

**О. О. ХОЛОДНЯК**, аспірант, кафедра комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, Україна; e-mail: o.o.kholodniak@khai.edu; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-1012-7361>

**О. В. ПРОХОРОВ**, доктор технічних наук, професор, кафедра комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, Україна; e-mail: o.prokhorov@khai.edu; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4680-4082>

## МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛІЗОВАНИМИ НАВЧАЛЬНИМИ ТРАЕКТОРІЯМИ НА ОСНОВІ ІНТЕГРОВАНОГО IRT-FORGETTING ПІДХОДУ

Незважаючи на широке впровадження сучасних систем управління навчанням, більшість таких систем спрямовано на організацію доступу до контенту й оцінювання результатів, проте поза увагою залишається формалізоване моделювання індивідуальних навчальних підходів і динаміки забування знань. У роботі представлено комплекс моделей і методів для адаптивного навчання, розроблений у межах платформи FAHRAI (Framework for Adaptive Hierarchical Review and Instruction). Запропоновано такі основні компоненти: (1) інтегрована модель, що мультиплікативно поєднує двопараметричну модель теорії відгуку на завдання (IRT 2PL) із функцією утримання в пам'яті й забезпечує покращену калібрацію порівняно з класичною IRT; (2) динамічна модель стабільності пам'яті з композитним показником якості відповіді й контекстно-залежним множителем; (3) метод ієрархічного відбору навчальних завдань із багаторівневою системою стратегій і контекстно-залежними вагами композитного бала пріоритизації; (4) метод застосування довірчого інтервалу Вілсона для статистично надійного оцінювання рівня засвоєння знань, що суттєво знижує частку хибнопозитивних рішень порівняно з наївною точністю; (5) композитна метрика готовності, що інтегрує параметри IRT, утримання в пам'яті знань і статистичну надійність оцінки. Для кожної моделі наведено формальний опис, теоретичне обґрунтування й числові приклади. Запропонований комплекс моделей і методів формує цілісну теоретичну основу для побудови адаптивних систем навчання, що дає змогу підвищити точність прогнозування навчальних результатів, ефективність планування повторень і надійність оцінювання індивідуального прогресу учнів.

**Ключові слова:** персоналізовані навчальні траєкторії, адаптивне навчання, теорія відгуку на завдання, інтервальне повторення, зона найближчого розвитку, довірчий інтервал Вілсона, персоналізація навчання.

**1. Вступ.** Результати дослідження PISA-2022 свідчать про те, що 31 % учнів у країнах ОЕСР не досягають базового рівня математичної грамотності [1]. Ця тенденція вказує на системну неефективність традиційних підходів до навчання й підкреслює необхідність адаптивних технологій. Метааналіз К. ВанЛена [2] продемонстрував ефективність інтелектуальних систем навчання, засвідчивши при цьому перевагу над індивідуальним репетиторством ( $d = 0.76$ ) і традиційними технологіями. Сучасні системи управління навчанням (Learning Management System, LMS) переважно орієнтовані на підхід «one-size-fits-all» [2], забезпечуючи уніфіковану подачу навчального контенту без глибокої адаптації до індивідуальних характеристик здобувачів освіти та ігноруючи при цьому три головні висновки когнітивної науки. По-перше, не береться до уваги концепція зони найближчого розвитку ZPD (Zone of Proximal Development) Л. Виготського [3], згідно з якою освітній процес є найбільш ефективним, коли рівень складності навчальних завдань помірно перевищує рівень поточної компетентності учня. По-друге, поза увагою залишаються фундаментальні закономірності когнітивної психології, зокрема крива забування Г. Еббінгауза [4, 5], графік якої підтверджує, що інформація із часом втрачається з пам'яті, передусім за відсутності повторень і практичного значення здобутих знань. Цей принцип підтверджено метааналізом Н. Чепеди й співавторів [6], які на основі 317 експериментів довели ефективність розподілених повторень ( $d = 0.46$ ) на закріплення знань. По-третє, не враховується потреба в статистично достовірному оцінюванні рівня знань в умовах недостатньої кількості спостережень [7, 8].

Наявні адаптивні платформи реалізують лише окремі аспекти персоналізації: IRT-платформи не враховують забування, системи інтервального повторення, як-от SM-2 [9], не моделюють рівень знань учня, а статистичні методи оцінювання не інтегровані з когнітивними моделями. Така фрагментованість обмежує ефективність кожного підходу окремо.

### 2. Огляд літератури та постановка проблеми.

**Формалізація ZPD за допомогою IRT.** Концепція зони найближчого розвитку [3] визначає оптимальний діапазон складності завдань для навчання. С. Чайклін [10] довів, що операціоналізація цього підходу потребує кількісного апарату (зокрема, такий як IRT), що дає змогу одночасно моделювати рівень знань учня і складність завдання. Платформа IRT [11, 12] забезпечує відповідний формальний апарат: у двопараметричній моделі (2PL) зона найближчого розвитку ZPD задається через параметр складності, адаптований до поточного рівня здібностей, тобто, що відповідає принципу бажаних труднощів (desirable difficulties) [13]. Сучасні дослідження доводять, що моделі глибокого відстеження знань (Deep Knowledge Tracing) можна розглядати як неявну реалізацію динамічної багатовимірної моделі IRT [22], що додатково обґрунтовує доцільність використання IRT як основи для адаптивних систем навчання. Проте класична IRT є статичною, оскільки не враховує динаміку забування інформації між навчальними сесіями.

**Моделі забування та інтервальне повторення.** Крива забування Г. Еббінгауза [4], дані якої було підтверджено реплікацією Мюрре й Дроса [5], описує експоненціальний характер зниження рівня утримання

© Холодняк О. О., Прохоров О. В., 2026



Дослідницька стаття: Цю статтю опубліковано видавництвом *НТУ «ХПІ»* у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Commons Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). Конфлікт інтересів: Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



знань у пам'яті: Г. Роедігер і Д. Карпіке [14] встановили, що тестування (ефект тестування) є більш ефективним, ніж повторне читання. Модель SM-2 [9] оснований на дискретній шкалі й лінійному оновленні фактора складності, а алгоритм FRSRS (Free Spaced Repetition Scheduler) [15] – на безперервній DSR-моделі, формальне обґрунтування й оптимізацію якої через стохастичний алгоритм найкоротшого шляху наведено в роботі Дж. Є та співавторів [21]. Сучасні розширення цього напрямку, зокрема LECTOR [20], інтегрують методи великих мовних моделей для семантичного аналізу понять. Проте жодна із цих моделей не інтегрована з IRT.

**Статистичне оцінювання прогресу.** Довірчий інтервал Вілсона [7] забезпечує достовірність оцінювання біноміальної частки за малих вибірок. Дослідження А. Агресті й В. Коулла [8], Л. Брауна та ін. [15] підтвердили переваги цього методу для практичних застосувань над інтервалом Вальда й іншими підходами.

**Проблема фрагментованості.** Спільним недоліком наявних підходів є фрагментованість: IRT-платформи не враховують забування, системи інтервального повторення не моделюють рівень учня, а статистичні методи оцінювання не інтегровані з когнітивними моделями. Наша платформа Framework for Adaptive Hierarchical Review and Instruction (FAHRAI) пропонує інтегрований підхід, що об'єднує ці компоненти в комплекс формальних моделей.

**3. Мета та завдання дослідження.** Метою цієї роботи є вирішення проблеми фрагментованості наявних підходів шляхом розроблення інтегрованого комплексу формальних моделей і методів адаптивного навчання. Для досягнення цієї мети сформульовано такі завдання:

- розробити інтегровану модель оцінювання ймовірності правильної відповіді, що поєднує двопараметричну модель теорії відгуку на завдання (IRT 2PL) із функцією утримання інформації в пам'яті в межах комплексу формальних моделей;
- розробити динамічну модель стабільності пам'яті, що адаптивно оновлює параметри повторення на основі композитного індикатора якості відповіді з огляду на контекстуальні фактори;
- обґрунтувати й формалізувати метод багаторівневого ієрархічного відбору навчальних завдань, що використовує контекстно-залежні ваги композитного індексу пріоритизації;
- обґрунтувати застосування довірчого інтервалу Вілсона для статистично надійного оцінювання засвоєння навчального матеріалу в адаптивних системах навчання;
- розробити інтегровану метрику готовності до підсумкового оцінювання, що поєднує оцінювання рівня знань на основі IRT, динаміку утримання інформації в пам'яті й статистичну надійність оцінювання.

