov M. V. Ob odnom metode matematicheskogo modelirovaniya nekotoryh processov peremeshivaniya s pomoshyu metoda R funkciy [On a method of mathematical modeling of some mixing processes using the R-function method]. *Avtomatizirovannye sistemy upravleniya i pribory avtomatiki* [Management Information System and Devices]. 2008, issue 143, pp. 67–73.
 16. Gybkina N. V., Rogovyi N. S., Sidorov M. V., Stadnikova H. V. Chislennyj analiz processov peremeshivaniya metodom R-funkcij [Numerical analysis of mixing processes with the R-function method]. *Radioelektronika i informatika* [Radioelectronics & Informatics]. 2012, no. 3 (58), pp. 28–34.
 17. Loitsyansky L.G. *Mechanics of liquids and gases*. New York, Begell House, 2003. 974 p.
 18. Mikhlín S. G. *Variational methods in mathematical physics*. Oxford, Pergamon Press, 1964. 584 p.

Received 02.11.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Гибкіна Надія Валентинівна – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний університет радіоелектроніки, доцент кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2564-6903>; e-mail: nadiia.gybkina@nure.ua

Сидоров Максим Вікторович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки, завідувач кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8022-866X>; e-mail: maxim.sidorov@nure.ua

Стаднікова Ганна Вікторівна – Харківський національний університет радіоелектроніки, старший викладач кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0044-175X>; e-mail: hanna.stadnikova@nure.ua

Gybkina Nadiia Valentynivna – Candidate of Technical Sciences (PhD), Docent, Kharkiv National University of Radio Electronics, Associate Professor at the Department of Applied Mathematics; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2564-6903>; e-mail: nadiia.gybkina@nure.ua

Sidorov Maxim Viktorovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Kharkiv National University of Radio Electronics, Head of the Department of Applied Mathematics; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8022-866X>; e-mail: maxim.sidorov@nure.ua

Stadnikova Hanna Viktorivna – Kharkiv National University of Radio Electronics, Senior Lecturer at the Department of Applied Mathematics; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0044-175X>; e-mail: hanna.stadnikova@nure.ua

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

INFORMATION TECHNOLOGY

УДК 004.4:519.816

DOI: 10.20998/2079-0023.2022.02.16

*М. Д. ГОДЛЕВСЬКИЙ, Г. О. БУРЛАКОВ***ПЛАНУВАННЯ РОЗВИТКУ ПРОЦЕСУ РОЗРОБКИ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НА ОСНОВІ МЕТОДА ПОСЛІДОВНОГО АНАЛІЗУ ВАРІАНТІВ**

Зазначено, що процесний підхід є засобом наукового дослідження і практичної зміни навколишнього світу, який дозволяє представляти та реалізовувати виробничі системи у вигляді множини процесів. У роботі розглядаються особливості використання такого підходу до дослідження людської діяльності, пов'язаної з розробкою програмного забезпечення (ПЗ). Представлено перелік науковців, які звернули увагу на необхідність реалізації процесного підходу до розробки ПЗ і на цій основі було введено поняття процесу розробки ПЗ (ПР ПЗ). Визначено поняття моделі життєвого циклу (МЖЦ). Підкреслено, що найбільш відомими наборами МЖЦ є моделі зрілості СММІ та SPICE. Під покращенням ПР ПЗ у роботі розуміється множина дій, спрямованих на поліпшення його характеристик шляхом виконання деякого набору заходів, які базуються на інженерії якості, у тому числі на TQM. Підкреслено, що моделі зрілості відносяться до однієї з двох головних категорій: безперервні (continuous) і дискретні (staged). Модель СММІ реалізується на основі двох підходів, а модель SPICE тільки на основі безперервного підходу. На теперішній час модель СММІ формалізовано, що дозволило планувати розвиток ПР ПЗ або його окремих процесів в умовах обмежених ресурсів. З погляду еталонної моделі SPICE представлена формалізація її структури у вигляді наступної ієрархії: множина груп процесів; множина категорій; множина процесів; множина практик. На основі наведеної структури проведена формалізація оцінки рівня можливості окремого процесу моделі SPICE. Розроблена модель стала основою для розробки оптимізаційної задачі планування розвитку підмножини процесів моделі зрілості SPICE. З метою аналізу цієї задачі і розробки алгоритму її реалізації в роботі вона представлена у скороченому вигляді. Її цільова функція є адитивною і визначає інтегральний показник збільшення рівня можливості підмножини процесів на всьому плановому періоді. Модель має ресурсне обмеження, яке характеризується тим, що ресурси, які не використано на заданому підперіоді, можуть бути реалізовані на наступних підперіодах планування. Показано, що для оптимізації такої моделі найбільш придатним є метод послідовного аналізу варіантів, який може бути реалізованим на основі різних алгоритмів. У роботі використано алгоритм «Київський віник», який є багатокроковим процесом, на кожному підперіоді планування якого реалізується «відмітання» деякої множини неконкурентоспроможних варіантів.

Ключові слова: процесний підхід, програмне забезпечення, процес розробки програмного забезпечення, модель життєвого циклу, інженерія якості, модель зрілості, метод послідовного аналізу варіантів.

*М. Д. GODLEVSKYI, G. O. BURLAKOV***PLANNING THE EVOLUTION OF THE SOFTWARE DEVELOPMENT PROCESS BASED ON THE METHOD OF SEQUENTIAL OPTION ANALYSIS**

It is noted that the process approach is a means of scientific research and practical change of the surrounding world, which allows representing and implementing production systems in the form of a set of processes. The paper considers the peculiarities of using this approach to the study of human activity related to software development. A list of scientists, who drew attention to the necessity of implementing a process approach to software development, is presented, and on this basis, the concept of the software development process (SDP) was introduced. The concept of a model life cycle (MLC) is defined. It is emphasized that the most well-known sets of MLC are SMMI and SPICE maturity models. The improvement of SDP in the work is understood as a set of actions aimed at improving its characteristics by implementing a certain set of measures that are based on quality engineering, including TQM. It is emphasized that maturity models belong to one of two main categories: continuous and discrete (staged). The SMMI model is implemented on the basis of two approaches, and the SPICE model is implemented only on the basis of a continuous approach. Currently, the SMMI model has been formalized, which made it possible to plan the development of the SDP or its separate processes under conditions of limited resources. From the point of view of the SPICE reference model, the formalization of its structure is presented in the form of the following hierarchy: a set of process groups; multiple categories; set of processes; set of practices. Based on the given structure, the assessment of the possibility level of a separate process for SPICE model was formalized. The developed model became a basis for optimization problem development of planning evolution of a processes subset for the SPICE maturity model. In order to analyze this problem and develop an algorithm for its implementing, it is presented in a shortened form. Its objective function is additive and determines the integral indicator of the increase in the level of possibility of a processes subset over the entire planning period. The model has a resource limitation, which is characterized by the fact that resources that are not used in a given subperiod can be implemented in subsequent planning subperiods. It is shown that the method of sequential analysis of options, which can be implemented based on various algorithms, is the most suitable for the optimization of such a model. The work uses the "Kyiv Broom" algorithm, which is a multi-step process, at each planning sub-period of which "sweeping out" a certain set of non-competitive options is implemented.

Keywords: process approach, software, software development process, model life cycle, quality engineering, maturity model, method of

© М. Д. Годлевський, Г. О. Бурлаков, 2022



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом *НТУ «ХПІ»* у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХПІ» Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



sequential analysis of options.

Вступ. Процесний підхід є засобом наукового дослідження і практичної зміни навколишнього світу, який дозволяє представляти та реалізовувати виробничі системи множиною процесів, де під процесом будемо розуміти пов'язаний набір функцій, який перетворює вихідну інформацію в кінцеву інформацію (продукт, послугу) відповідно до попередньо визначених правил. У роботі розглядаються особливості використання такого підходу до дослідження людської діяльності, пов'язаної з розробкою програмного забезпечення. Вихідним матеріалом для такого роду діяльності є вимоги до програмного продукту або сервісу і необхідні ресурси, а її результат – кінцевий програмний продукт або сервіс. Очевидно, що така діяльність відповідає раніше наведеному поняттю процесу і, як слідство, можна ввести поняття процесу розробки програмного забезпечення (ПР ПЗ) [1–5].

Першим дослідником, який звернув увагу на необхідність реалізації процесного підходу до розробки ПЗ був Хамфрі, основні результати досліджень якого відображені у монографії [6]. Документ SWEBOOK [7] (який описує базовий набір знань програмної інженерії та відомий як стандарт ISO/IEC 19759) наводить наступне визначення: під ПР ПЗ розуміється набір діяльностей, методів, практичних процедур та перетворень, які використовуються людьми для розробки і підтримки ПЗ і пов'язаних з ним продуктів. Лавріщева [8] визначає ПР ПЗ (під назвою «базовий процес програмної інженерії») як множину логічно пов'язаних видів організаційної діяльності організації-розробника і набору засобів та інструментів, які відносяться до виготовлення програмного продукту. Як бачимо, ці визначення відрізняються тільки частковостями і є узгодженими в основному: у всіх визначеннях під ПР ПЗ розуміється упорядкована множина дій, які ставлять своєю метою створення програмного продукту. Відмінності фактично пов'язані з інтерпретацією конкретного набору дій. Опис структури конкретного екземпляра ПР ПЗ визначає набір етапів і окремих його елементів. При реалізації конкретних проектів визначається порядок слідування цих етапів і критерії переходу від етапу до етапу. Фактично, необхідно отримати відповідь на два основних питання [2]. Який набір етапів ПР ПЗ використовується в конкретній реалізації? Як задається послідовність цих етапів і умов переходу між ними? Відповідь на перше питання дає визначення процесів життєвого циклу (ЖЦ) ПР ПЗ. Відповідь на друге питання дає визначення моделі ЖЦ ПР ПЗ. Така модель дає послідовність виконання процесів ЖЦ (ПЖЦ) і умов переходу між ними. Існує безліч варіантів ПЖЦ, які використовуються в конкретних реалізаціях процесу розробки (моделі життєвого циклу). Зазвичай такі варіанти мають множину загальних елементів. У роботі [9] наведено загальний набір складових ПЖЦ, який є покриттям більшості існуючих варіантів. Найбільш відомими наборами ПЖЦ, які використовуються на практиці, є: набір ПЖЦ, визначений методом покращення процесу розробки, який базується на моделі зрілості СММІ (Capability Maturity Model Integration); набір ПЖЦ,

який визначається методом покращення процесу розробки, який базується на моделі зрілості SPICE (Software Process Improvement and Capability dEtermination) [10].