**Матеріали та методи дослідження.** У роботі досліджуються процеси адаптивного управління персоналізованими навчальними траєкторіями та розробляються методи і моделі їх інтелектуального управління, реалізовані в платформі FAHRAI.

**Гіпотеза** дослідження полягає в тому, що інтеграція психометричних моделей (IRT 2PL), когнітивних моделей забування (експоненціальна крива забування)

й статистичних методів оцінювання прогресу (довірчий інтервал Вілсона) у єдиний комплекс формальних моделей забезпечить підвищення точності та надійності оцінювання і прогнозування в адаптивному навчанні порівняно з їх фрагментарним застосуванням.

У дослідженні були використані такі методи й теоретичні засади:

**Теорія відгуку на завдання (IRT, модель 2PL)** [11, 12] – для формалізації зони найближчого розвитку й оцінювання латентного параметра здібностей  $\theta$ . Двопараметрична модель вибрана завдяки балансу між описовою потужністю та ідентифікованістю параметрів.

**Експоненціальна крива забування** [4, 5] – для моделювання динаміки утримання інформації в пам'яті  $R(t) = R_0 \cdot e^{-t/S}$ , де  $R(t) \in [0; 1]$  – частка раніше засвоєної інформації, що зберігається в пам'яті в момент часу  $t$  (у днях) від останнього успішного повторення;  $R_0 = R(0) = 1$  – початкове значення утримання одразу після повторення;  $t$  – час (у днях), що минув від останнього повторення;  $S$  – параметр стабільності пам'яті (у днях), який динамічно оновлюється після кожної взаємодії та визначає швидкість забування.

**Довірчий інтервал Вілсона** [7, 8] – для статистично надійного оцінювання рівня засвоєння за малих вибірок, що забезпечує коректне покриття довірчого інтервалу на відміну від класичного методу Вальда.

**Ієрархічна багатокритеріальна оптимізація** – для формалізації задачі відбору завдань як упорядкованої за пріоритетом послідовності перевірок стратегій із композитним індексом пріоритизації.

**Числове моделювання** – для верифікації теоретичних властивостей запропонованих моделей через обчислювальні приклади з конкретними значеннями параметрів.

Апробацію запропонованих моделей було проведено в мережі автошкіл, де платформа FAHRAI використовувалася для підготовки до теоретичного іспиту з правил дорожнього руху. Такі аспекти, як структурована база знань (правила дорожнього руху), наявність стандартизованого оцінювання (офіційний іспит) і студентська аудиторія з різним рівнем базової підготовки, темпами навчання й когнітивними особливостями, дали змогу вибрати цю предметну область для дослідження.

#### 4. Результати.

##### 4.1 Концепція адаптивного навчання FAHRAI.

**Замкнений цикл адаптації.** Платформа FAHRAI реалізує замкнений цикл адаптивного навчання із чотирма фазами: **Фаза оцінювання.** Поточний стан знань студента визначається шляхом інтегрованого аналізу трьох вимірів: параметра здібностей  $\theta$  з моделі IRT, рівня утримання знань  $R$  із кривої забування й статистично надійної оцінки засвоєння  $p^-$  за методом Вілсона.

**Фаза відбору.** На основі результатів оцінювання вибирається оптимальне навчальне завдання через ієрархію пріоритетів.

**Фаза взаємодії.** Вибране завдання надається студенту, відповіді збираються разом із метаданими: правильність, час відповіді й суб'єктивний рівень упевненості.

**Фаза оновлення.** Оновлюються всі параметри моделі студента:  $\theta$  через IRT, стабільність  $S$  через модель динамічної стабільності та  $p^-$  шляхом додавання нового спостереження. Загальний цикл описується як перехід станів:

$$State_{t+1} = f(State_t, Task_t, Response_t),$$

де  $State_t$  – вектор стану моделі студента на кроці  $t$ ;  $Task_t$  – вибране завдання;  $Response_t$  – результат відповіді. Адаптація відбувається після кожної взаємодії.

**Модульна архітектура.** Архітектура FAHRAI побудована на принципі модульності. Платформа складається із шести концептуальних модулів.

**Модуль 1: аналізатор стану (State Analyzer).** Підтримує актуальну модель знань студента. Після кожної відповіді оновлює параметр здібностей  $\theta$  із моделі IRT, рівень утримання  $R$  і нижню межу Вілсона  $p^-$ . Вихідний вектор стану:

$$State(s, j) = (\theta_s, R_j(t), p_j^-, n_j, k_j, S_j, t_j^{\text{last}}),$$

де  $\theta_s$  – параметр здібностей студента  $s$ ;  $R_j(t)$  – рівень утримання для теми  $j$  у момент часу  $t$ ;  $p^-$  – нижня межа Вілсона;  $n_j$  – кількість спроб;  $k_j$  – кількість правильних відповідей;  $S_j$  – стабільність пам'яті,  $t_j^{\text{last}}$  – час останньої взаємодії. Цей модуль слугує спільним інтерфейсом для всіх інших модулів.

**Модуль 2: селектор завдань (Task Selector).** Реалізує ієрархічний метод відбору, послідовно перевіряючи стратегії та виконуючи ранжування кандидатів за композитним балом:

$$Priority = w_c \cdot C + w_g \cdot G + w_t \cdot T + w_k \cdot K + w_p \cdot P.$$

**Модуль 3: планувальник повторень (Repetition Scheduler).** Оновлює стабільність  $S$  через модель динамічної стабільності, обчислює оптимальний інтервал  $I = -S \cdot \ln(R_{\text{target}})$  і підтримує чергу пріоритетів повторень.

**Модуль 4: оцінювач прогресу (Progress Evaluator).** Обчислює  $p^-$  за методом Вілсона й визначає засвоєння за подвійним критерієм:  $p^- \geq 0.70$  та  $n \geq 5$ . Обчислює швидкість навчання  $LV = \Delta p^- / \Delta t$  та інтегральний бал упевненості  $CS$ .

**Модуль 5: механізм персоналізації (Personalization Engine).** Адаптує параметри до індивідуальних характеристик студента: ширину ZPD  $\Delta_{ZPD}$ , цільове утримання  $R_{\text{target}}$  і темп навчання.

**Модуль 6: предиктор готовності (Readiness Predictor).** Обчислює інтегровану оцінку готовності до підсумкового оцінювання.

**Синергія модулів.** Фундаментальна перевага архітектури FAHRAI полягає в узгодженій взаємодії її модулів:

State Analyzer надає Task Selector багатовимірну картину, що охоплює рівень знань  $\theta$ , ступінь забування  $R$  і надійність оцінки  $p^-$ .

Repetition Scheduler використовує параметр  $\theta$  для визначення початкової стабільності нових тем, відображаючи вплив попередніх знань на швидкість забування [16].

Progress Evaluator формує консервативну оцінку параметра  $p^-$ , яка запобігає передчасним переходам на основі статистично недостатніх даних.

Personalization Engine адаптує параметри всіх інших модулів: ширину ZPD, цільове утримання й темп навчання.

Readiness Predictor інтегрує виходи всіх модулів у єдину прогностичну метрику.

Теоретичний аналіз указує на суперадитивний ефект інтеграції: сума внесків окремих компонентів є меншою за внесок інтегрованої системи, що зумовлено узгодженим використанням вихідних даних кожного модуля іншими модулями.

#### 4.2 Інтегрована модель IRT-утримання.

**Двопараметрична модель IRT і формалізація ZPD.** У двопараметричній моделі IRT (2PL) імовірність правильної відповіді визначається як

$$P_{\text{IRT}}(\theta, b, a) = \frac{1}{1 + e^{-a(\theta - b)}},$$

де  $\theta$  – латентний параметр здібностей студента,  $\theta \in [-3, 3]$ ;  $b$  – складність завдання;  $a > 0$  – дискримінативність. Коли  $\theta = b$ , імовірність правильної відповіді дорівнює 0.5.

Зона найближчого розвитку формалізується через цільову складність:

$$b^* = \theta + \Delta_{ZPD},$$

де  $\Delta_{ZPD} \in [0.05, 0.10]$  логітів відповідає ймовірності правильної відповіді 48–49 %, що узгоджується з принципом бажаних труднощів (desirable difficulties) [13]. Параметр  $\Delta_{ZPD}$  є адаптивним і регулюється модулем персоналізації.