Постановка та мета задачі дослідження. Під покращенням ПР ПЗ (Software Process Improvement, SPI) [11, 12] розуміється множина дій, спрямованих на поліпшення характеристик процесу розробки в результаті виконання деякого набору заходів. Важливим моментом є той факт, що критерієм успіху цих дій є характеристики процесу розробки (його документування, керованість і т. ін.), а не характеристики програмного забезпечення, яке розробляється. У цьому ця технологія спирається на підходи інженерії якості, у тому числі на TQM (Total Quality Management). Вважається, що покращення характеристик процесу розробки напряму пов'язане з якістю його результатів. Існують різні підходи до покращення процесу розробки. Далі ми зосередимося на підходах, які базуються на моделях зрілості та представляють опис ідеального просування організації (або окремого підрозділу) до бажаного рівня реалізації процесу розробки, який задано декількома послідовними етапами або рівнями. Такий процес доповнюється засобами оцінки повноти виконання етапів або відповідності процесу організації рівням, які описано. Така модель дозволяє організації оцінити свою реалізацію процесу розробки шляхом її порівняння з кращими варіантами такої реалізації (або з варіантами конкурентів). Мета такого порівняння – сформулювати структурований план покращення цієї реалізації процесу.

На цей час прийнято відносити моделі зрілості до однієї з двох головних категорій: безперервні (continuous) і дискретні (поетапні, staged) підходи. Вище наведена модель СММІ реалізується на основі двох підходів, а модель SPICE тільки на основі безперервного підходу. При цьому модель СММІ дозволяє проводити оцінку ПР ПЗ всієї організації за допомогою дискретного підходу і окремих процесів (фокусних областей) при безперервному підході. Модель SPICE дозволяє оцінювати якість тільки окремих процесів або множини таких процесів. Основним недоліком цих моделей була відсутність їх формального опису, який дозволяє планувати розвиток ПР ПЗ або його окремих процесів в умовах обмежених ресурсів на деякому плановому періоді. Цей недолік було скасовано щодо моделі СММІ у роботах [13, 14]. Проведено перші дослідження про формалізацію процесів еталонної моделі зрілості SPICE [15]. Формалізовано оцінку рівня можливості окремого процесу моделі SPICE і розроблено динамічну модель планування розвитку підмножини процесів моделі зрілості SPICE. Тому метою роботи є розробка алгоритму реалізації цієї моделі на деякому плановому періоді в умовах обмежених ресурсів. Для формування алгоритму попередньо коротко розглянемо модель задачі, яку було розроблено в [15].

Динамічна модель планування розвитку підмножини процесів еталонної моделі зрілості SPICE. Введемо наступні позначення, які необхідні

для розробки динамічної моделі планування розвитку підмножини процесів еталонної моделі SPICE: G – множина груп процесів, де $g \in G$; K_g – множина категорій процесів g -ї групи, де $k \in K_g$; P_{gk} – множина окремих процесів (підпроцесів), де $p \in P_{gk}$; I_{gk}^p – множина практик, де $i \in I_{gk}^p$. Кожна практика характеризується множиною A атрибутів, де $\alpha \in A$, які наведено у [15, табл. 1]. З метою формалізації моделі SPICE введено дискретні змінні $X_{gk}^{pt}(i, \alpha) \in \{1, 2, 3, 4\}$, які визначають для i -ї практики ступінь володіння рисою атрибута α у t -му підперіоді планування, де $t \in [1, T]$, а T – кількість підперіодів. Одиниця визначає мінімальне володіння рисою в межах $[0\% - 15\%]$, а чотири – максимальне в межах $[86\% - 100\%]$. Отже, кожний процес моделі зрілості SPICE характеризується наступною матрицею оцінок

$$X_{gk}^{pt} = \{X_{gk}^{pt}(i, \alpha), i \in I_{gk}^p, \alpha \in A\}, p \in P_{gk}, k \in K_g, g \in G, t \in [1, T].$$

Далі введено поняття граничної матриці оцінок рівня можливості окремої практики

$$\Lambda = \{\Lambda(\gamma, \alpha), \gamma = \overline{0,5}, \alpha \in A\},$$

де γ – рівень можливості, α – індекс атрибуту. На основі матриці оцінок і граничної матриці шляхом згортки окремих практик в межах відповідного процесу [15] сформовано вектор відповідності рівням можливості для p -го процесу еталонної моделі SPICE

$$\Theta_{gk}^{pt} = \{\Theta_{gk}^{pt}(\gamma), \gamma = \overline{0,5}\}.$$

Кожний p -й процес досягає γ -рівня можливості при умові, що $\Theta_{gk}^{pt}(\gamma) = 1$. Якщо $\Theta_{gk}^{pt}(\gamma) < 1$, то будемо вважати, що ступінь досягнення γ -рівня можливості p -м процесом дорівнює $\Theta_{gk}^{pt}(\gamma)$. Вважається, що інтегральний рівень можливості p -го процесу у t -му підперіоді планування визначається наступним чином:

$$\bar{\Theta}_{gk}^{pt} = \prod_{\gamma=1}^5 \Theta_{gk}^{pt}(\gamma), p \in \bar{P}_{gk}, k \in \bar{K}_g, g \in \bar{G}, t \in [1, T],$$

де \bar{G} – підмножина груп процесів, $\bar{G} \subseteq G$; \bar{K}_g – підмножина категорій процесів, $\bar{K}_g \subseteq K_g$; \bar{P}_{gk} – підмножина процесів (підпроцесів), $\bar{P}_{gk} \subseteq P_{gk}$. Рівень можливості $\gamma = 0$ вважається досягнутим по визначенню. Вектор відповідності Θ_{gk}^{pt} залежить від матриці оцінок X_{gk}^{pt} . Тому інтегральний рівень можливості підмножини процесів у t -му підперіоді може бути визначеном у такий спосіб

$$\bar{F}^t(\bar{X}^t) = \sum_{g \in \bar{G}} \bar{\rho}_g \sum_{k \in \bar{K}_g} \bar{\rho}_{gk} \sum_{p \in \bar{P}_{gk}} \bar{\rho}_{gk}^p \cdot \bar{\Theta}_{gk}^{pt}(X_{gk}^{pt}),$$

де $\{\bar{\rho}_g\}, \{\bar{\rho}_{gk}\}, \{\bar{\rho}_{gk}^p\}$ – відповідні вагові коефіцієнти, а

$$\bar{X}^t = \{X_{gk}^{pt}(i, \alpha), i \in I_{gk}^p, \alpha \in A, p \in \bar{P}_{gk}, k \in \bar{K}_g, g \in \bar{G}\}, t \in [1, T].$$

В результаті цільова функція динамічної моделі планування розвитку підмножини процесів моделі зрілості SPICE записується у такий спосіб

$$F(\bar{X}) = \sum_{t \in [1, T]} \xi_t \cdot \Phi_t(\bar{X}^{t-1}, \bar{X}^t), \quad (1)$$

де

$$\Phi_t(\bar{X}^{t-1}, \bar{X}^t) = \bar{F}^t(\bar{X}^t) - \bar{F}^{t-1}(\bar{X}^{t-1}),$$

а $\{\xi_t\}$ – вектор вагових коефіцієнтів важливості окремих підперіодів планування.

Перейдемо до розгляду питання формування функції фінансових витрат на $(t-1)$ -му підперіоді планування, які забезпечують приріст рівня зрілості підмножини процесів у t -му підперіоді на величину $\Phi_t(\bar{X}^{t-1}, \bar{X}^t)$. З цією метою введені трикутні матриці варіантів розвитку окремих атрибутів практик (табл. 1), елементи яких

$${}^{\alpha}r_{gk}^{pi}(X_{gk}^{p(t-1)}(i, \alpha), X_{gk}^{pt}(i, \alpha)), \alpha \in A, i \in I_{gk}^p, p \in \bar{P}_{gk}, k \in \bar{K}_g, g \in \bar{G}$$

визначають необхідні фінансові ресурси при переході від ступеня володіння рисою $X_{gk}^{p(t-1)}(i, \alpha)$ α -атрибуту до ступеня $X_{gk}^{pt}(i, \alpha)$. Отже, сумарні фінансові витрати у $(t-1)$ -му підперіоді планування мають наступний вигляд:

$$\bar{R}_t(\bar{X}^{t-1}, \bar{X}^t) = \sum_{g \in \bar{G}} \sum_{k \in \bar{K}_g} \sum_{p \in \bar{P}_{gk}} \sum_{i \in I_{gk}^p} \sum_{\alpha \in A} {}^{\alpha}r_{gk}^{pi}(X_{gk}^{p(t-1)}(i, \alpha), X_{gk}^{pt}(i, \alpha)).$$

Таблиця 1 – Трикутна матриця для α -атрибуту

$X_{gk}^{pt}(i, \alpha)$				
$X_{gk}^{p(t-1)}(i, \alpha)$				
1	0	${}^{\alpha}r_{gk}^{pi}(1,2)$	${}^{\alpha}r_{gk}^{pi}(1,3)$	${}^{\alpha}r_{gk}^{pi}(1,4)$
2	0	0	${}^{\alpha}r_{gk}^{pi}(2,3)$	${}^{\alpha}r_{gk}^{pi}(2,4)$
3	0	0	0	${}^{\alpha}r_{gk}^{pi}(3,4)$
4	0	0	0	0

Тоді формується множина $[1, T]$ фінансових обмежень

$$\sum_{\tau=1}^t \bar{R}_{\tau}(\bar{X}^{\tau-1}, \bar{X}^{\tau}) \leq \sum_{\tau=0}^{t-1} R_{\tau} = \hat{R}^{t-1}, t \in [1, T], \quad (2)$$

де R_{τ} – фінансові ресурси, які виділяються ІТ-компанією на розвиток підмножини процесів у τ -підперіоді. Якщо вони не використані у τ -підперіоді, вони переносяться на наступні підперіоди. Отже, на

основі сформованої моделі планування розвитку підмножини процесів моделі зрілості SPICE ставиться наступна задача. Знайти оптимальне значення $\bar{X} = \{^* \bar{X}^t\}$, яке забезпечує максимальне значення критерія (1) при обмеженнях (2).

Алгоритм методу послідовного аналізу варіантів. Оптимізаційні задачі характеризуються тим, що чим більше обмежень накладається на змінні, тим складніше задача оптимізації. З іншої сторони, чим менша область допустимих варіантів функціонування, тим більш оптимістичною є задача, яка зводиться до спрямованого або повного перебору варіантів. Фактично, метод послідовного аналізу варіантів побудовано на цій основі шляхом використання процедур непрямих оцінок, які дозволяють відкинути не оптимальні рішення. Отже, в ході реалізації метода відкидаються неконкурентні варіанти поки не залишається декілька або один варіант. При наявності декількох варіантів вони порівнюються між собою і вибирається кращий. Ця ідея методу послідовного аналізу варіантів була реалізована академіками Н. З. Шором і В. С. Міхалевичем як алгоритм «Київський віник», який є багатокроковим процесом. На кожному підперіоді планування вирішується задача «відмітання» множини неконкурентоспроможних варіантів. Використання алгоритму дозволяє знайти оптимальний варіант розв'язання задачі.

Перейдемо до його адаптації по відношенню до моделі планування розвитку підмножини процесів еталонної моделі зрілості SPICE. Зробимо наочну інтерпретацію алгоритму з метою більш детального його розгляду. Введемо простори $\Pi^0, \Pi^1, \dots, \Pi^T$ змінних, відповідно, $\bar{X}^0, \bar{X}^1, \dots, \bar{X}^T$ моделі (1), (2). З погляду на ресурсні обмеження (2) будемо вважати, що на кожному підперіоді планування існують дискретні множини $\Omega^0, \Omega^1, \dots, \Omega^T$, які визначають області змінних, відповідно, $\bar{X}^0, \bar{X}^1, \dots, \bar{X}^T$. У результаті маємо:

$$\bar{X}^0 \in \Omega^0 \subset \Pi^0, \bar{X}^1 \in \Omega^1 \subset \Pi^1, \dots, \bar{X}^T \in \Omega^T \subset \Pi^T.$$

Змінна $\bar{X}^0 = ^* \bar{X}^0$ визначає початковий стан підмножини процесів моделі зрілості SPICE і тому множина Ω^0 складається з одного елемента. результатом виникає задача визначення ламаної $^* \bar{X}^0, ^* \bar{X}^1, \dots, ^* \bar{X}^T$, «довжина» якої максимальна і яка задовольняє умовам

$$^* X_{gk}^{pt}(i, \alpha) \in \{1, 2, 3, 4\}, ^* X_{gk}^{p0}(i, \alpha) \in \{1, 2, 3, 4\},$$

$$^* X_{gk}^{pt-1}(i, \alpha) \leq ^* X_{gk}^{pt}(i, \alpha), i \in I_{gk}^p,$$

$$\alpha \in A, p \in \bar{P}_{gk}, k \in \bar{K}_g, g \in \bar{G}, t \in [1, T].$$

Розглянемо безпосередньо реалізацію алгоритму «Київський віник», спираючись на наочну інтерпретацію алгоритму, яку наведено на рисунку 1. Попередньо формується множина

$$\Omega^1 = \{ \bar{X}^1 : ^* \bar{X}^0 \leq \bar{X}^1 \leq \bar{X}^T, \bar{R}_1(^* \bar{X}^0, \bar{X}^1) \leq R_0 \}.$$

Для кожної змінної $\bar{X}^1 \in \Omega^1$ визначається «довжина відрізка» $\Psi_1(\bar{X}^1) = \xi_1 \Phi_1(^* \bar{X}^0, \bar{X}^1)$.

Величина $\Psi_1(\bar{X}^1)$ визначає приріст цільової функції на першому підперіоді планування при різних значеннях \bar{X}^1 . Далі розглянемо цільову функцію

$$F(\bar{X}), \text{ де } \bar{X} = \{ \bar{X}^t, t \in [0, T] \}.$$

Представимо її у наступному вигляді

$$\max_{\bar{X}^0 \in \Omega^0} F(\{ \bar{X}^t, t \in [0, T] \}) = \Psi_1(\bar{X}^1) + \sum_{t=2}^T \xi_t \Phi_t(\bar{X}^{t-1}, \bar{X}^t).$$

Можна сказати, що будь-яка ламана, в якій відсутній відрізок $\Psi_1(\bar{X}^1)$, не є претендентом для пошуку оптимального рішення. Якщо вважати, відповідно до концепції алгоритму «Київський віник», що на кожному t -му кроці алгоритму проводиться «відмітання» множини Θ^t неконкурентоспроможних варіантів, про яку стає відомо, що вона не містить оптимального варіанта, то $\Theta^0 = \emptyset$ оскільки ця множина складається з одного елемента. Далі розглянемо наступний крок алгоритму і сформуємо множину

$$\Omega^2 = \left\{ \bar{X}^2 : ^* \bar{X}^0 \leq \bar{X}^2 \leq \bar{X}^T, \sum_{t=1}^2 \bar{R}_t(\bar{X}^{t-1}, \bar{X}^t) \leq \sum_{t=0}^1 R_t \right\}.$$

Ресурси, які не використано на попередньому підперіоді, можуть бути використані на наступних підперіодах планування. Тому $\Omega^1 \subseteq \Omega^2$. Далі будемо вважати, що ламана «максимальної довжини», яка з'єднує \bar{X}^2 з $^* \bar{X}^0$, визначається наступним чином

$$\Psi_2(\bar{X}^2) = \max_{\bar{X}^1 \in \Omega^1} \{ \Psi_1(\bar{X}^1) + \xi_2 \Phi_2(\bar{X}^1, \bar{X}^2) \}, \bar{X}^2 \in \Omega^2.$$

В результаті максимізації відкидається деяка множина Θ^1 неконкурентоспроможних варіантів. Максимізація реалізується шляхом повного перебору елементів $\bar{X}^1 \in \Omega^1$ для кожного елемента $\bar{X}^2 \in \Omega^2$.

При цьому вважається, що $\bar{X}^1 \leq \bar{X}^2$. Далі по аналогії з попереднім кроком алгоритму

$$\Omega^3 = \left\{ \bar{X}^3 : ^* \bar{X}^0 \leq \bar{X}^3 \leq \bar{X}^T, \sum_{t=1}^3 \bar{R}_t(\bar{X}^{t-1}, \bar{X}^t) \leq \sum_{t=0}^2 R_t \right\}.$$

Ламана «максимальної довжини», яка з'єднує \bar{X}^3 з $^* \bar{X}^0$, визначається наступним чином (рис. 1):

$$\Psi_3(\bar{X}^3) = \max_{\bar{X}^2 \in \Omega^2} \{ \Psi_2(\bar{X}^2) + \xi_3 \Phi_3(\bar{X}^2, \bar{X}^3) \}, \bar{X}^3 \in \Omega^3.$$

У результаті максимізації відкидається деяка множина Θ^2 неконкурентоспроможних варіантів. На основі отриманих результатів на перших кроках алгоритму проведемо їх узагальнення на прикладі t -го кроку, для якого формується множина

$$\Omega^t = \left\{ \bar{X}^t : * \bar{X}^0 \leq \bar{X}^t \leq \bar{X}^T, \sum_{\tau=1}^T \bar{R}_\tau(\bar{X}^{\tau-1}, \bar{X}^\tau) \leq \sum_{\tau=0}^{t-1} R_\tau \right\}, \\ t \in [1, T].$$

Як і було представлено вище, ламана «максимальної довжини», яка з'єднує \bar{X}^t з $* \bar{X}^0$ визначається таким чином:

$$\Psi_t(\bar{X}^t) = \max_{\bar{X}^{t-1} \in \Omega^{t-1}} \left\{ \Psi_{t-1}(\bar{X}^{t-1}) + \xi_t \Phi_t(\bar{X}^{t-1}, \bar{X}^t) \right\}, \bar{X}^t \in \Omega^t.$$

На кожному кроці алгоритму «відмітається» деяка множина Θ^{t-1} неконкурентоспроможних варіантів. В результаті на останньому T -му кроці ми отримуємо множину $\{\Psi_T(\bar{X}^T), \bar{X}^T \in \Omega^T\}$. Кращий варіант визначається наступним чином:

$$\Psi^* = \max_{\bar{X}^T \in \Omega^T} \left\{ \Psi_T(\bar{X}^T) \right\}.$$

Необхідно підкреслити, що алгоритм «Київський віник» дозволяє знайти глобальний екстремум цільової функції. При цьому на окремі функції $\Phi_t(\bar{X}^{t-1}, \bar{X}^t)$ ніяких умов (опуклість, увігнутість) не накладається.