На рис. 1 показано характеристичні криві завдань: завдання з вищим параметром  $a$  мають більш стрімкі криві (вони краще розрізняють студентів поблизу порогового значення  $b$ ), тоді як завдання з вищим параметром  $b$  зміщені вправо.

Інформативність завдання для вимірювання параметра  $\theta$  визначається функцією інформації:

$$I(\theta) = a^2 \cdot P(\theta) \cdot (1 - P(\theta)).$$

Максимальна інформація досягається, якщо  $\theta = b$ , де невизначеність щодо результату є найвищою.

**Інтегрована модель.** Центральна теоретична інновація FAHRAI – це інтегрована модель IRT–forgetting, яка поєднує IRT із динамікою забування в єдиному предикторі ймовірності правильної відповіді:

$$P(\text{correct} | \theta, b, a, R) = R \cdot P_{\text{IRT}}(\theta, b, a) + (1 - R) \cdot P_{\text{guess}},$$

де  $R = R_0 \times e^{-t/S}$  – рівень утримання згідно з кривою забування;  $P_{\text{guess}}$  – імовірність угадування (залежить від типу завдання).

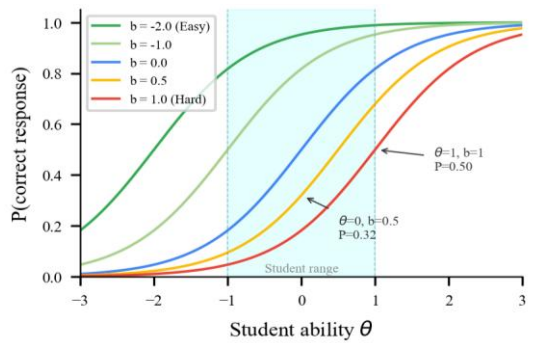


Рис. 1. Характеристичні криві завдань у моделі IRT 2PL ( $a = 1.5$ )

Інтерпретація моделі є прозорою: з імовірністю  $R$  студент утримає інформацію в пам'яті – це означає, що шанс правильної відповіді визначається моделлю IRT; з імовірністю  $(1 - R)$  інформацію студент забуде – із цього виходить, що йому доведеться лише вгадувати.

Модель відображає когнітивну реальність: студент із високим параметром  $\theta$  може помилитися через забування ( $R \rightarrow 0$ ), водночас студент із низьким параметром  $\theta$  може вгадати правильно, навіть якщо забув інформацію.

**Числовий приклад.** Розглянемо студента з такими параметрами:  $\theta = 1.5$  та завдання з  $b = 1.2$ ,  $a = 1.0$ . Імовірність за IRT:

$$P_{\text{IRT}} = \frac{1}{1 + e^{-1.0 \cdot (1.5 - 1.2)}} = \frac{1}{1 + e^{-0.2}} = 0.574.$$

**Новий матеріал** ( $R = 0.95$ , тест із множинним вибором,  $P_{\text{guess}} = 0.25$ ):

$$P = 0.95 \times 0.574 + 0.05 \times 0.25 = 0.558.$$

Після тривалої перерви ( $R = 0.061$ ):

$$P = 0.061 \times 0.574 + 0.939 \times 0.25 = 0.270.$$

Статична IRT прогнозувала б  $P = 0.574$  в обох випадках, значно завищуючи ймовірність після тривалої перерви. Інтегрована модель коректно відображає зменшення ймовірності з 0.558 до 0.270.

На рис. 2 показано криві забування: якщо  $S = 1$  день, то рівень утримання інформації знижується до 0.37 протягом першої доби, а якщо  $S = 10$  днів – лише до 0.90.

**Теоретичні переваги інтегрованої моделі.** Інтегрована модель теоретично перевершує як статичну IRT, так і лінійну комбінацію підходів IRT та моделі забування (IRT-forgetting). Мультиплікативна структура  $R \cdot P_{\text{IRT}} + (1 - R) \cdot P_{\text{guess}}$  має суттєву перевагу над адитивною: вона коректно моделює механізм забування як «фільтр», через який проходить здібність. Коли  $R = 1$ , модель зводиться до класичної IRT, а коли

$R = 0$  – до базової ймовірності вгадування. Порівняльний аналіз із чотирма альтернативними моделями (статична IRT, лише модель забування, лінійна комбінація та інтегрована модель) підтверджує перевагу запропонованого підходу щодо дискримінативної здатності й калібрування.

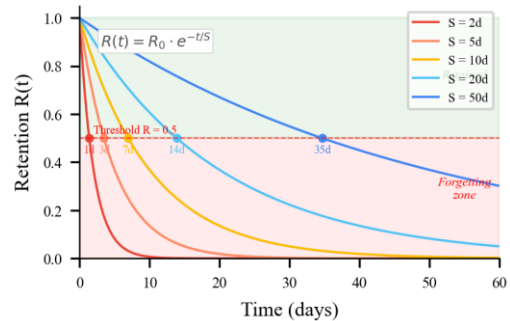


Рис. 2. Криві забування для різних значень стабільності  $S$

На рис. 3 візуалізовано теоретичну розбіжність між моделями: найбільша відмінність спостерігається за тривалих інтервалів із моменту останнього повторення, де статична модель IRT систематично завищує ймовірність.

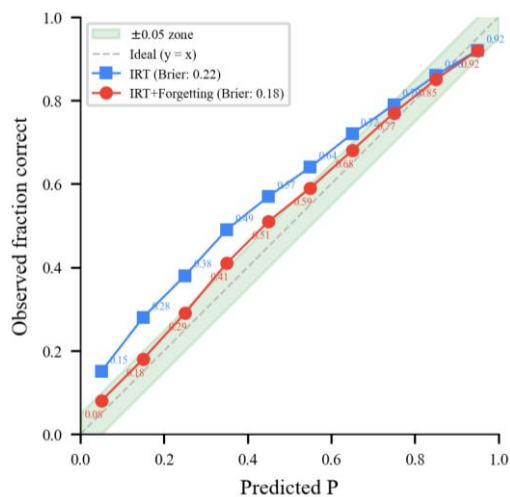


Рис. 3. Порівняння прогнозів інтегрованої моделі IRT-forgetting та статичної IRT

**Оновлення параметра здібностей.** Параметр  $\theta$  оновлюється після кожної відповіді через адаптивний механізм: після правильної відповіді  $\theta$  зростає пропорційно до несподіваності успіху (правильна відповідь на складне завдання дає більший приріст), а після неправильної – спадає. Швидкість оновлення зменшується зі зростанням кількості спостережень, забезпечуючи стабілізацію  $\theta$  за умови достатнього обсягу даних.

### 4.3 Модель динамічної стабільності пам'яті.

**Мотивація.** Класична крива забування з фіксованою стабільністю  $S$  не враховує того, що  $S$  змінюється з кожним повторенням: успішне повторення покращує пам'ять, тоді як неуспішне – послаблює її. Модель SM-2 [9] використовує дискретну шкалу й лінійні оновлення. У алгоритмі FRSR [21] запропоновано неперервну модель DSR, але без інтеграції з IRT. Модель динамічної стабільності пам'яті FAHRAI

поєднує переваги обох підходів, інтегруючи оновлення стабільності з параметрами IRT.

**Оновлення стабільності.** Після успішного повторення стабільність оновлюється:

$$S_{\text{new}} = S_{\text{old}} \cdot (1 + \eta \cdot q \cdot \text{multiplier}(t, S_{\text{old}})),$$

де  $\eta > 0$  – базова швидкість навчання;  $q \in [0, 1]$  – показник якості відповіді; *multiplier* – контекстно-залежний множник.

**Показник якості відповіді.** Якість відповіді обчислюється як зважена сума трьох компонентів:

$$q = w_c \cdot c + w_t \cdot t_{\text{norm}} + w_{\text{conf}} \cdot \text{conf},$$

де  $c \in \{0, 1\}$  – правильність відповіді;  $t_{\text{norm}} = \max(0, 1 - t_{\text{resp}} / t_{\text{max}})$  – нормалізований час відповіді; *conf*  $\in [0, 1]$  – самооцінка впевненості. Правильність відповіді *c* має найвищу вагу як найбільш інформативний показник стану знань. Час відповіді відображає ступінь автоматизації навички [14]. Самооцінка впевненості додає інформацію про метакогнітивний стан студента [17].

**Контекстний множник.** Множник визначає ефективність повторення залежно від рівня утримання знань на момент повторення:

$$\text{multiplier}(t, S_{\text{old}}) = \begin{cases} \alpha_{\text{early}}, & \text{if } R(t) > R_{\text{high}} \text{ (early repetition),} \\ 1.0, & \text{if } R(t) \in [R_{\text{low}}, R_{\text{high}}], \\ \alpha_{\text{late}}, & \text{if } R(t) < R_{\text{low}} \text{ (late repetition),} \end{cases}$$

де  $0 < \alpha_{\text{late}} < \alpha_{\text{early}} < 1$ .

Три зони мають когнітивну інтерпретацію. Коли  $R > R_{\text{high}}$  (раннє повторення), ефект зміцнення обмежений ефектом стелі (ceiling effect). Коли  $R \in [R_{\text{low}}, R_{\text{high}}]$  (оптимальне вікно), пригадування потребує зусиль, але все ще є можливим, що максимізує ефект тестування (testing effect) [14]. Коли  $R < R_{\text{low}}$ , інформація значною мірою забута й потребує повторного вивчення.

**Неуспішні відповіді.** Для неуспішних відповідей ( $c = 0$ ) стабільність зменшується:

$$S_{\text{new}} = \max(S_{\text{min}}, S_{\text{old}} \cdot (1 - \lambda \cdot (1 - q))),$$

де  $\lambda \in (0, 1)$  – коефіцієнт зменшення стабільності в разі помилки;  $S_{\text{min}}$  – мінімальне значення, яке запобігає колапсу до нульових інтервалів.

**Початкова стабільність.** Для нових тем початкова стабільність урахує загальний рівень підготовки студента:

$$S_0 = S_{\text{base}} \cdot \max(0.5, \min(2.0, \theta / b_{\text{avg}})),$$

де  $S_{\text{base}}$  – базова стабільність для студента середнього рівня;  $b_{\text{avg}}$  – середня складність завдань для теми. Студенти з вищим параметром  $\theta$  отримують більшу початкову стабільність, що відображає вплив попередніх знань на швидкість забування [16].

**Метод інтервального повторення.** Оптимальний інтервал до наступного повторення визначається аналітично:

$$I = -S \cdot \ln(R_{\text{target}}).$$

Цільове утримання  $R_{\text{target}}$  є адаптивним:

$$R_{\text{target}}(q) = R_{\text{base}} + \delta \cdot (q - 0.5),$$

де  $R_{\text{base}}$  – базове цільове утримання;  $\delta$  – коефіцієнт адаптації. Після високоякісної відповіді  $R_{\text{target}}$  зростає і повторення відкладається далі, а після низькоякісної – спадає і повторення наближається.

На рис. 4 показано, як стабільність  $S$  зростає з кожним успішним повторенням, тоді як рівень утримання  $R$  коливається між повтореннями.

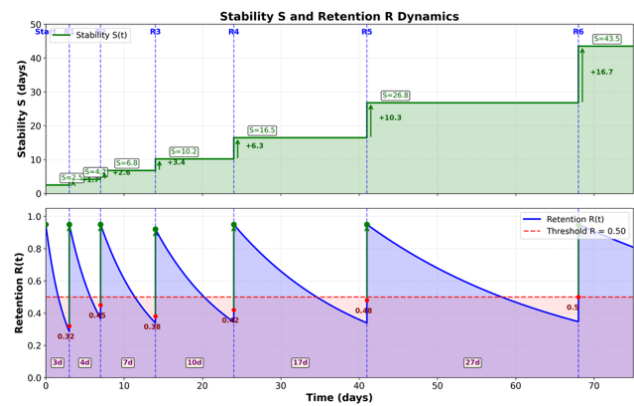


Рис. 4. Динаміка стабільності  $S$  та утримання  $R$  під час послідовних повторень

Теоретичне порівняння з наявними підходами вказує на те, що модель динамічної стабільності пам'яті FANRAI має структурні переваги над SM-2 (неперервна модель замість дискретної, інтеграція з IRT) та над FRSR (контекстно-залежний множник, композитний показник якості).

#### 4.4 Ієрархічний відбір завдань.

**Мотивація ієрархічного підходу.** Відбір оптимального навчального завдання є центральною проблемою адаптивної системи. Наївний підхід – завжди вибирати завдання в ZPD – не враховує необхідності повторення, ремедіації, дотримання пререквізитів і підтримання мотивації.

Метод відбору завдань FANRAI розв'язує цю задачу багатокритеріальної оптимізації через ієрархію пріоритетів: перш ніж рухатися вперед (ZPD), необхідно забезпечити міцність фундаменту (пререквізити, утримання). Формально визначається послідовність перевірок  $C_1, C_2, \dots, C_K$ , де кожна  $C_i$  визначає, чи наявні завдання, що задовольняють умови відповідної стратегії. Активується перша стратегія (з найвищим пріоритетом), для якої знайдено кандидатів.

**Стратегії відбору. Стратегія 1: перевірка пререквізитів.** Пріоритет: найвищий. Умова: існує тема  $j$ , що є пререквізитом для поточного навчального

блоку, і  $p_j^- < \tau_{pre}$  або  $R_j(t) < R_{pre}$ . Незасвоєні пререквізити суттєво знижують імовірність успішного засвоєння залежних тем [18].

**Стратегія 2: критичне утримання.** Пріоритет: високий. Умова:  $R_j(t) \in [R_{low}, R_{high}]$  та  $p_j^- \geq \tau_{pre}$ . Цей діапазон утримання є оптимальним для повторення: пригадування потребує зусиль, але все ще є можливим, що максимізує ефект тестування [14].

**Стратегія 3: ремедіація слабких місць.** Пріоритет: середньо-високий. Умова:  $p_j^- < \tau_{pre}$  та утримання є вищим за порогове значення. Проблема полягає в поверхневому початковому розумінні, а не в забуванні.

**Стратегія 4: дослідження нового матеріалу.** Пріоритет: середній. Частина сесії приділено темам із невеликою кількістю взаємодій для калібрування моделі IRT та підтримання мотивації через новизну.

**Стратегія 5: кандидати ZPD.** Пріоритет: середньо-низький. Умова:  $b_j \in [\theta + \Delta_{ZPD} - \varepsilon, \theta + \Delta_{ZPD} + \varepsilon]$ .

Завдання в ZPD забезпечують оптимальне засвоєння нового матеріалу [3]. Порівняно низький пріоритет пояснюється тим, що продуктивне вивчення нового матеріалу можливе лише за умови забезпечення сформованої системи базових знань.

**Стратегія 6: випадковий резерв.** Пріоритет: найнижчий. Активується за відсутності кандидатів для інших стратегій.

На рис. 5 показано структуру ієрархії та послідовність перевірок.

**Композитний бал пріоритизації.** У межах активної стратегії виконується ранжування кандидатів за композитним балом:

$$Priority = w_c \cdot C + w_g \cdot G + w_t \cdot T + w_k \cdot K + w_p \cdot P,$$

де п'ять компонентів відображають різні аспекти пріоритету:

$$C = 1 - R(t) \text{ – критичність утримання;}$$

$$G = \exp\left(-\frac{(b - \theta - \Delta_{ZPD})^2}{2\sigma_{ZPD}^2}\right) \text{ – бал ZPD: гауссове}$$

ядро, що оцінює відповідність складності завдання зоні найближчого розвитку;

$$T = \max(0, 1 - R(t) / R_{target}) \text{ – часова терміновість;}$$

$$K = 1 - p^- \text{ – дефіцит знань;}$$

$$P \in \{0, 1\} \text{ – пріоритет пререквізитів.}$$

**Контекстно-залежні ваги.** Ваги компонентів залежать від активної стратегії (табл. 1). Для стратегії пререквізитів домінує  $w_p$ ; для критичного утримання –  $w_c$  і  $w_t$ ; для ремедіації –  $w_k$ ; для дослідження та ZPD –  $w_g$ . Стратегія випадкового резерву використовує рівномірні ваги.