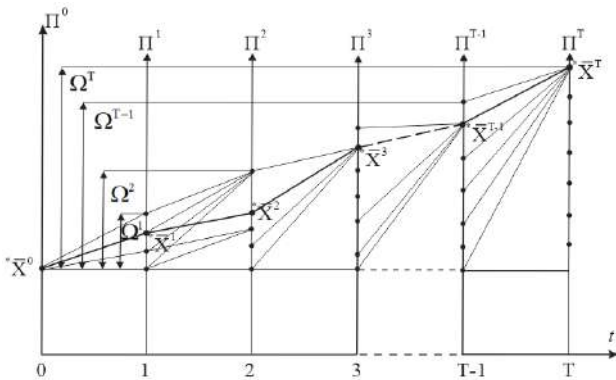


Рис. 1. Наочна інтерпретація алгоритму

Але одним з недоліків алгоритму є його велика трудомісткість. Тому виникає задача розробки деяких алгоритмів, які, з одного боку, не дозволяють знайти глобальний екстремум, але дають можливість значно зменшити його трудомісткість. Одним з підходів до вирішення цієї проблеми є метод «Блукаюча трубка». Він має характер метода послідовних наближень і не забезпечує знаходження глобального екстремуму, але має значно меншу трудомісткість по відношенню до алгоритму «Київський віник».

Висновки, шляхи подальших досліджень. У роботі підкреслена важливість процесного підходу у дослідженнях, пов'язаних з розробкою програмного забезпечення. Представлені найбільш відомі дослідники, які першими визначили необхідність реалізації процесного підходу до розробки ПЗ. Наведено найбільш відомі набори процесів життєвого циклу, до яких відносяться моделі зрілості CMMI та SPICE. На основі попередньо розробленої динамічної моделі планування розвитку підмножини процесів еталонної моделі зрілості SPICE поставлена задача розробки

алгоритму реалізації цієї моделі на деякому плановому періоді в умовах обмежених ресурсів. В роботі стисло представлена динамічна модель в більш зрозумілому ракурсі з метою її використання при розробці алгоритму. Аналіз моделі показав, що найбільш дієвим методом для її реалізації є метод послідовного аналізу варіантів. В результаті подальшого аналізу моделі стало зрозумілим, що для її реалізації найбільше підходить алгоритм «Київський віник». В роботі проведено адаптацію цього алгоритму відносно до конкретної моделі та його представлення як придатним для практичної реалізації.

Подальші дослідження будуть проводитись у наступних напрямках:

- зменшення трудомісткості алгоритму за рахунок використання метода «Блукаюча трубка»;
- реалізація інформаційної технології підтримки прийняття рішень при плануванні розвитком підмножини процесів еталонної моделі зрілості SPICE;
- дослідження розробленої інформаційної технології на тестових прикладах реальної розмірності.

Список літератури

1. Goodman F. A. *Defining and deploying software processes*. Auerbach Publications, 2006. 221 p.
2. Madachy R. J. *Software process dynamics*. Hoboken, NJ: IEEE Press, Wiley Interscience, 2008. 601 p.
3. Li T. *An Approach to Modelling Software Evolution Processes*. Berlin-Heidelberg: Springer, 2008. 213 p.
4. *Agile Processes in Software Engineering and Extreme Programming* / P. Abrahamsson, R. Baskerville, K. Conboy, et al. (eds.). Berlin-Heidelberg: Springer, 2008. 258 p.
5. Андон Ф. И., Коваль Г. И., Коротун Т. М. *Основы инженерии качества программных систем*. Киев: Академперіодика, 2007. 672 с.
6. Humphrey W. S. *Managing the software process*. Boston, MA: Addison-Wesley, 1989. 512 p.
7. *Software Engineering — Guide to the Software Engineering Body of Knowledge (SWEBOK)*, ISO/IEC TR 19759:2005. ISO, 2005. 173 p.
8. Лаврішчева К. М. *Програмна інженерія*. Київ: Академперіодика, 2008. 319 с.
9. Scacchi W., Marciniak J. *Process models in software engineering: Encyclopedia of Software Engineering*. New York: John Wiley & Sons, 2002. P. 993–1005.
10. *Оценка и аттестация зрелости процессов создания и сопровождения программных средств и информационных систем (ISO/IEC TR 15504-CMM)*. Москва: Книга и бизнес, 2001. 348 с.
11. Persse J. R. *Process Improvement Essentials*. O'Reilly, 2006. 352 p.
12. Poulin L. A. *Reducing risk with software process improvement*. Auerbach Pubs, 2005. 288 p.
13. Godlevskiy M. D., Goloskokova A. A., Chipizhenko A. A. Medium-term planning information technology for quality improvement of the software development process based on the CMMI model. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. Харків: НТУ «ХПІ», 2017. № 51 (1272). С. 32–37.
14. Godlevskiy M. D., Goloskokova A. A., Bielous O. S. Information technology of a static model solving for quality improvement of the software development process based on the CMMI model. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. Харків: НТУ «ХПІ», 2017. № 55 (1276). С. 26–30.
15. Godlevskiy M. D., Goloskokova A. A., Burлаков Г. О. Динамічна модель планування розвитку підмножини процесів еталонної моделі зрілості SPICE. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. Харків: НТУ «ХПІ», 2020. № 2 (4). С. 10–16.

References (transliterated)

1. Goodman F. A. *Defining and deploying software processes*. Auerbach Publ., 2006. 221 p.
2. Madachy R. J. *Software process dynamics*. Hoboken, NJ: IEEE Press, Wiley Interscience, 2008. 601 p.
3. Li T. *An Approach to Modelling Software Evolution Processes*. Berlin-Heidelberg: Springer, 2008. 213 p.
4. *Agile Processes in Software Engineering and Extreme Programming* / P. Abrahamsson, R. Baskerville, K. Conboy, et al. (eds.). Berlin-Heidelberg: Springer, 2008. 258 p.
5. Andon F. I., Koval G. I., Korotun T. M. *Osnovy inzhenerii kachestva programnykh sistem* [Fundamentals of Software Systems Quality Engineering]. Kyiv, Akademperiodika, 2007. 672 p.
6. Humphrey W. S. *Managing the software process*. Boston, MA, Addison-Wesley, 1989. 512 p.
7. *Software Engineering — Guide to the Software Engineering Body of Knowledge (SWEBOOK), ISO/IEC TR 19759:2005*. ISO, 2005. 173 p.
8. Lavrisheva K. M. *Programna Inzheneriya* [Software Engineering]. Kyiv, Akademperiodika, 2008. 319 p.
9. Scacchi W., Marciniak J. *Process models in software engineering*. Encyclopedia of Software Engineering. New York: John Wiley & Sons, 2002, pp. 993–1005.
10. *Otsenka i attestatsiya zrelosti protsessov stvoreniya i sprovovzhdeniya programnykh sredstv i informatsionnykh sistem (ISO/IEC TR 15504-CMM)* [Assessment and certification of the maturity of the processes of creating and maintaining software tools and information systems (ISO/IEC TR 15504-CMM)]. Moscow, Book and business, 2001. 348 p.
11. Perse J. R. *Process Improvement Essentials*. O'Reilly, 2006. 352 p.
12. Poulin L. A. *Reducing risk with software process improvement*. Auerbach Pubs, 2005. 288 p.
13. Godlevskiy M. D., Goloskokova A. A., Chipizhenko A. A. Medium-term planning information technology for quality improvement of the software development process based on the CMMI model. *Visnyk NTU "KhPI": zb. nauk. pr. Seriya: Sy'stemny'j analiz, upravlinnya ta informacijni tehnologiyi*. [Bulletin of NTU "KhPI". Series: System analysis, control and information technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2017, no. 51 (1272), pp. 32–37.
14. Godlevskiy M. D., Goloskokova A. A., Bielous O. S. Information technology of a static model solving for quality improvement of the software development process based on the CMMI model. *Visnyk NTU "KhPI": zb. nauk. pr. Seriya: Sy'stemny'j analiz, upravlinnya ta informacijni tehnologiyi*. [Bulletin of NTU "KhPI". Series: System analysis, control and information technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2017, no. 55 (1276), pp. 26–30.
15. Godlevskiy M. D., Goloskokova A. A., Burlakov G. O. Dinamichna model planuvannya rozvitku pidmnozhini protsesiv etalonnogo modeli zrilosti SPICE [A dynamic model for development planning of process subsets for the SPICE reference maturity model]. *Visnyk NTU "KhPI": zb. nauk. pr. Seriya: Sy'stemny'j analiz, upravlinnya ta informacijni tehnologiyi*. [Bulletin of NTU "KhPI". Series: System analysis, control and information technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2020, no. 2 (4), pp. 10–16.

Надійшло (received) 25.10.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Годлевський Михайло Дмитрович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», директор інституту комп'ютерних наук та інформаційних технологій; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2872-0598>; e-mail: god_asu@kpi.kharkov.ua.

Бурлаков Георгій Олександрович – «SheerChain» ОУ, головний виконуючий директор; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0423-6024>; e-mail: george@sheerchain.com.

Godlevskiy Mykhaylo Dmytrovych – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Director of the Institute of Computer Science and Software Engineering; Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2872-0598>; e-mail: god_asu@kpi.kharkov.ua.

Burlakov Heorhii Oleksandrovych – «SheerChain» OÜ, Chief Executive Officer; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0423-6024>; e-mail: george@sheerchain.com.