**Числовий приклад.** Студент із  $\theta = 1.0$ ,  $\Delta_{ZPD} = 0.08$ ,  $\sigma_{ZPD} = 0.35$ . Завдання:  $b = 1.1$ ,  $R = 0.72$ ,  $p^- = 0.65$ . Стратегія – ZPD (5).

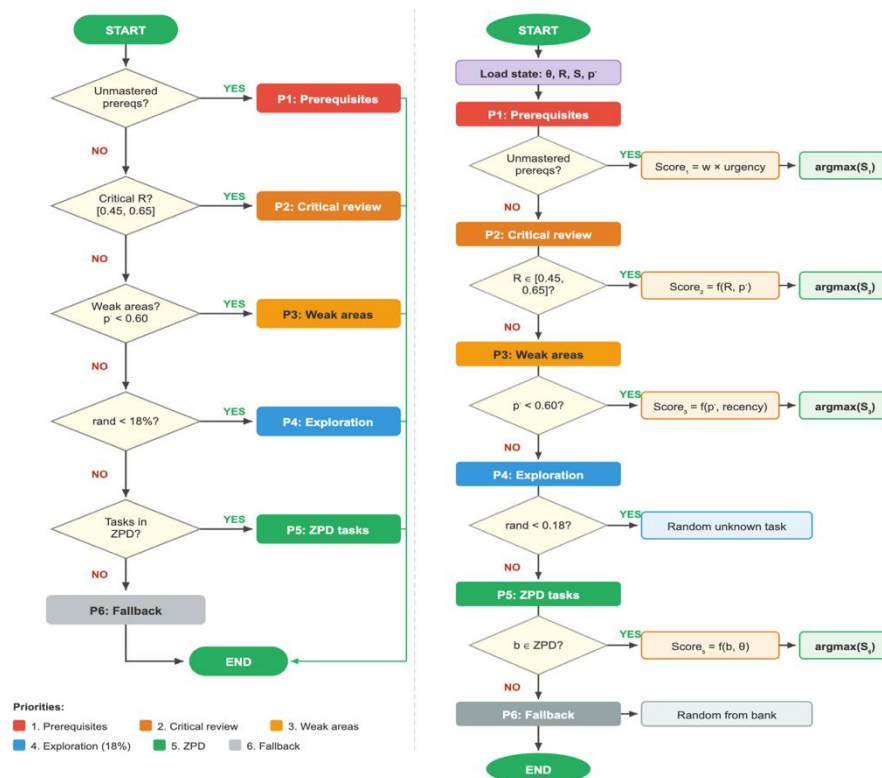


Рис. 5. Багаторівнева ієрархія стратегій та логіка відбору завдань

Обчислення компонентів:  $C = 1 - 0.72 = 0.28$ ,  
 $G = \exp(-(1.1 - 1.0 - 0.08)^2 / (2 \cdot 0.35^2)) = 0.998$ ,  
 $T = \max(0, 1 - 0.72 / 0.85) = 0.153$ ,  $K = 1 - 0.65 = 0.35$ ,  
 $P = 0$ . Композитний бал:  
 $Priority = 0.10 \cdot 0.28 + 0.50 \cdot 0.998 + 0.10 \cdot 0.153 + 0.20 \cdot 0.35 + 0.10 \cdot 0 = 0.612$ .

Для порівняння: завдання з  $b = 1.5$  (показник значно вищий за ZPD) має  $G = 0.487$ , що дає  $Priority = 0.380$  – це показник є суттєво нижчим. Це демонструє ефективність гауссового ядра для фокусування відбору на завданнях оптимальної складності.

Таблиця 1 – Ваги композитного балу для різних стратегій

Стратегія	$w_c$	$w_g$	$w_t$	$w_k$	$w_p$
Пререквізити	0.10	0.05	0.10	0.25	<b>0.50</b>
Критичне утримання	<b>0.40</b>	0.10	<b>0.30</b>	0.15	0.05
Ремедіація	0.10	0.15	0.10	<b>0.55</b>	0.10
Дослідження	0.05	<b>0.50</b>	0.05	0.10	0.30
ZPD	0.10	<b>0.50</b>	0.10	0.20	0.10
Випадковий	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20

**4.5 Статистично надійне оцінювання прогресу (Wilson CI).**

**Проблема наївної точності.** Показник  $\hat{p} = c / n$  за умови малих  $n$  призводить до систематичних хибно-позитивних рішень. Студент із трьома правильними відповідями ( $c = 3$ ) із чотирьох ( $n = 4$ ) отримує  $\hat{p} = 0.75$ , хоча довірчий інтервал, що становить 95 %, має ширину, більшу за 0.50. В адаптивних системах хибно-опозитивне рішення про засвоєння призводить до передчасного переходу до наступних тем і накопичення прогалин у знаннях.

**Довірчий інтервал Вілсона (Wilson confidence interval).** FAHRAI використовує нижню межу довірчого інтервалу Вілсона [7]:

$$p^- = \frac{1}{1 + z^2 / n} \left[ \hat{p} + \frac{z^2}{2n} - z \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n} + \frac{z^2}{4n^2}} \right],$$

де  $z = 1.96$  для 95 % рівня довіри. На відміну від інтервалу Вальда (Wald), метод Вілсона забезпечує коректне покриття навіть за умови екстремальних  $\hat{p}$  і малих  $n$  [8]. Значення  $p^-$  відповідає на запитання: яке найнижче значення справжньої ймовірності правильної відповіді узгоджується з даними?

**Подвійний критерій засвоєння.** Компонент знань (КЗ) вважається засвоєним, коли одночасно виконуються дві умови:  $p^- \geq \tau_{mastery}$ , та  $n \geq n_{min}$ .

Мінімальна вимога  $n \geq n_{min}$  запобігає ухваленню рішень на основі обмежених даних. Порогове значення  $p^- \geq \tau_{mastery}$  означає, що навіть у найгіршому статистично обґрунтованому випадку ймовірність правильної відповіді перевищує задане значення.

**Динаміка засвоєння.** Для унаочнення розглянемо типову траєкторію засвоєння (табл. 2). Якщо  $n = 6$ , то наївна точність  $\hat{p} = 0.67$  може створити враження прогресу, але  $p^- = 0.35$  – стверджувати про засвоєння зарано. Лише за достатньої кількості спостережень нижня межа Вілсона досягає порогового значення засвоєння. На рис. 6 показано, що різниця між  $\hat{p}$  і  $p^-$  є максимальною за умови малих  $n$  і зменшується в міру накопичення даних.

Таблиця 2 – Динаміка засвоєння КЗ: наївна точність  $\hat{p}$  проти нижньої межі Вілсона  $p^-$

$n$	$c$	$\hat{p}$	$p^-$	Status
2	1	0.50	0.16	Не засвоєно
4	2	0.50	0.21	Не засвоєно
6	4	0.67	0.35	Не засвоєно
12	8	0.67	0.43	Не засвоєно
20	15	0.75	0.56	Не засвоєно
24	20	0.83	0.70	<b>Засвоєно</b>

**Швидкість навчання (Learning Velocity).** Для оцінювання динаміки засвоєння використовується нахил  $p^-$  у часі:  $LV = \Delta p^- / \Delta t$ .

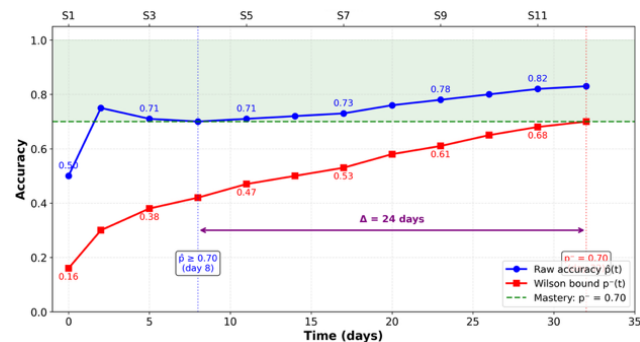


Рис. 6. Порівняння наївної точності та нижньої межі Вілсона

**Інтегральний показник упевненості (Integral Confidence Score).** Для цілісного оцінювання стану засвоєння кожного КЗ використовується:

Показник швидкості навчання  $LV$  дає змогу класифікувати темп засвоєння студента й адаптувати навчальне навантаження: студенти з нижчим  $LV$  потребують більше повторень і повільнішого введення нового матеріалу.

$$CS = 100 \cdot (w_1 \cdot p^- + w_2 \cdot S_{norm} + w_3 \cdot Coverage + w_4 \cdot R_{current}),$$

де  $S_{norm} = \min(S / S_{max}, 1)$  – нормалізована стабільність;  $Coverage$  – частка вивчених КЗ у темі;  $R_{current}$  – поточне утримання в пам'яті. Статистично обґрунтований  $p^-$  має найбільшу вагу, оскільки забезпечує консервативну оцінку засвоєння. Багатокомпонентна структура теоретично перевершує будь-який одномірний показник за прогностичною здатністю.

#### 4.6 Композитна метрика готовності.

**Адаптація темпу навчання.** Платформа регулює кількість нових КЗ за сесію відповідно до індивідуальної швидкості навчання  $LV$ : студенти з нижчим  $LV$  отримують більше повторень (нижче співвідношення нових тем до повторень), що допомагає уникнути когнітивного перевантаження, а студенти з вищим  $LV$  – інтенсивніше навантаження, що підтримує їхню залученість.

**Показник готовності (Readiness Score).** Інтеграція всіх показників – метрика готовності до підсумкового оцінювання:

$$RS = 100 \times (w_{cov} \times Coverage + w_{mas} \times Mastery + w_{stab} \times Stability + w_{prob} \times Probability),$$

де  $Coverage$  – частка КЗ з  $p^- \geq \tau_{mastery}$  серед усіх КЗ курсу;  $Mastery$  – середнє значення  $p^-$  за всіма КЗ;  $Stability$  – середня нормалізована стабільність пам'яті;  $Probability$  – середня ймовірність утримання в пам'яті на день складання іспиту.

Ваги відображають пріоритети: покриття  $w_{cov}$  є найважливішим – студент повинен продемонструвати засвоєння всіх тем, а не глибокі знання лише кількох. Засвоєння  $w_{mas}$  відображає середню глибину засвоєння. Стабільність  $w_{stab}$  урахує, чи зберуться знання до дня іспиту. Імовірність утримання  $w_{prob}$  відображає поточний стан пам'яті. Метрика забезпечує інтегроване оцінювання, що поєднує чотири теоретично обґрунтовані виміри навчального прогресу.

**4.7 Імплементация адаптивної системи навчання для мережі автошкіл.** Для верифікації запропонованих формальних моделей було розроблено й впроваджено адаптивну платформу навчання FAHRAI в мережі автошкіл для підготовки до теоретичного іспиту з правил дорожнього руху. Система реалізує повний замкнений цикл адаптивного навчання і дає

змогу оцінити поведінку моделей у реальних умовах із різними категоріями студентів.

**Інтерфейс навчальної сесії.** На рис. 7 показано загальний вигляд інтерфейсу навчальної сесії. Розглянемо елементи інтерфейсу.

**Індикатор активної стратегії вибору.** На екрані відображається панель із ієрархічними стратегіями, де поточну активну стратегію візуально виділено. Це дає змогу студенту й інструктору зрозуміти логіку системи – чому саме це завдання було вибрано в цей момент.

**Метадані завдання.** Для кожного завдання відображено: категорію правил дорожнього руху (наприклад, «Проїзд перехресть»), рівень складності  $b$ , відповідність зоні найближчого розвитку (ZPD) й тип стратегії, за якою було вибрано завдання.

**Інструменти навчальної підтримки.** Система надає студенту кілька інструментів підтримки: «Підказка» – скорочена інформація, що спрямовує до правильної відповіді; «Пояснення» – детальний аналіз правила дорожнього руху, пов'язаного із завданням; «Правило ПДР» – посилання на відповідний пункт правил; «Приклад із реального життя» – унаочнення застосування правила в реальній дорожній ситуації; «Запитати AI» – можливість отримати детальне пояснення від інтегрованого AI-асистента. Використання інструментів підтримки враховується в показнику якості відповіді  $q$ : використання підказки зменшує вагу компонента впевненості, що коригує оновлення стабільності.

**Візуалізація адаптивних метрик та їх вплив на навчальну траєкторію студента.** На рис. 8 детально показано панель адаптивних метрик із поясненнями їх впливу на навчальну траєкторію. Кожна метрика має конкретне значення для студента.

**Рівень здібностей ( $\theta = 0.72$ )** визначає складність наступних завдань. Система вибирає завдання зі складністю  $b \approx 0.79$ , що потрапляє в зону найближчого розвитку й забезпечує оптимальний баланс між складністю та досяжністю.

The screenshot displays the FAHRAI learning interface. At the top, there are six tabs: 1 Prerequisites, 2 Retention (active), 3 Remediation, 4 Exploration, 5 ZPD, and 6 Fallback. Below the tabs, the current question is '1.1.07-143' in the 'Traffic Signals' category with a difficulty of 0.85 and a ZPD status of 'in range'. A progress bar shows 'Optimal time for review based on spaced repetition (R = 58%, optimal window [0.45, 0.65])'. The question text is 'What does a flashing green traffic light signal mean?'. There are three multiple-choice options, with the first one selected: 'The signal warns that you must stop, as the yellow and then red signal will be activated shortly'. To the right, there are three performance indicators: 78% Pass Probability, 71% Knowledge Stability, and 74% Confidence Score. Below these, a 'Knowledge Stability' bar shows 71%. The 'Overall Statistics' section shows 158 Correct, 68 Incorrect, 224 Total Questions, and 70% Accuracy. The 'Study Time' section shows 4.2h Total Time and 38s Avg. per Question. At the bottom, there are navigation buttons: '1-3 Select', 'space Submit', and 'AI Submit Answer -->'.

Рис. 7. Загальний вигляд інтерфейсу навчальної сесії FAHRAI

**Утримання в пам'яті** ( $R(t) = 58\%$ ) сигналізує, що знання з теми починають спадати й потрапляють в оптимальне вікно повторення  $[0.45, 0.65]$ . Система автоматично перемикається на стратегію критичного утримання, перериваючи вивчення нового матеріалу.

**Стабільність** ( $S = 12.4$  днів) показує, наскільки міцно закріплені знання. Після кожного успішного повторення  $S$  зростає, а інтервали між повтореннями продовжуються, що зменшує навантаження на студента.

**Нижня межа Вілсона** ( $p^- = 0.65$ ) показує, що тему ще не засвоєно й, відповідно, не зараховано, якщо порогове значення засвоєння становить  $0.70$ . Наївна точність  $70.5\%$  створила б ілюзію засвоєння, але консервативна оцінка Вілсона запобігає передчасному переходу до складніших тем.

**Готовність** ( $RS = 78\%$ ) – інтегрований бал, що поєднує покриття тем, глибину засвоєння, стабільність пам'яті й прогноз утримання на дату іспиту. До порогового значення готовності, що становить  $85\%$ , залишається  $7\%$  – це дає змогу студенту оцінити свій стан і спланувати підготовку.

**Адаптивна модифікація навчальної траєкторії.** На рис. 8 також показано, як система модифікує навчальну траєкторію залежно від стану метрик студента. Розглянемо ключові сценарії адаптації.

**Перехід від ZPD до критичного утримання.** Коли утримання в пам'яті раніше вивченої теми знижується до порогового значення  $65\%$ , система перериває вивчення нового матеріалу й встановлює повторення. Це максимізує ефект тестування, оскільки пригадування в оптимальному вікні потребує зусиль, але все ще є можливим.

**Активізація ремедіації.** Якщо буде виявлено систематичні помилки з конкретної теми ( $p^- < 0.60$  за достатнього  $R(t)$ ), то система спрощує завдання, активує

інструменти підтримки й повертає студента до базових понять теми.

**Блокування на незасвоєних передумовах.** Якщо перехід до нової теми потребує засвоєння попередньої (наприклад, «Сигнали світлофора» перед «Регулювання перехресть»), то система блокує перехід до виконання подвійного критерію засвоєння.

**Перехід у режим підтримки.** Коли тема демонструє стабільне засвоєння ( $p^- \geq 0.70$ ,  $n \geq 10$ ), вона переходить у режим повторень за адаптивним розкладом, звільняючи час для нового матеріалу.

**Адаптація для різних категорій студентів.** Система індивідуально адаптує параметри для різних категорій студентів (таблиця 3). Під «Пояснення + AI» розуміється використання методів штучного інтелекту для генерації персоналізованих пояснень і підтримки навчання але детальний опис відповідного модуля виходить за межі цієї роботи.