С. Ф. ЧАЛИЙ, В. О. ЛЕЩИНСЬКИЙ

МОДЕЛЬ ПОЯСНЕННЯ В ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІЙ СИСТЕМІ НА ЛОКАЛЬНОМУ, ГРУПОВОМУ ТА ГЛОБАЛЬНОМУ РІВНЯХ ДЕТАЛІЗАЦІЇ

Предметом дослідження є процеси формування пояснень в інтелектуальних інформаційних системах. В сучасних інтелектуальних системах використовуються методи машинного навчання. Процес отримання рішення, сформованих на основі таких методів, є звичайно непрозорим для користувача. Внаслідок такої непрозорості користувач може не довіряти тим рішенням, які запропонувала інтелектуальна система. Це знижує ефективність її використання. Для підвищення прозорості рішень використовуються пояснення. Пояснення представляється знаннями щодо причин формування результату в інтелектуальній системі, а також щодо причин окремих дій у процесі формування результату. Також пояснення може містити знання щодо впливу окремих функцій на отриманих інтелектуальною системою результат. Тому пояснення доцільно формувати на різних рівнях деталізації з тим, щоб показати як узагальнені причини та впливи на отримане рішення, так і причини вибору окремих проміжних дій. Мета роботи полягає в розробці узагальненої моделі пояснення з урахуванням станів та рівнів деталізації процесу прийняття рішення в інтелектуальній системі для побудови пояснень на основі відомих даних щодо послідовності станів та властивостей цих станів. Для досягнення мети вирішуються такі задачі: структуризація властивостей пояснень; визначення можливостей підходів до побудови пояснень на основі станів та структури процесу формування рішення, а також на основі вхідних даних; побудова моделі пояснення. Висновки. Запропоновано узагальнену модель пояснення в інтелектуальній системі для локального, групового та глобального рівнів деталізації процесу прийняття рішення. Модель представляється упорядкованою послідовністю зв'язаних залежностей між подіями або станами процесу прийняття рішення. Модель орієнтована на представлення можливості в рамках глобального пояснення виділити локальне пояснення та представити ланцюжок групових пояснень між подіями отримання вхідних даних та результуючого рішення. У практичному плані запропонована модель призначена для побудови пояснень з використанням підходів на основі спрощення процесу функціонування інтелектуальної системи та на основі виділення впливу окремих функцій та дій на кінцевий результат. Додаткові можливості моделі пов'язані із деталізацією подій процесу прийняття рішення з виділення окремих змінних, які характеризують стан цього процесу, що дає можливість формувати пояснення на основі використання відомих концепцій та понять у предметній області.

Ключові слова пояснення; інтелектуальна інформаційна система; залежності; рівні деталізації пояснень причинно-наслідкові зв'язки.

S. CHALYI, V. LESHCHYNSKYI

AN EXPLANATION MODEL IN AN INTELLIGENT SYSTEM AT THE LOCAL, GROUP AND GLOBAL LEVELS OF DETAIL

The subject of research is the process of formation of explanations in intellectual information systems. Machine learning methods are used in modern intelligent systems. The process of obtaining the solution formed on the basis of such methods is usually opaque to the user. As a result of such opacity, the user may not trust the solutions proposed by the intelligent system. This reduces the efficiency of its use. Explanations are used to increase the transparency of decisions. The explanation is represented by knowledge about the reasons for the formation of the result in the intellectual system, as well as about the reasons for individual actions in the process of formation of the result. Also, the explanation may contain knowledge about the influence of individual functions on the results obtained by the intelligent system. Therefore, it is advisable to form an explanation at different levels of detail in order to show both the generalized reasons and effects on the obtained decision, as well as the reasons for choosing individual intermediate actions. The purpose of the work is to develop a generalized model of explanation considering the states of the decision-making process in an intelligent system to build explanations based on known data regarding the sequence of states and the properties of these states. To achieve the goal, the following tasks are solved: structuring the properties of explanations; determining the possibilities of approaches to building explanations based on the states and structure of the decision-making process, as well as on the basis of input data; construction of an explanatory model. Conclusions. A generalized model of explanation in an intelligent system for local, group and global levels of detail of the decision-making process is proposed. The model is represented by an ordered sequence of weighted dependencies between events or states of the decision-making process. The model is focused on presenting the possibility to highlight a local explanation within the framework of a global explanation and to present a chain of group explanations between the events of obtaining input data and the resulting decision. In practical terms, the proposed model is intended for the construction of explanations using approaches based on the simplification of the process of functioning of the intelligent system and on the basis of highlighting the influence of individual functions and actions on the final result. Additional capabilities of the model are related to the detailing of the events of the decision-making process from the selection of individual variables that characterize the state of this process, which makes it possible to form an explanation based on the use of known concepts and concepts in the subject area.

Keywords: explanation; intelligent information system; dependencies; levels of detail of explanations cause-and-effect relationships.

Вступ. При побудові сучасних інтелектуальних інформаційних систем широко застосовуються методи машинного навчання з використанням об'ємних наборів даних [1]. В результаті моделі, які лежать в основі функціонування таких інтелектуальних систем, стають дуже складними для розуміння і непрозорими для користувача. Відповідно, користувач не завжди може довіряти рішенням, які запропонувала така інтелектуальна система [2].

Тому користувачі інтелектуальних систем потребують пояснення щодо отриманих рішень, щоб

довіряти цим рішенням та ефективно їх використовувати [3]. У науковому аспекті пояснення дають можливість виявити упередженість у отриманих моделях. Така упередженість пов'язана із використанням для навчання наборів даних, в яких зафіксовано упередженість у рішеннях людей. Наприклад, проблема упередженості за певними ознаками може виникати при прийомі на роботу з використанням інтелектуальної системи підтримки прийняття рішень [4].

У практичному аспекті пояснення дають можливість оцінити ризики впровадження інтелектуальних

© С. Ф.Чалий, В. О. Лещинський 2022



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом *НТУ «ХПИ»* у збірнику «Вісник Національного технічного університету "ХПИ" Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Common Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



інформаційних технологій, обґрунтовуючи як відповідні послідовність дій при реалізації останніх, так і отримані результати. Слід також зазначити, що користувачі мають отримувати пояснення у різній формі, в залежності від задачі, що вирішується, а також від їх рівня підготовки та знань [5].

Зазначене свідчить про важливість задачі інтерпретації для користувача процесу формування рішення в інтелектуальній системі. Якщо алгоритми та моделі, що лежать в основі роботи системи, є непрозорими, то вони мають бути доповнені поясненнями.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Дослідження щодо можливостей побудови пояснень в сучасних інтелектуальних системах були інтегровані та значно інтенсифіковані в рамках програми ХАІ [3]. Дослідження проводяться в напрямках визначення когнітивних аспектів пояснень [6], побудови інтелектуальних систем, функціонування яких може бути інтерпретовано безпосередньо [7, 8], формування пояснень з використанням каузальних та темпоральних залежностей [9–11].

Однак існуючі підходи не приділяють достатньо уваги побудові пояснень з урахуванням рівня їх деталізації. В той же час, виділення пояснень на відповідних рівнях деталізації пояснень є необхідною умовою для їх представлення різним категоріям користувачів – розробникам, аудиторам, експертам в предметній області, кінцевим користувачам. Зазначене свідчить про важливість побудови узагальненої моделі пояснення з урахуванням рівнів його деталізації з тим, щоб адаптувати пояснення до потреб різних категорій користувачів.

Мета та задачі дослідження. Мета статті полягає у розробці узагальненої моделі пояснення з урахуванням станів та рівнів деталізації процесу прийняття рішення в інтелектуальній системі для побудови пояснень на основі відомих даних щодо послідовності станів та властивостей цих станів.

Для досягнення мети вирішуються такі задачі:

- структуризація властивостей пояснень;
- визначення можливостей підходів до побудови пояснень на основі станів та структури процесу формування рішення, а також на основі вхідних даних;
- побудова моделі пояснення.

Властивості пояснень в інтелектуальних системах. Інтелектуальні системи з точки зору зрозумілості їх роботи підрозділяються прозорі та непрозорі.

Перші характеризуються тим, що процес прийняття рішення є зрозумілим для користувача. Тобто людина може зрозуміти дії системи, реалізовані функції без потреби у додаткових поясненнях.

Зрозумілістю системи є її властивість представляти знання, на основі яких вона отримує рішення, у зрозумілій для користувача формі.

З урахуванням характеристик зрозумілості та незрозумілості інтелектуальні системи поділяються на системи з можливістю інтерпретації та системи з можливістю пояснення [7–11].

Системи першого типу використовують моделі, які описують процес прийняття рішень у зрозумілій для користувача формі.

Інтелектуальні інформаційні системи з можливістю пояснення містять додатковий інтерфейс для людини, який призначений для інтерпретації отриманих в інтелектуальній системі рішень та безпосередньо процесу прийняття рішень. Загальну схему, що відображає зв'язок наведених властивостей, представлено на рис. 1.

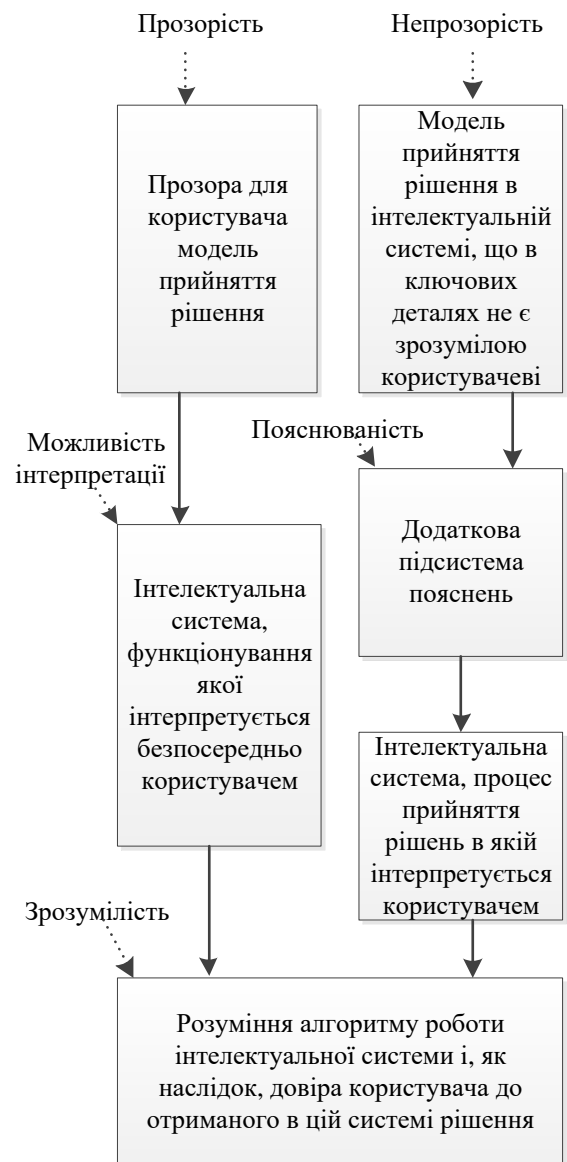


Рис. 1. Зв'язок властивостей інтерпретованості та пояснюваності інтелектуальної системи

Побудова пояснень в інтелектуальній системі відбувається в рамках двох ключових напрямків

- пояснення на основі станів та структури інтелектуальної системи;

- пояснення з використанням вхідних даних.

В рамках першого напрямку виділяються такі підходи:

- спрощення процесу роботи системи;
- визначення впливу окремих функцій на результат роботи інтелектуальної системи;

– використання відомих концепцій та понять у предметній області.

Ключові відмінності даних підходів наведено у табл. 1.

Підхід до побудови пояснень на основі спрощення знань щодо процесу роботи інтелектуальної системи використовує узагальнені, експериментально підтвержені закономірності, які відображають процеси та явища у предметній області але не використовують модель предметної області. Наприклад, закономірності виду «люди частіше хворіють на грип восени», без урахування природи таких захворювань.

Таблиця 1 – Пояснення з використанням станів та структури інтелектуальної системи

Підхід	Особливості
1. На основі спрощення процесу функціонування інтелектуальної системи	Для пояснення використовуються моделі «поверхневих» знань.
2. На основі виділення впливу окремих функцій та дій на кінцевий результат	В рамках даного підходу в якості пояснення відображається вплив окремих етапів процесу прийняття рішення або окремих функцій, що були використані у даному процесі, на показники отриманого результату.
3. На основі відомих концепцій у предметній області	Згідно даного підходу виконується візуалізація внутрішнього стану моделі, що лежить в основі процесу прийняття рішення.

Тобто складні закономірності процесу прийняття рішення, отримані, наприклад, в результаті машинного навчання, представляються спрощеними причинно-наслідковими або темпоральними відношеннями, які задають зв'язок між ключовими подіями та фактами предметної області, без деталізації такого зв'язку.

Другий підхід до формування пояснень відображає вплив окремих дій або функцій на кількісні властивості отриманого в інтелектуальній системі результату. В якості показників використовуються, наприклад, точність, AUC, тощо.

При реалізації даного підходу застосовуються, наприклад, діаграма середнього зниження точності (Mean Decrease Accuracy – MDA), метод DeepLIFT.

MDA показує, наскільки зменшується точність за умови виключення відповідної змінної із моделі процесу прийняття рішення в інтелектуальній системі. Змінні на діаграмі представляються за зменшенням їх важливості.

Метод DeepLIFT виконує декомпозицію результату роботи нейронної мережі для конкретного входу за рахунок зворотного розповсюдження відкликів нейронів на кожну ознаку вхідного сигналу. Даний метод надає оцінку вкладу кожного нейрону у результат, порівнюючи поточну та еталонну активації.

Підхід до побудови пояснень на основі концепцій та понять орієнтований на те, щоб показати вплив

окремих структурних елементів моделі процесу прийняття рішення в інтелектуальній системі на кінцевий результат. Для відображення даного впливу використовується кількісна оцінка впливу певних понять на отримане в системі рішення. Тобто вхідні дані сортуються за їх відповідністю певним поняттям та концепціям, після чого встановлюється вплив цих понять. Наприклад, вхідні зображення для класифікації можуть бути відсортовані за кольором, за формою ліній на зображенні (точкова, зигзагами, тощо), за об'єктами на зображенні (чоловік, жінка, дитина).

При використанні нейронних мереж даний підхід реалізується методом кількісного тестування з векторами активації концепції (Testing with Concept Activation Vectors – TCAV). Метод створює орієнтовану на розуміння людиною лінійну інтерпретацію внутрішніх станів моделі глибокого навчання в термінах понять та концепцій предметної області.

За другим напрямком виділяються такі підходи:

– візуалізація впливу вхідних даних на отримане рішення;

– використання прикладів прийняття рішення.

Ключові відмінності даних підходів наведено у табл. 2.

Таблиця 2 – Пояснення з використанням вхідних даних

Підхід	Особливості
1. Візуалізація впливу вхідних даних	Даний підхід орієнтований на представлення графіків, що відображають деталізовані або усереднені залежності результату від вхідної функції.
2. На основі типових прикладів роботи системи	Задаються приклади, що найкращим чином ілюструють процес прийняття рішення в інтелектуальній системі.

При візуалізації пояснення використовуються, як правило, графіки, що відображають індивідуальне умовне очікування (Individual Conditional Expectation – ICE), або ж часткові залежності (Partial Dependence Plots – PDPs).

В першому випадку на графіку представляється задається індивідуальна залежність певного показника від заданого параметра або функції (наприклад, залежність захворюваності від віку людини). В другому випадку задається середнє значення цього показника.

Підхід до побудови пояснень на основі прикладів передбачає побудову множини прикладів, що ілюструють процес отримання результатів в інтелектуальній системі.

Локальний, груповий та глобальний рівні деталізації пояснень. Розглянуті у попередньому підрозділі підходи орієнтовані на побудову пояснення на локальному, груповому та глобальному рівнях деталізації.

Локальне пояснення призначено для обґрунтування користувачеві одного конкретного результату.

Групове пояснення забезпечує розуміння користувачем підмножини схожих результатів роботи інтелектуальної системи.

Глобальне пояснення робить «прозорим» безпосередньо процес отримання рішення в інтелектуальній системі.

Між цими рівнями деталізації можна встановити такий зв'язок. Пояснення глобального рівня відображає послідовність впливів окремих дій або функцій процесу формування рішення в інтелектуальній системі на кінцевий результат.

Процес формування рішення реалізується декілька разів для отримання різних результатів. Тому глобальне пояснення містить залежності, що є спільними для всіх цих екземплярів процесу отримання результату.

Групове пояснення містить залежності для підмножини екземплярів процесу отримання рішення. Тому в даному випадку використовується підмножина залежностей, типи яких відрізняються від узагальнених залежностей глобального пояснення. Наприклад, обмеження для групового пояснення не завжди є обмеженнями для повного процесу прийняття рішення.

Локальні пояснення у даній ієрархії доцільно розглядати як залежності між конкретним набором вхідних даних та отриманим в інтелектуальній системі результатом. Відмінності між вказаними рівнями пояснень наведено на рис.2.

Локальне пояснення надається для одного екземпляру $E_i = \langle e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,J} \rangle$ процесу прийняття рішення та пов'язує першу $e_{i,1}$ та останню $e_{i,J}$ події, що відображають виконання цього процесу.

Тобто локальне пояснення обґрунтовує кінцевий результат для користувача, задаючи зв'язок між вхідними даними та кінцевим результатом $\pi_{i,J}^{i,1}$ у вигляді функціональної залежності $f(e_{i,1}, e_{i,J})$ між подією отримання вхідних даних $e_{i,1}$ та результату $e_{i,J}$:

$$\pi_{i,J}^{i,1} \equiv f(e_{i,1}, e_{i,J}). \quad (1)$$

Групове пояснення містить залежності для підмножини $E^{\text{group}} = \{E_i\}, E^{\text{group}} \subset E$. множини E всіх можливих реалізацій процесу прийняття рішення в інтелектуальній системі. Групове пояснення має вигляд:

$$\begin{aligned} \pi g_m^j &\equiv f(e_j, e_m) | \exists E^{\text{group}} = \{E_i\}: \\ (\exists i): e_{i,j} &\equiv e_j, e_{i,m} \equiv e_m. \end{aligned} \quad (2)$$

Відповідно до (2), групове пояснення містить у собі в якості окремого елемента локальне пояснення в тому випадку, якщо E^{group} містить лише один елемент E_1 :

$$\pi_{i,J}^{i,1} \equiv \pi g_m^j | E^{\text{group}} = \{E_1\}, j = 1, J = m. \quad (3)$$

Глобальне пояснення π_m^j об'єднує всі відомі реалізації процесу отримання рішення в інтелектуальній інформаційній системі:

$$\begin{aligned} \pi_m^j &\equiv f(e_j, e_m): \\ 1. \exists i: e_{i,j} &\equiv e_j, e_{i,m} \equiv e_m, \\ 2. \exists j \exists m: (\forall i) e_{i,j} &\equiv e_j, e_{i,m} \equiv e_m. \end{aligned} \quad (4)$$