Переваги адаптивного навчання для мережі автошкіл: скорочення часу підготовки завдяки усуненню неефективних повторень уже засвоєного матеріалу; підвищення відсотка складання іспиту з першої спроби завдяки надійному оцінюванню готовності; можливість індивідуального темпу для кожного студента без збільшення навантаження на інструкторів; прозорість рішень системи, що дає змогу інструкторам контролювати навчальний процес.

**5. Обговорення результатів.** Представлені формальні моделі утворюють цілісну систему, у якій кожний компонент підсилює дію інших. IRT забезпечує точне добирання завдань відповідно до рівня студента, модель забування запобігає втраті засвоєних знань, довірчий інтервал Вілсона допомагає уникнути передчасних переходів, а персоналізація підтримує оптимальний темп і залученість. Ця синергія узгоджується з теорією бажаних труднощів [13] і теорією когнітивного навантаження [19].

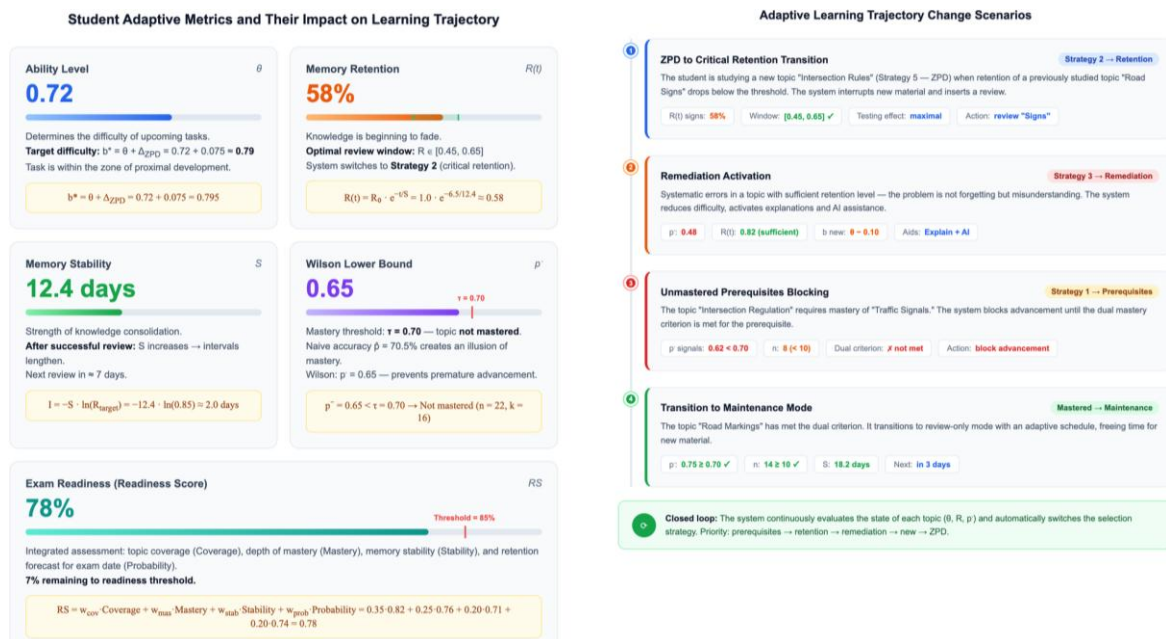


Рис. 8. Панель прогнозу з адаптивними метриками FAHRAI

Таблиця 3 – Адаптація параметрів до категорій студентів

Параметр	Швидкий учень	Повільний учень	Труднощі з темою	Готовий до іспиту
Активна стратегія	ZPD (5)	ZPD (5)	Remediation (3)	Retention (2)
Складність	$\theta + 0.075$	$\theta + 0.075$	$\theta - 0.10$	$\theta + 0.05$
Нове / Повторення	60 % / 40 %	30 % / 70 %	10 % / 90 %	5 % / 95 %
Цільове $R^*$	0.90	0.80	0.85	0.90
Інструменти підтримки	Вимкнено	Підказки	Пояснення + AI	Вимкнено

**Інтегрована модель IRT із забуванням (IRT-forgetting)** уперше об'єднує рівень здібностей і динаміку пам'яті в межах єдиного формального предиктора. Найвні підходи або моделюють здібності без урахування забування (класична IRT), або забування без урахування здібностей (SM-2, FSRS). Мультиплікативна структура  $P = R \cdot P_{IRT} + (1 - R) \cdot P_{guess}$  має прозору когнітивну інтерпретацію: забування діє як «фільтр», через який проходять здібності. Теоретичний аналіз свідчить про покращену калібрацію моделі, особливо в діапазоні низьких імовірностей, де статична IRT систематично завищує шанси правильної відповіді.

**Модель динамічної стабільності** розвиває ідеї FSRS [21], додаючи два нові елементи: інтеграцію з IRT (початкова стабільність залежить від  $\theta$ ) і контекстно-залежний множник (ефективність повторення залежить від рівня утримання знань). Композитний показник якості  $q$ , який поєднує правильність, час і впевненість, забезпечує якісніше інформаційне поле для оновлення стабільності, ніж дискретна шкала SM-2.

**Ієрархічний метод вибору завдань** формалізує педагогічний принцип пріоритету фундаменту. Контекстно-залежні ваги забезпечують фокусування на найбільш релевантному факторі в межах кожної стратегії. Ієрархічна структура теоретично перевершує лінійну комбінацію стратегій завдяки можливості повного перемикавання між режимами навчання залежно від поточного стану студента.

**Довірчий інтервал Вілсона** вперше систематично обґрунтовано для контексту адаптивного навчання. Консерватизм оцінки  $p^-$  за малих  $n$  допомагає уникнути передчасних рішень, що має значні теоретичні та практичні наслідки для зменшення хибнопозитивних оцінок засвоєння.

Моделі мають обмеження, які окреслюють напрями подальших досліджень. Параметри ( $\Delta_{ZPD}$ , ваги стратегій, порогові значення) потребують калібрування для конкретних предметних областей і вікових груп. Ефективність для дисциплін із менш формалізованою структурою знань залишається питанням для подальшого дослідження. Застосування цієї моделі в інших предметних областях може потребувати recalібрації.

**Висновки.** У роботі запропоновано комплекс формальних моделей і методів адаптивного навчання, розроблених у межах платформи FAHRAI:

**Інтегрована модель IRT-forgetting.** Мультиплікативна комбінація ймовірності IRT 2PL із функцією

утримання пам'яті створює єдиний предиктор із теоретично покращеною калібрацією та дискримінативною здатністю порівняно з класичною моделлю IRT та адитивними комбінаціями.

**Модель динамічної стабільності пам'яті.** Композитний показник якості відповіді й контекстно-залежний множник забезпечують структурні переваги над SM-2 (неперервна модель, інтеграція з IRT) і FSRS (контекстно-залежне оновлення).

**Ієрархічний метод вибору завдань.** Багаторівнева ієрархія стратегій із контекстно-залежними вагами забезпечує педагогічно обґрунтований баланс між повторенням, корекцією, дослідженням і розвитком, теоретично перевершуючи лінійні комбінації стратегій.

**Статистично надійне оцінювання.** Довірчий інтервал Вілсона суттєво зменшує частку хибнопозитивних оцінок засвоєння порівняно з наївною точністю. Інтегральний показник  $CS$  поєднує чотири виміри навчального прогресу.

**Композитна метрика готовності** інтегрує покриття, засвоєння, стабільність пам'яті та ймовірність утримання в єдину прогностичну метрику.

Цілісна інтеграція запропонованих моделей у межах платформи FAHRAI формує комплексну формальну основу для адаптивного управління навчальним процесом. Це уможливило одночасне врахування рівня знань студента, динаміки забування, педагогічних пріоритетів і статистичної надійності оцінювання, забезпечуючи більш обґрунтоване ухвалення рішень щодо вибору навчальних завдань, планування повторень і визначення готовності до підсумкового оцінювання. Порівняно з фрагментованими підходами запропонований комплекс моделей створює передумови для підвищення ефективності персоналізованого навчання та впровадження адаптивних систем нового покоління.