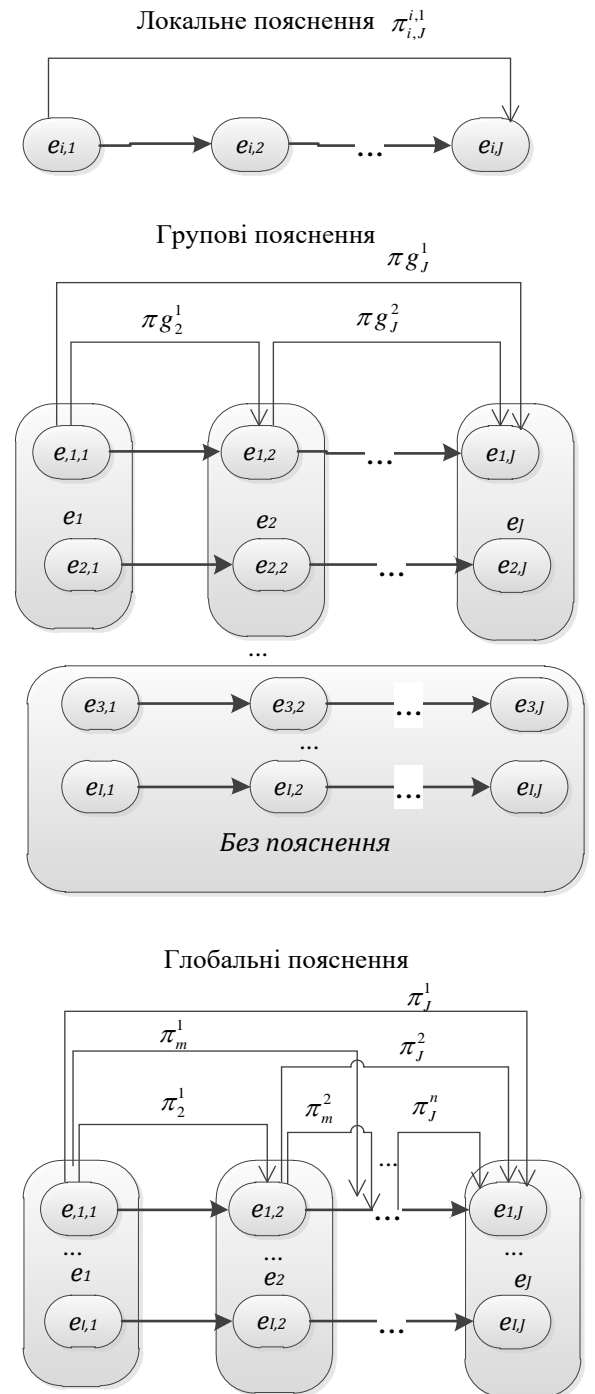


Рис. 2. Локальні, групові та глобальні пояснення

Глобальне пояснення містить залежності у формі умов та обмежень виконання дій процесу прийняття рішення.

Умови (1) визначають, що представлена поясненням залежність є дійсною лише для підмножини реалізацій процесу формування результату. Тому умова має бути актуальною для конкретної реалізації, для

якої застосовується глобальне пояснення. Позначимо умову як πr_m^j .

Тоді πr_m^j може бути використана для пояснення таких E_i реалізацій процесу отримання результату у інтелектуальній системі, для яких виконується:

$$(\forall E_i) \pi r_m^j \equiv \pi_{i,m}^{j,j}. \quad (5)$$

Обмеження виконується для всіх реалізацій процесу прийняття рішення і тому обмеження як глобальне пояснення може бути використано у всіх випадках отримання результату.

Умова (5) фактично відповідає локальному поясненню, тобто:

$$(\forall E_i \in E^{\text{group}}) \pi r_m^j \equiv \pi g_m^j. \quad (6)$$

Таким чином, глобальні пояснення з формальної точки зору поєднують пояснення на основі обмежень виконання дій з отримання результату або відповідних функцій, а також групові та локальні пояснення.

Тому в подальшому будуть розглядатись лише глобальні пояснення π_m^j .

Послідовності глобальних пояснень, наприклад $\Pi' = \langle \pi_2^1, \pi_3^2, \pi_{l-1}^{l-1} \rangle$ або $\Pi'' = \langle \pi_2^1, \pi_3^1, \dots, \pi_l^1 \rangle$ відображають процес прийняття рішення у формі, прозорій для користувача.

Однак з цієї причини пояснення не в повній мірі відображає стани інтелектуальної системи і процес прийняття рішень в цілому. Тому модель пояснення має враховувати стохастичну складову при описі системи, щодо якої формується пояснення, а також можливі зміни ефективності роботи системи в результаті коригування взаємодії з користувачем після отримання пояснення.

Відповідно, при формуванні послідовності пояснень необхідно оцінювати їх ефективність. Така оцінка ефективності може бути в подальшому представлена вагою пояснення w_m^j , що враховує його стохастичний аспект. Виділення ваги дає можливість відібрати кращі за цим показником пояснення із множини можливих.

Оцінка може бути виконана для кожного пояснення в послідовності або ж для всієї послідовності пояснень. В другому випадку може бути виконано формування та порівняння декількох послідовностей пояснень з подальшою динамічною зміною цих послідовностей в залежності від результатів взаємодії з користувачем.

Модель пояснення на локальному, груповому та глобальному рівнях деталізації. Пояснення згідно (4) встановлюють зв'язок між парами подій, що відображають стани інтелектуальної системи. Тобто наступний стан у поясненні залежить від попереднього стану і пояснювальної дії, яка привела до переходів між цими станами. Тобто ми маємо відповідність між станами пояснення s_j та подіями e_j , що відображають процес прийняття рішення. Відповідно, пояснення може бути представлено у вигляді:

$$\pi_m^j \equiv f(s_j, s_m) | \exists e_j \mapsto s_j, | \exists e_m \mapsto s_m. \quad (7)$$

Тоді для вибору найкращого пояснення необхідно оцінити його ефективність. Як було показано вище, локальні та групові пояснення є окремим випадком глобального пояснення. Глобальне ж пояснення містить множини можливих елементарних пояснень π_m^j , що складаються у послідовність Π , яка забезпечує прозорість всього процесу від початкової події e_1 і до кінцевої події e_j . Це свідчить про важливість використати оцінку всього процесу. У випадку кінцевої множини подій процесу, для якого надається рішення, така оцінка матиме вигляд суми (8) або середнього значення (9) оцінок w_m^j окремих пояснень π_m^j .

$$W_{\Pi}^j = \sum_{j,m} w_m^j. \quad (8)$$

$$W_{\Pi}^m = \frac{\sum_{j,m} w_m^j}{|\{w_{j,m}\}|}. \quad (9)$$

Слід зазначити, що внаслідок стохастичних характеристик процесу пояснень оцінка окремого пояснення може бути обчислена на основі ймовірності використання послідовності пояснень в цілому.

У випадку, якщо кількість подій є невідомою (наприклад, для ітеративного процесу формування рішення у взаємодії з користувачем), така оцінка має враховувати в першу чергу важливість поточних пояснень. Для цього зазначена оцінка використовує коефіцієнт γ , що лежить в діапазоні від нуля до 1:

$$W_{\Pi}^m = \sum_{j,m} \frac{\gamma^{j-1} + \gamma^{m-1}}{2} w_m^j. \quad (10)$$

Таким чином, модель послідовності глобальних пояснень має вигляд:

$$M = \{\Pi, W_{\Pi}\}, \quad (11)$$

де $\Pi = \langle \pi_m^1, \dots, \pi_m^j, \dots, \pi_l^{l-1} \rangle$, а W_{Π} обчислюється згідно (8)–(10).

Дана модель об'єднує, як було показано у (3) та (6), локальні та групові пояснення.

Висновки. Запропоновано узагальнену модель пояснення для локального, групового та глобального рівнів деталізації, яка представлено упорядкованою послідовністю зважених залежностей між подіями або станами процесу прийняття рішення в інтелектуальній системі, що дає можливість в рамках глобального пояснення представити локальне пояснення на основі ланцюжку групових пояснень між подіями отримання вхідних даних та результуючого рішення.

У практичному аспекті розроблена модель орієнтована на використання розглянутих підходів побудови пояснень на основі спрощення процесу функціонування інтелектуальної системи та на основі виділення впливу окремих функцій та дій на кінцевий

результат. Деталізація подій процесу прийняття рішення з урахуванням змінних, які характеризують ці події, дає можливість використати підхід до побудови пояснень на основі відомих концепцій та понять у предметній області.

Список літератури

- Engelbrecht Andries P. *Computational Intelligence: An Introduction*. New York: John Wiley & Sons, 2007. 632 p.
- Castelvecchi D. Can we open the black box of AI? *Nature News*. 2016. Vol. 538 (7623). P. 20–23.
- Gunning D., Aha D. DARPA's Explainable Artificial Intelligence (XAI) Program. *AI Magazine*. 2019. Vol. 40 (2). P. 44–58.
- Preece A., Harborne D., Braines D., Tomsett R., Chakraborty S. Stakeholders in Explainable AI. *arXiv:1810.00184*. 2018.
- Gilpin L. H., Bau D., Yuan B. Z., Bajwa A., Specter M., Kagal L. Explaining Explanations: An Overview of Interpretability of Machine Learning. *arXiv:1806.00069*. 2018.
- Miller T. Explanation in artificial intelligence: Insights from the social sciences. *Artificial Intelligence*. 2019. Vol. 267 P. 1–38.
- Zhang Q., Wu N. Y., Zhu S.-C. Interpretable convolutional neural networks. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2018. P. 8827–8836.
- Deng H. Interpreting tree ensembles with intrees. *arXiv:1408.5456*. 2014.
- Чалий С.Ф., Лещинський В.О., Лещинська І.О. Декларативно-темпоральний підхід до побудови пояснень в інтелектуальних інформаційних системах. *Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ»: зб. наук. пр. Темат. вип. Системний аналіз, управління та інформаційні технології*. Харків: НТУ «ХПІ». 2020. № 2 (4). С. 51–56.
- Halpern J. Y., Pearl J. Causes and explanations: A structural-model approach. Part I: Causes. *The British Journal for the Philosophy of Science*. 2005. № 56 (4). P. 843–887.
- Chalyi S., Leshchynskiy V. Temporal representation of causality in the construction of explanations in intelligent systems. *Advanced Information Systems*. Kharkiv: NTU "KhPI", 2020. Vol. 4, № 3. P. 113–117.
- Чалий С.Ф., Лещинський В.О., Лещинська І.О. Моделювання пояснень щодо рекомендованого переліку об'єктів з урахуванням темпорального аспекту вибору користувача. *Системи управління, навігації та зв'язку*. 2019. Том 6, № 58. С. 97–101.

References (transliterated)

- Engelbrecht Andries P. *Computational Intelligence: An Introduction*. NJ, John Wiley & Sons, 2007. 632 p.
- Castelvecchi D. Can we open the black box of AI? *Nature News*. 2016, vol. 538 (7623), pp. 20–23/
- Gunning D., Aha D. DARPA's Explainable Artificial Intelligence (XAI) Program. *AI Magazine*. 2019, no 40 (2), pp. 44–58.
- Preece A., Harborne D., Braines D., Tomsett R., Chakraborty S. Stakeholders in Explainable AI. *arXiv:1810.00184*. 2018.
- Gilpin L. H., Bau D., Yuan B. Z., Bajwa A., Specter M., Kagal L. Explaining Explanations: An Overview of Interpretability of Machine Learning. *arXiv:1806.00069*. 2018.
- Miller T. Explanation in artificial intelligence: Insights from the social sciences. *Artificial Intelligence*. 2019, vol. 267, pp. 1–38.
- Zhang Q., Wu N. Y., Zhu S.-C. Interpretable convolutional neural networks. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2018, pp. 8827–8836.
- Deng H. Interpreting tree ensembles with intrees. *arXiv:1408.5456*. 2014.
- Chalyi S., Leshchynskiy V., Leshchynska I. Deklaratyvno-temporalnyi pidkhdid do pobudovy poiasnen v intelektualnykh informatsiynykh systemakh [Declarative-temporal approach to the construction of explanations in intelligent information systems]. *Visnyk Nats. tekhn. un-tu "KhPI": zb. nauk. pr. Temat. vyp. Systemnyi analiz, upravlinnia ta informatsiini tekhnologii* [Bulletin of the National Technical University "KhPI": a collection of scientific papers. Thematic issue: System analysis, management and information technology]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ, 2020, no. 2(4), pp. 51–56.
- Halpern J. Y., Pearl J. Causes and explanations: A structural-model approach. Part I: Causes. *The British Journal for the Philosophy of Science*. 2005, no. 56 (4), pp. 843–887.
- Chalyi S., Leshchynskiy V. Temporal representation of causality in the construction of explanations in intelligent systems. *Advanced Information Systems*. 2020, vol. 4, no 3, pp. 113–117.
- Chalyi S. F., Leshchynskiy V. O., Leshchynska I. O. Modelyuvannya poiasnen shodo rekomendovanogo pereliku ob'yektiv z urahuvanniam temporalnogo aspektu voboru korystuvacha [Modeling explanations for the recommended list of items based on the temporal dimension of user choice]. *Sistemi upravlinnya, navigatsiyi ta zv'yazku* [Control, Navigation and Communication Systems]. 2019, vol. 6, no 58, pp. 97–101.

Надійшло (received) 01.11.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Чалий Сергій Федорович – доктор технічних наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки, професор кафедри інформаційних управляючих систем, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9982-9091>; e-mail: serhii.chalyi@nure.ua

Лещинський Володимир Олександрович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний університет радіоелектроніки, доцент кафедри програмної інженерії, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8690-5702>; e-mail: volodymyr.leshchynskiy@nure.ua

Chalyi Serhii Fedorovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kharkiv National University of Radio Electronics, Professor of the Department of Information Control System, Kharkiv; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9982-9091>; e-mail: serhii.chalyi@nure.ua

Leshchynskiy Volodymyr Oleksandrovich – PhD, Associate Professor, Kharkiv National University of Radio Electronics, Associate Professor of the Department of Software Engineering, Kharkiv; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8690-5702>; e-mail: volodymyr.leshchynskiy@nure.ua

ЗМІСТ

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ І ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ.....	3
<i>Pavlov A. A., Holovchenko M. N.</i> Modified method of constructing a multivariate linear regression given by a redundant description.....	3
<i>Кончаковська О. С.</i> Використання методу квазіфункцій Гріна – Рвачова у чисельному аналізі однієї електростатичної наноелектромеханічної системи.....	9
<i>Москаленко В. В., Санталова А. Р., Фонта Н. Г.</i> Дослідження нейронних мереж для прогнозування вартості акцій компаній у нестабільній економіці.....	16
<i>Raskin L. G., Suhomlin L. V., Sokolov D. D., Domochka L. V.</i> Assessing the informativeness of the controlled parameters in the task of identifying the state of the system.....	24
<i>Ягун К. В.</i> Застосування кластерного аналізу в мережах Smart Grid.....	32
<i>Шевченко С. В.</i> Конструювання багатокритеріальних рішень задач вибору.....	37
УПРАВЛІННЯ В ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ.....	45
<i>Куценко О. С., Коваленко С. В.</i> Квазіаналітичний метод обернення лінійних динамічних систем.....	45
<i>Akhiezer O. B., Grinberg G. L., Lyubchuk L. M., Yamkovyi K. S.</i> Failure rate regression model building from aggregated data using kernel-based machine learning methods.....	51
<i>Нікуліна О. М., Северин В. П., Шаров В. О.</i> Розробка моделі завадостійкої передачі даних для інформаційної технології оптимізації управління динамічними системами.....	57
УПРАВЛІННЯ В ОРГАНІЗАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ.....	63
<i>Мельников О. С.</i> Дискретно-континуальна модель управління збутом у реальному масштабі часу.....	63
<i>Orekhov S. V., Kopp A. M., Orlovskiy D. L.</i> Example of use of virtual promotion map.....	70
МАТЕМАТИЧНЕ І КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.....	75
<i>Kopp A. M., Orlovskiy D. L.</i> A software tool for quality measurement of business process models using distances in n-dimensional space.....	75
<i>Годлевський М. Д., Малець Д. К.</i> Синтез функції корисності процесу розробки програмного забезпечення ІТ-компанії на основі еталонної моделі SPICE.....	81
<i>Gybkina N. V., Sidorov M. V., Stadnikova H. V.</i> Mathematical modeling of the quasi-stationary processes of viscous mixture mixing in a rectangular area by the R-functions method.....	87
ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ.....	94
<i>Годлевський М. Д., Бурлаков Г. О.</i> Планування розвитку процесу розробки програмного забезпечення на основі метода послідовного аналізу варіантів.....	94
<i>Чалий С. Ф., Лециньський В. О.</i> Модель пояснення в інтелектуальній системі на локальному, груповому та глобальному рівнях деталізації.....	100

CONTENT

SYSTEM ANALYSIS AND DECISION-MAKING THEORY	3
<i>Pavlov A. A., Holovchenko M. N.</i> Modified method of constructing a multivariate linear regression given by a redundant description	3
<i>Konchakovska O. S.</i> Using the Green – Rvachev’s quasifunctions method in the numerical analysis of one electrostatic nanoelectromechanical system	9
<i>Moskalenko V. V., Santalova A. R., Fonta N. G.</i> Study of neural networks for forecasting the value of company shares in an unstable economy	16
<i>Raskin L. G., Suhomlin L. V., Sokolov D. D., Domochka L. V.</i> Assessing the informativeness of the controlled parameters in the task of identifying the state of the system	24
<i>Yahup K. V.</i> Application of cluster analysis in Smart Grid networks	32
<i>Shevchenko S. V.</i> Construction of multi-criteria solutions to selection problems	37
CONTROL IN TECHNICAL SYSTEMS.....	45
<i>Kutsenko O. S., Kovalenko S. V.</i> Quasi-analytic method of linear dynamic systems inversion.....	45
<i>Akhiiezer O. B., Grinberg G. L., Lyubchik L. M., Yankovyi K. S.</i> Failure rate regression model building from aggregated data using kernel-based machine learning methods	51
<i>Nikulina O. M., Severyn V. P., Sharov V. O.</i> Development of a model of interference-resistant data transmission for information technology of control optimization of dynamic systems	57
MANAGEMENT IN ORGANIZATIONAL SYSTEMS.....	63
<i>Melnikov O. S.</i> Discrete-continuous model of sales management in real time	63
<i>Orehov S. V., Kopp A. M., Orlovskiy D. L.</i> Example of use of virtual promotion map.....	70
MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING	75
<i>Kopp A. M., Orlovskiy D. L.</i> A software tool for quality measurement of business process models using distances in n -dimensional space	75
<i>Godlevskiy M. D., Malets D. K.</i> Synthesis of the utility function of the IT company's software development process based on the SPICE reference model	81
<i>Gybkina N. V., Sidorov M. V., Stadnikova H. V.</i> Mathematical modeling of the quasi-stationary processes of viscous mixture mixing in a rectangular area by the R -functions method.....	87
INFORMATION TECHNOLOGY	94
<i>Godlevskiy M. D., Burlakov G. O.</i> Planning the evolution of the software development process based on the method of sequential option analysis	94
<i>Chalyi S., Leshchynskiy V.</i> An explanation model in an intelligent system at the local, group and global levels of detail	100

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ».
СЕРІЯ: СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ, УПРАВЛІННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ
ТЕХНОЛОГІЇ**

Збірник наукових праць

№ 2 (8) 2022

Наукові редактори: М. Д. Годлевський, д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Україна
О. С. Куценко, д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Україна
Технічний редактор: М. І. Безменов, канд. техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Україна

Відповідальний за випуск М. І. Безменов, канд. техн. наук, професор

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ ТА ВИДАВЦЯ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».
Кафедра системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій
Тел.: (057) 707-61-03, (057) 707-66-54; e-mail: Mykola.Bezmenov@khi.edu.ua

Підп. до друку 28.12.2022 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк цифровий. Гарнітура Таймс New Roman. Умов. друк. арк. 9,5. Облік.-вид. арк. 10.
Тираж 100 пр. Зам. № 284. Ціна договірна.

Видавництво «Стильна типографія»
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК № 5493 від 22.08.2017 р.
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А, тел. (057) 754-49-42; e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com