Перспективи подальших досліджень охоплюють мультидисциплінарну валідацію, інтеграцію графів знань із моделюванням ефектів перенесення між темами, лонгітюдні дослідження ефективності моделей та адаптацію параметрів для різних вікових груп. Окремим напрямом є інтеграція методів штучного інтелекту для персоналізації навчання, а також проведення та аналіз рандомізованого контрольованого експерименту з метою емпіричної перевірки запропонованого підходу. Ці аспекти реалізовані у платформі FAHRAI, проте виходять за межі даної роботи і плануються до висвітлення в окремих публікаціях.

**Декларація про використання генеративного штучного інтелекту.** Під час підготовки цієї роботи автори не використовували жодних інструментів генеративного штучного інтелекту.

#### References

1. OECD. *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*. Paris, OECD Publishing, 2023. 488 p. ISBN 978-92-64-35128-8.
2. Van Lehn K. The relative effectiveness of human tutoring, intelligent tutoring systems, and other tutoring systems. *Educational Psychologist*. 2011, vol. 46, no. 4, pp. 197–221. DOI: <https://doi.org/10.1080/00461520.2011.611369>.

3. Vygotsky L. S. *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA, Harvard University Press, 1978. 159 p. ISBN 0-674-57628-4.
4. Ebbinghaus H. *Über das Gedächtnis: Untersuchungen zur experimentellen Psychologie*. Leipzig, Duncker & Humblot, 1885. ix, 169 p. (Library of Congress LCCN: e11000616.)
5. Murre J. M. J., Dros J. Replication and analysis of Ebbinghaus's forgetting curve. *PLoS ONE*. 2015, vol. 10, no. 7, article e0120644, 23 p. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0120644>.
6. Cepeda N. J., Pashler H., Vul E., Wixted J. T., Rohrer D. Distributed practice in verbal recall tasks: A review and quantitative synthesis. *Psychological Bulletin*. 2006, vol. 132, no. 3, pp. 354–380. DOI: <https://doi.org/10.1037/0033-2909.132.3.354>.
7. Wilson E. B. Probable inference, the law of succession, and statistical inference. *Journal of the American Statistical Association*. 1927, vol. 22, no. 158, pp. 209–212. DOI: <https://doi.org/10.1080/000312459.1927.10502953>.
8. Agresti A., Coull B. A. Approximate is better than “exact” for interval estimation of binomial proportions. *The American Statistician*. 1998, vol. 52, no. 2, pp. 119–126. DOI: <https://doi.org/10.1080/00031305.1998.10480550>.
9. Wozniak P. A. *Optimization of Learning: A New Approach and Computer Application*. Master's Thesis. Poznań, University of Technology in Poznań, 1990.
10. Chaiklin S. The zone of proximal development in Vygotsky's analysis of learning and instruction. In: Kozulin A., Gindis B., Ageyev V. S., Miller S. M., eds. *Vygotsky's educational theory in cultural context*. Cambridge, Cambridge University Press, 2003, pp. 39–64. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840975.004>.
11. Lord F. M. *Applications of item response theory to practical testing problems*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, 1980. 274 p. ISBN 0-89859-006-X. (ERIC ED312280).
12. Baker F. B., Kim S.-H., ed. *Item response theory: Parameter estimation techniques*. 2nd ed. New York, Marcel Dekker, 2004. 480 p. ISBN 0-8247-5825-0.
13. Bjork E. L., Bjork R. A. Making things hard on yourself, but in a good way: Creating desirable difficulties to enhance learning. In: Gernsbacher M. A., Pew R. W., Hough L. M., Pomerantz J. R., eds. *Psychology and the real world: Essays illustrating fundamental contributions to society*. New York, Worth Publishers, 2011, pp. 56–64.
14. Roediger H. L., Karpicke J. D. Test-enhanced learning: Taking memory tests improves long-term retention. *Psychological Science*. 2006, vol. 17, no. 3, pp. 249–255. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2006.01693.x>.
15. Brown L. D., Cai T. T., DasGupta A. Interval estimation for a binomial proportion. *Statistical Science*. 2001, vol. 16, no. 2, pp. 101–133. DOI: <https://doi.org/10.1214/ss/1009213286>.
16. Bransford J. D., Brown A. L., Cocking R. R., eds. *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Washington, DC, National Academy Press, 2000. Expanded edition. Washington, DC, National Academy Press, 2000. 384 p. ISBN 0-309-07036-8. DOI: <https://doi.org/10.17226/9853>.
17. Dunlosky J., Rawson K. A. Overconfidence produces underachievement: Inaccurate self evaluations undermine students' learning and retention of material. *Learning and Instruction*. 2012, vol. 22, no. 4, pp. 271–280. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.08.003>.
18. Hailikari T., Katajavuori N., Lindblom-Ylänne S. The relevance of prior knowledge in learning and instructional design. *American Journal of Pharmaceutical Education*. 2008, vol. 72, no. 5, article 113. DOI: <https://doi.org/10.5688/aj7205113>.
19. Sweller J., Ayres P., Kalyuga S. *Cognitive load theory*. New York, Springer, 2011. xvi, 274 p. ISBN 978-1-4419-8125-7. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8126-4>.
20. Zhao J. LECTOR: LLM-Enhanced Concept-based Test-Oriented Repetition for Adaptive Spaced Learning. *arXiv preprint arXiv:2508.03275*. 2025. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.03275>.
21. Ye J., Su J., Cao Y. Optimizing spaced repetition schedule by capturing the dynamics of memory. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 2023, vol. 35, no. 10, pp. 10085–10097. DOI: <https://doi.org/10.1109/TKDE.2023.3251721>.
22. Vie J.-J., Kashima H. Deep knowledge tracing is an implicit dynamic multidimensional item response theory model. *Proceedings of the 31st International Conference on Computers in Education (ICCE 2023)*. Matsue, Japan, December 4–8, 2023. Asia-Pacific Society for Computers in Education, 2023, pp. 118–127. URL: <https://arxiv.org/abs/2309.12334>.

Надійшла (received) 01.04.2026  
 Прийнята (accepted) 20.04.2026  
 Опублікована (published) 20.05.2026

UDC 004.89

**O. O. KHOLODNIK**, postgraduate student, Department of Computer Sciences and Information Technologies, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine; e-mail: o.o.kholodniak@khai.edu; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-1012-7361>

**O. V. PROKHOROV**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Computer Sciences and Information Technologies, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine; e-mail: o.prokhorov@khai.edu; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4680-4082>

## MODELS AND METHODS FOR INTELLIGENT MANAGEMENT OF PERSONALIZED LEARNING TRAJECTORIES BASED ON AN INTEGRATED IRT-FORGETTING FRAMEWORK

Despite the widespread adoption of modern learning management systems, most of them primarily focus on providing access to content and assessing outcomes, while overlooking the formalized modeling of individual learning trajectories and the dynamics of knowledge forgetting. This paper presents a comprehensive set of models and methods for adaptive learning, developed within the FAHRAI platform (Framework for Adaptive Hierarchical Review and Instruction). The following key components are proposed: (1) an integrated model that multiplicatively combines the two-parameter Item Response Theory model (IRT 2PL) with a memory retention function, enabling improved calibration compared to classical IRT; (2) a dynamic memory stability model incorporating a composite response quality indicator and a context-dependent multiplier; (3) a hierarchical task selection method based on a multi-level system of strategies and context-dependent weights of a composite prioritization score; (4) an approach based on the Wilson confidence interval for statistically reliable estimation of mastery level, significantly reducing the rate of false-positive decisions compared to naive accuracy; (5) a composite readiness metric integrating IRT parameters, memory retention, and the statistical reliability of the estimation. For each model, a formal description, theoretical justification, and numerical examples are provided. The proposed set of models and methods constitutes a unified theoretical framework for the development of adaptive learning systems, enabling improved accuracy in predicting learning outcomes, greater efficiency in repetition scheduling, and enhanced reliability in assessing individual learner progress.

**Keywords:** personalized learning trajectories, adaptive learning, item response theory, spaced repetition, zone of proximal development, Wilson confidence interval, learning personalization.

Повні імена авторів / Author's full names

**Автор 1 / Author 1:** Холодняк Олександр Олександрович / Kholodniak Oleksandr Oleksandrovych

**Автор 2 / Author 2:** Прохоров Олександр Валерійович / Prokhorov Oleksandr Valeriyovych